ELEMENTI

DI

FISICA MATEMATICA

TOMO SECONDO.

ELEMENTI

DI

FISICA MATEMATICA

COMPILATI DA

STANISLAO CANOVAI E GAETANO DEL-RICCO

DELLE SCUOLE PIE

TOMO II.

Edizione Terza accresciuta e corretta.

FIRENZE 1810.

Presso Pietro Allegrini Stamp. alla Croce Rossa

A Spese di Giovacchino Pagani.

Xenocrates ad eum qui Rerum Mathematicarum ignarus ludum suum frequentare cupiebat, Abi, *inquit*, ansis enim et adminiculis Philosophiae cares.

Diog. Laert. in Xen. L. IV. 10.

ELEMENTI

DI

FISICA MATEMATICA

Lo spettacolo della Luce, e dei Corpi che la tramandano dal Cielo, ha data l' origine a due Scienze a prima vista molto diverse fra loro, ma realmente sì unite, che ai progressi dell' una è divenuta debitrice l' altra delle grandi scoperte, onde in questi ultimi tempi si è arricchita. La prima ha per oggetto la Luce stessa ed i suoi fenomeni, e si chiama *Ottica;* la seconda i Corpi celesti, la loro situazione, i loro moti, le lor tendenze reciproche, e chiamasi *Astronomia*.

ELEMENTI D' OTTICA.

431. L' *Ottica* si divide generalmente in due parti: l' una è la *Scienza della Visione*, la quale esaminando a parte a parte le varie proprietà della luce nei raggi or diretti ed or piegati per cui si propaga, può anche chiamarsi *Teoria della luce:* l' altra è la *Pratica della Visione*, la quale aggirandosi sui mezzi di aumentar le forze visive, e componendo una quantità di macchine che producono questo effetto, può anche chiamarsi *Teoria delle Macchine Ottiche*.

432. Tra le molte questioni dei Fisici sulla materia lucida e sul modo ond' ella si diffonde, niuna ve n' è che interessi le nostre mire: anzi i fondamenti medesimi con cui sogliono spiegarsi i primitivi fenomeni della luce, e da cui comunemente deduconsi le leggi del movimento di lei, ci sembrano sì pieni di difficoltà e sì poco dimostra-

ti finora, che abbiam creduto di doverli sopprimere in faccia ai lumi sicuri dell' esperienza. Benchè dunque e col principio dell' attrazione nelle minime distanze, e con l' ipotesi della via brevissima che la natura tende a prescegliere, sieno giunti i Matematici alle conclusioni stesse dei Fisici sperimentatori, nondimeno abbiam voluto piuttosto riportarci affatto a questi ultimi, i quali bisognava pur consultare in tante altre occorrenze, che seguir dei raziocinj ove a dispetto dell' apparato seducente del calcolo, lo spirito mal soddisfatto teme sempre l' equivoco e resta nell' incertezza.

PARTE PRIMA

TEORÌA DELLA LUCE

Natura della Luce.

433. Quella sostanza che rende visibili i corpi si chiama *luce:* la privazione e la mancanza totale di questa sostanza, lascia l' *ombra* e le *tenebre*.

434. Si sa che posta M la massa d' una molecula lucida, C la sua celerità, $F = MC$ è l' espressione della sua forza (19): ora gli Astronomi ci dimostrano che C è quasi infinita; dunque M dee esser quasi infinitesima: senza ciò, la forza eccessiva della luce metterebbe in polvere quanto incontra per via. Da questa piccolezza estrema delle molecule lucide deducono alcuni che i raggi di luce benchè con mille diversi angoli si seghino scambievolmente, non si confondon però tra loro, nè si impediscono nel lor viaggio: ma se l' esperienze più decisive (432) non venissero in soccorso di questa illazione, forse niun Fisico la stimerebbe certa abbastanza per abbracciarla.

L' idea completa della luce comprende più cose: i *corpi* che la diffondono, i *mezzi* che la trasmettono, gli *ostacoli* che la rispingono e gli *organi* che la ricevono.

435. Ogni punto del *corpo* da cui parte la luce, si chiama in generale un punto *lucido* o *raggiante:* egli è *illuminoso* allorchè sparge una luce sua propria, ed è *il-*

luminato quando sparge una luce ricevuta d'altronde. Luminoso o illuminato che siasi, la luce dee partirne sempre in raggi che di lor natura procedono per retta linea; poichè non vi è ragione alcuna d'immaginar nel punto lucido più forze eterogenee che imprimano alla luce un moto curvilineo (95.130). La sola attrazion della luce potrebbe produr questo effetto (130): ma poichè l'attrazione opera in ragion delle masse (67), che nel nostro caso sono infinitesime (434), ne verrà che se la forza attrattiva non sia infinitamente grande, l'effetto ne diverrà insensibile, e sarà vinto interamente dalla celerità quasi infinita della luce, il cui moto perciò di sua natura è rettilineo.

436. Il *mezzo* che trasmette la luce è *libero* se manca ogni forza estrinseca che la signoreggi e ne diminuisca la quantità; è *diafano uniforme* se un'egual forza opera in lei di continuo e la diminuisce ad ogni passo egualmente; ed è *diafano vario* se più forze ineguali agiscono sopra di essa e l'assoggettano ad ineguali diminuzioni.

437. Nel *mezzo libero* la luce si muove sempre in retta linea, perchè mancando per ipotesi, ogni forza estrinseca (436), la propria inerzia (3.14) le impedisce di cangiar mai la primitiva direzione (435).

438. Nel *mezzo diafano uniforme* la luce si muove parimente in retta linea; perchè le forze estrinseche essendo per ipotesi eguali (436), l'azione dell'una è bilanciata continuamente e distrutta dalla contraria ed eguale azione dell'altra (16), onde la luce si muove come se mancasse ogni forza (437).

439 Ma nel *mezzo diafano vario* la luce *obliqua* cangia direzione ogni volta che il mezzo si cangia; perchè le forze estrinseche essendo per ipotesi ineguali (436), l'azione dell'una nei punti di cangiamento vince la contraria azione dell'altre, onde il raggio è costretto ad obbedire alla più forte e ad incurvarsi: tanto avviene al raggio ΦI allorchè cade obliquamente sul cristallo o *lente* AB (*fig.* 63). Questo incurvamento dicesi *refrazione*; il raggio HD che si piega in D è il *raggio incidente*, il raggio piegato DF che entra nel nuovo mezzo BAG, è il *raggio refratto*; e se dal punto d'incontro D si alzi EDG normale al mezzo BA, e il raggio incidente HD si prolunghi in N, sarà HDE l'*angolo d'incidenza* o

50

50 l' *incidenza*, FDG l' *angolo di refrazione* o la *refrazione*, ed NDF l'*angolo di deviazione* o la *deviazione*. L'esperienza (432) ha mostrato 1°. che i raggi incidente e refratto son sempre in un sol piano colla normale EG; 2°. che il seno dell'angolo HDE d'incidenza al seno dell'angolo FDG di refrazione è sempre in una ragion costante che a suo luogo si assegnerà; 3°. che il raggio refratto DF si accosta alla normale DG, se dall'aria passi o nell'acqua o nel vetro o nel cristallo; e se ne discosta, se da questi mezzi passi nell'aria.

440. Gli *ostacoli* che rispingon la luce, sono specialmente i corpi non diafani ovvero *opachi*: e dico *specialmente*, perchè anche i corpi diafani rispingono in certe circostanze la luce come vedremo. Il raggio che incontra un corpo opaco, se non vi resti assorbito, è costretto a piegarsi nel punto d'incontro e a tornare nel mezzo primitivo; tale è il caso di ΦO o ΦM allorchè incontra lo specchio MO (*fig.* 55). Questo ritorno dicesi *riflessione*: il raggio piegato DI che torna nel mezzo AEB, è il *raggio riflesso*; e se dal punto D d'incontro si alzi DE normale al piano BA, sarà HDE l'*angolo d'incidenza*, ed EDI l'*angolo di riflessione*. E qui pure ha fatto veder l'esperienza (432): 1°. che i raggi incidente e riflesso son sempre in un sol piano colla normale DE; 2°. che l'angolo d'incidenza è costantemente eguale all'angolo di riflessione: onde la luce è un corpo perfettamente elastico (219).

441. Infine l'organo che riceve la luce è l'occhio: Ne daremo altrove la descrizione, e qui basti osservare che come i corpi illuminati sono in numero assai maggiore dei luminosi, pochissimi raggi vengono all'occhio direttamente; i più gli sono inviati per riflessione dai corpi circonvicini, e la massima parte dei diretti e dei riflessi hanno anche sofferte delle refrazioni prima di giungere alla pupilla; ciò non ostante, tutti i raggi o riflessi o refratti si riguardano come diretti finchè si prescinde dalle proprietà caratteristiche della riflessione e della refrazione (439.440). L'*Ottica propriamente detta* indaga gli effetti di questi raggi; le particolarità della riflessione e della refrazione formano l'oggetto della *Catottrica* e della *Diottrica*.

Luce Diretta.

Il moto dei raggi lucidi in retta linea (435) produce quattro effetti considerabili a cui può ridursi tutta la Teoria della luce diretta.

442. Il primo è la *divergenza dei raggi lucidi*. Infatti i varj raggi che partono dal punto A si tagliano scambievolmente in A; non posson dunque partirne nè convergenti (L. 392) nè paralleli (L. 413), e però necessariamente divergeranno formando o una sfera AmnC, o se vengano in parte impediti, un cono AFE il cui centro o vertice è il punto lucido A. Per altro con un raziocinio molto simile a quello con cui mostrammo altrove (41) il parallelismo sensibile dei gravi cadenti, si può stabilir del pari che ad una certa distanza dal punto lucido A, i raggi che ne procedono, posson prendersi in pratica per paralleli. Nè questa distanza è molto grande; poichè supponendo che due linee possan dirsi sensibilmente parallele allorchè il loro angolo di divergenza non è maggior di $20''$, se nel triangolo isoscele AIO si faccia l' angolo $A = 20''$, gli angoli sulla base o pupilla IO saranno $I = O = 89^\circ, 59', 50''$; ora il diametro della pupilla massimamente dilatata giunge a $2^{lin.}, 5$; dunque $AO = AI = \frac{2,5 \times sen\, 89^\circ, 59', 50''}{sen\, 20''}$ (L. 656) $= 179^{pie.}$, cioè se il punto lucido A sia distante dall' occhio di 180 piedi, i raggi vi entreranno pressochè paralleli.

443. Ma tornando alla divergenza, sia il mezzo libero BCDAdGb ed in esso il cono AFE o la massa m di luce che a diverse distanze $AM = p$, $AE = q$ si riceva sopra due piani paralleli ove formerà le figure simili $MN = r^2\pi$, $EF = r'^2\pi$ (L. 538). Posti v, v' i volumi e d, d' le *densità*, *chiarezze* o *intensità* della luce in MN, EF, si avrà $m = dv$, $m' = d'v'$ (11) e $dv = d'v'$: ma i volumi son le figure stesse $r^2\pi$, $r'^2\pi$ (111); dunque $dr^2\pi = d'r'^2\pi$ e perciò $d : d' :: r'^2\pi : r^2\pi :: q^2 : p^2$ (L. 539), cioè *le densità della luce in un mezzo libero sono inversamente come i quadrati delle distanze dal punto lucido* A. Perciò se A sia a una tal distanza che i raggi possan prendersi per paralleli (442), fatta $AH = p = \infty$ ed HG

$= a$, sarà $AG = q = p + a = \infty + a = \infty$, e $d : d' :: \infty^2 : \infty^2$, onde $d = d'$, cioè *la densità della luce che si propaga in un mezzo libero per raggi paralleli, è costante.*

444. Non così nei lunghi tratti d'un mezzo diafano uniforme DA. Diviso DA in varj strati DC, EB ec. di
52 egual grossezza, e chiamata d la densità della luce nell'istante in cui penetra il mezzo, poughiamo che nel primo strato DC venga ella a diminuirsi (436) d'una quantità $\frac{d}{a}$; dunque passato il primo, la sua densità diverrà $d' = d - \frac{d}{a} = \frac{d(a-1)}{a}$: ma nel secondo strato EB, attesa l'uniformità del mezzo, scema nuovamente (436) di $\frac{d'}{a} = \frac{d(a-1)}{a^2}$; dunque passato il secondo, la sua densità sarà $d'' = d' - \frac{d(a-1)}{a^2} = \frac{d(a-1)^2}{a^2}$: così passato il terzo, si troverà $d''' = \frac{d(a-1)^3}{a^3}$, e passato lo strato n^{imo} sarà $d^{n)} = \frac{d(a-1)^n}{a^n}$; dunque la luce in un mezzo uniforme va continuamente scemando come la serie $\frac{d(a-1)}{a}, \frac{d(a-1)^2}{a^2} \dots \frac{d(a-1)^n}{a^n}$, e la densità de' suoi raggi divergenti vi decresce in ragion composta dell'inversa dei quadrati delle distanze (443) e della diretta de' due termini della serie che corrispondono a quelle distanze; cosicchè se sia AG
51 $= q = 4AH = 4p$, si avrà $d : d' :: 16p^2 \times \frac{d(a-1)}{a} : p^2 \times \frac{d(a-1)^4}{a^4} :: 16 : \frac{(a-1)^3}{a^3}$, e posto $\frac{d}{a} = \frac{1}{100}$, $d : d' :: 16 : 0{,}970299 :: 33 : 2$ presso a poco. Ma poichè si sa per esperienza (432) che in un tratto di 189^{tese} la luce non perde nell'aria che $\frac{1}{100}$ della sua densità, decremento quasi insensibile, la densità della luce per lo spazio almeno di 180^{tese} nell'atmosfera, potrà calcolarsi senza l'introduzion della serie.

445. Del resto niun raggio che venga agli occhi o divergente o parallelo, può mai produrvi di sua natura la perfetta vision degli oggetti; poichè supposto che i varj punti d' un corpo trasmettessero al fondo dell' occhio o un cono o un cilindro lucido, è certo che ciascun punto B, A, D vi sarebbe rappresentato dai circoli KL, EF, PQ di un diametro o maggiore o eguale al diametro della pupilla; e giacchè i punti fisici sono in un corpo innumerabili, gli innumerabili circoli sarebbero costretti a cadere in parte sui lor contigui, le immagini si deformerebbero stranamente, e la visione riuscirebbe imperfetta e confusa. Questa è la ragione per cui le immagini degli oggetti esterni che attraversando un piccol foro vanno a dipingersi sulla parete di una camera oscura, son sempre molto languide e assai mal terminate se l' arte non ne corregga il difetto. Vedremo a suo luogo con quale stupendo meccanismo la sapienza infinita di Dio abbia forzati i raggi a convergere dentro all' occhio, onde ogni cono o cilindro lucido B*b*, AG, D*d* vi si ristringa in un sol punto *b*, G, *d* e vi segni accurata e distinta l'immagine del corrispondente punto B, A, D da cui partì.

51

446. Il secondo effetto del moto rettilineo della luce è l' *inversione delle immagini*. Infatti i coni lucidi che escono da più punti contigui B, A, D di un corpo, si incontrano necessariamente e si tagliano in IO: ma poichè ad onta di queste intersezioni, non si confondono nè s'impediscon tra loro (434), il cono BI giungerà direttamente in *b*, il cono DO in *d*, e l' uno e l' altro renderanno visibili i punti B, D nei punti opposti *b*, *d* cioè *la situazion dell' immagine* bGd *portata da raggi che una volta sola si segano*, *e contraria alla situazion dell' oggetto* DAB.

447. L' esperienza (432) ha insegnato che questo appunto è il caso dell' occhio. I coni lucidi o *raggi visuali* B*b*, AG, D*d* dopo di essersi scambievolmente tagliati nella pupilla IO, vanno a delineare in fondo all' occhio l' immagine dei varj punti B, A, D che portan seco (433), e quindi la totale immagine dell' oggetto BAD vi si rovescia. Ora questo rovesciamento d' immagini, i cui originali frattanto si vedon da noi nella loro natural positura, dimostra ben chiaro che ciascun punto B, A, D di un oggetto o luminoso o illuminato, si vede sempre nel vertice del cono lucido *b*B, GA, *d*D da cui ce ne è por-

tata l' immagine; e che perciò *l' oggetto ci comparisce sempre nella direzion che hanno i suoi raggi allorchè giungono all' occhio*.

448. Intanto la *visione distinta* non cessa di avere i suoi limiti, e l' esperienza (432) almeno in parte gli ha definiti; poichè per quanto un occhio sia penetrante e ben fatto, si trova che egli più non ravvisa l' immagine di un oggetto, benchè solitario, benchè illuminato dalla luce del giorno, alla distanza di circa 6700 de' suoi diametri. Sia dunque IO la pupilla, $BD = d = 1$ il diametro dell' oggetto, l' angolo $BID = x$, e poichè la gran distanza AI attesa la piccolezza relativa di BD non differisce sensibilmente dai raggi BI, DI, sia $BI = DI = AI = a = b = 6700$; dunque nel triangolo isoscele BID si avrà (L. 638) $\cos x = 1 - \frac{d^2}{2a^2}$, ovvero (L. 610) $\operatorname{sen} x = \frac{d}{2a^2}\sqrt{(4a^2 - d^2)} = \operatorname{sen} 30''$ in circa, cioè l' oggetto BD diviene indistinguibile subito che l' *angolo ottico* BID formato nella pupilla IO dagli estremi raggi visuali BI, DI, è minore di $30''$. Ora replicando in varie guise gli esperimenti (432), hanno veduto i Fisici che indebolendosi la luce, l' angolo sotto cui si limita la visione distinta, è presso a poco come la radice cuba della distanza del corpo illuminante dall' oggetto; cosicchè chiamata 1 la distanza di un lume per cui il limite della visione sia $30''$, e d un' altra distanza per cui il limite della visione sia x, l' esperienza dà $30'' : x :: \sqrt[3]{1} : \sqrt[3]{d}$, onde $x = 30''\sqrt[3]{d}$: ma i quadrati delle distanze sono in ragione inversa delle densità o chiarezze della luce (443. 444); dunque presa per misura della chiarezza o per unità di chiarezza (L. 513. 559) la chiarezza del giorno, che ordinariamente è costante, e chiamata c un' altra chiarezza qualunque data, sarà $1 : c :: d^2 : 1$, $d = \frac{1}{\sqrt{c}}$, ed $x = \frac{30''}{\sqrt[6]{c}}$, cioè *il limite della visione distinta d' un oggetto solitario si ha generalmente dividendo $30''$ per la radice sesta della chiarezza della luce in cui è immerso*: così se

questa sia $\frac{1}{4}$ della chiarezza del giorno, sarà $c = \frac{1}{4}$, ed $x = \frac{30''}{\sqrt[6]{\frac{1}{4}}} = 38''$ in circa.

La visione distinta degli oggetti non solitarj e molto vicini tra loro, ha un limite la metà più ristretto; onde nella chiarezza del giorno divengono essi indistinguibili sotto un angolo di $1'$; e in $\frac{1}{4}$ di quella chiarezza, sotto un angolo di $1', 16''$ ec. Ma i limiti della *visione confusa* sono assai più vasti, e se l'oggetto non sia illuminato ma luminoso, non si sa bene fin dove si estendano questi limiti.

449. Or poichè l'angolo ottico ha tanta influenza nella visione, che se egli divenga insensibile, spariscono i comuni oggetti non luminosi, e i luminosi medesimi benchè di mole straordinaria, giungono all'occhio in forma di punti lucidi senza alcuna definibile dimensione: convien dire che da quest'angolo principalmente dipende il nostro giudizio sulla grandezza apparente degli oggetti, i quali perciò (supposte eguali tutte l'altre cose) debbono sembrarci tanto più grandi o più piccoli, quanto è maggiore o minore l'angolo ottico sotto cui ci si presentano; perchè se due oggetti B'D', GD formino nella pupilla I uno stesso angolo $B'ID' = bId$, è manifesto che l'immagine rovesciata ed egualmente grande bd d'ambedue, ci farà concludere $B'D' = GD$. 53

450. Di quì l'*apparenze ottiche*, terzo effetto del moto rettilineo della luce. Infatti se B'D' si inclini in B''D', il raggio rettilineo B''I trasmesso da B'', formerà nella pupilla I l'angolo ottico $B''ID' < B'ID'$, e come con una prima apparenza si concluse $B'D' = GD$, così con una seconda si concluderà B''D' cioè $B'D' < GD$. Ed ecco perchè i poligoni regolari ed i circoli, che veduti *direttamente* compariscono quali sono, guardati *obbliquamente* in qualche distanza, si giudicano irregolari e schiacciati. Anzi se la retta B'D' si inclini tanto, che giunga a coincidere col raggio visuale o *asse ottico* D'I che passando per il centro della pupilla I, sia normale alla superficie dell'occhio, il raggio B'I si confonderà con quest'asse, svanirà

53 l' angolo ottico $B'ID'$, e una nuova apparenza farà concludere che $B'D'$ non è che un punto D'; per la stessa ragione un piano talmente situato che l' asse ID' lo rada, non comparirà che una linea; e un solido che presenti una sola delle sue faccie, sarà stimato una semplice superficie.

451. Sia pertanto l' asse $ID = d$, $ID' = d'$; la grandezza o lunghezza lineare d' un oggetto normale $BD = g$; la lunghezza d' un altro oggetto normale $B'D' = g'$; l' angolo $BID = a$; $B'ID' = b$; e si avrà (L. 610) $ID = d = g \cot a$, $ID' = d' = g' \cot b$; onde $d : d' :: g \cot a : g' \cot b :: \frac{g}{\tang a} : \frac{g'}{\tang b}$ (L. 610), e se gli angoli a, b sieno assai piccoli, ovvero (il che è lo stesso) se le distanze d, d' sieno considerabili, le tangenti non differiranno sensibilmente dagli archi, e avremo $a : b :: \frac{g}{d} : \frac{g'}{d'}$, cioè *gli angoli ottici o le grandezze apparenti di due oggetti* BD, BD' *saranno in ragion diretta delle lor lunghezze lineari, e reciproca delle lor distanze*.

452. Onde 1°. se $g = g'$ sarà $a : b :: d' : d$ cioè *le grandezze apparenti di uno stesso oggetto saranno in ragione inversa delle distanze*: 2°. poichè $d < d'$ e perciò anche $b < a$, *un oggetto esposto in uno stesso modo alla vista, sembrerà diminuir di grandezza a misura che si allontana*, cioè parrà $B'D' < BD$: 3°. *le parallele* AB', EC' *sembreranno convergenti* in B', C', perchè comparirà sempre $B'C' < BC$; perciò anche *le linee orizzontali o di livello se non passino per l' asse* ID, *parranno inclinate all' orizzonte*.

453. Che se sia l'oggetto $GD = g'$, l' angolo $GID = b$ ed il resto come sopra (451), si avrà $d = g \cot a = g' \cot b$, e però $g : g' :: \cot b : \cot a :: \tang a : \tang b$, cioè *le vere grandezze di due oggetti in una stessa distanza sono come le tangenti della lor grandezza apparente*. Perciò se sia $BG = GD$ ovvero $g - g' = g'$ e $BIG = a - b = c$, avremo $g - g' (= g') : g' :: \tang a - \tang b : \tang b$; e quindi $\tang a \; (= \tang (c + b)) = 2 \tang b$, ovvero (L. 615) $\tang c = \tang b - 2 \tang c \times \tang^2 b$: dunque $\tang b > \tang c$, e $b > c$, cioè *due eguali oggetti* DG, GB *situati in una stessa normale*

all' asse ID *sembreranno ineguali, e quello comparirà maggiore che sarà più prossimo all' asse*.

454. In distanze più grandi si aumentano l'apparenze in guisa che tutto si trasforma all'occhio in certe situazioni: una gran linea sinuosa o retta diviene un grand'arco, un arco di mediocre ampiezza si cangia in retta linea, una sfera non è più che un circolo, gli angoli si rotondano, l'asprezze svaniscono, gli oggetti anche meglio illuminati son cupi e confusi ec. La general ragione di tutti questi fenomeni è, che le distanze smisurate non lascian sentire all'occhio o i risalti di una linea irregolare nel cui piano egli si trova, o le differenze dei lunghi raggi visuali, o il sottil dorso degli angoli, o la forza totale dei raggi lucidi ec. Di quì è che le foreste e le Città molto lontane ci pajono terminate in anfiteatro; il Cielo ci sembra una grande sfera vuota se si guarda all'orizzonte, o una gran volta schiacciata se si osserva al meridiano; il Sole e la Luna ci compariscono come circoli luminosi ec. Da queste apparenze trasse l'origine la *Prospettiva* o l'arte di delineare sopra una superficie i diversi oggetti più o meno lontani con le illusioni ed inganni medesimi con cui naturalmente si presentano all'occhio: ma come la teorica non può quì disgiungersi dalla pratica, e i dettagli di pratica riescirebbero lunghi e nojosi per chi non è destinato al Disegno o alla Pittura, basterà di averne indicati i fondamenti più generali.

455. Un'altra specie d'apparenze ottiche nasce dalla relativa situazion degli oggetti. Il corpo B che osservato da b comparisce in Z, osservato da d sembra in Z' e muta il *luogo apparente* secondo il punto diverso da cui è veduto: così la lancetta d'un orologio un poco lontana dai segni orarj, non mostra l'ora precisa se *l' asse ottico* di chi la guarda non è in un piano normale a quello dell'ore, condotto per la lunghezza della lancetta medesima. Questo *cangiamento angolare di luogo* chiamasi *parallasse*, e merita considerazione, specialmente nei corpi celesti, come vedremo. Sia dunque $dBb = P$ la parallasse di B relativa ai punti b, d, sia $Bb = d$, $bd = r$, e condotta dI normale a db sia $IdB = \pm a$. Avremo (L. 636) $d : sen\,(90^\circ \pm a)\ (= cos\,a) :: r : sen\,P = \frac{r\,cos\,a}{d}$. Quindi 1°. se B scenda in O e sia bd il raggio

53

53 della Terra, dO l' orizzonte e perciò $a = 0$, la parallasse orizzontale che chiamo p, darà $sen\, p = \frac{r}{d}$, ovvero se r è costante e p un angolo piccolissimo, $p = \frac{1}{d}$ (11); 2°. anzi se $a = a'$, anche $sen\, P : sen\, P'$, ovvero $P : P' :: \frac{1}{d} : \frac{1}{d'} :: d' : d :: p : p'$, cioè *le parallassi orizzontali o d' un' altezza medesima, sono in ragione inversa delle distanze dei corpi;* 3°. introdotto p nella prima formula, sarà $sen\, P = sen\, p \cos a$, oppure $P = p \cos a$, cioè *la parallasse d' un corpo a qualunque altezza è il prodotto della parallasse orizzontale per il coseno di quell' altezza;* 4°. se siano h, b gli apparenti diametri di due corpi, g, g' i veri, ed $r = r'$, sarà (451) $\frac{g}{h} : \frac{g'}{b} :: d : d' :: \frac{1}{p} : \frac{1}{p'}$, e perciò $g : g' :: \frac{h}{p} : \frac{b}{p}$, e $g' = \frac{bgp}{hp'} = \frac{gp}{p'}$ se h, b sieno eguali almeno prossimamente: onde *conosciuta la vera grandezza d' un corpo e la sua parallasse orizzontale, basta conoscer la parallasse dell' altro, per conoscerne la grandezza;* 5°. e poichè differenziando l' equazione $P = p \cos a$, si ha $\frac{dP}{da} = -p\, sen\, a$, fatto $\frac{dP}{da} = 0$ (L. 878), viene $a = 0°$, ovvero $= 180°$, la *massima parallasse* è l' orizzontale; 6°. se per altro il raggio terrestre sia vario in diversi luoghi, la parallasse corrispondente sarà diversa: onde poichè la Terra è compressa ai poli (204), tra le parallassi orizzontali *l' equatoriale è la massima e la polare è la minima;* 7°. la parallasse fa comparire gli astri meno elevati del vero nel circolo verticale in cui si misura l' altezza e la parallasse; 8°. e perciò si aumenta la lor distanza apparente: perchè se son in verticali diversi o in parti opposte del medesimo verticale, il parallattico abbassamento gli scosta scambievolmente, e se sono dalla medesima parte di uno stesso verticale, l' astro più basso soffrendo una maggior parallasse, si scosta più che l' altro dallo zenit, e la differenza delle due parallassi è un aumento della loro distanza; 9°. infine se $d = 1000000$, sarà $p = 2''$ in circa, parallasse insensibile e perciò Bb, Bd saran parallele fisicamente, e $d = \infty$.

FIG.

456. Vi sono anche delle apparenze ottiche nel movimento, o sia questo nei soli oggetti, mentre l'occhio sta immobile, o sia negli uni e nell'altro, o finalmente nell'occhio solo.

Poichè si sa per esperienza (432) che le stelle fisse trascorrono un arco di 15° in un'ora o di 15'' in 1'' senza che l'occhio si accorga di questo moto, è forza il concludere che *un moto qualunque diventa insensibile se lo spazio trascorso in 1'' faccia nell'occhio un angolo tra* 15'' e 20'': perciò posto lo spazio $B'D' = 1$, e l'angolo 53

$B'ID' = 17''$, si avrà (L. 610) $ID' = cot\ 17'' = \frac{1}{tang\ 17''}$ $= 12000$ in circa, cioè *l'oggetto sembrerà immobile se in 1'' trascorrerà solamente* $\frac{1}{12000}$ *della sua distanza dall'occhio*.

457. In generale sieno gli oggetti D, D' che nelle distanze $ID = d$, $ID' = d'$ trascorrano in egual tempo e dalla medesima parte gli spazj paralleli $DB = s$, $D'B'$ $= s'$: gli angoli ottici $BID = a$, $B'ID' = b$ rappresenteranno dunque o gli *spazj apparenti* o anche (poichè i tempi eguali del moto danno $s = c$, $s' = c'$ (18)) le *celerità apparenti* dei dati oggetti, e si avrà come sopra (451) $d = c\ cot\ a = \frac{c}{tang\ a}$, $d' = c'\ cot\ b = \frac{c'}{tang\ b}$, e $tang\ a :$ $tang\ b :: \frac{c}{d} : \frac{c'}{d'}$; onde in distanze assai grandi sarà pur come sopra (451) $a : b :: \frac{c}{d} : \frac{c'}{d'}$, cioè *le celerità apparenti sono in ragion composta della diretta delle celerità vere e dell'inversa delle distanze*.

Perciò 1°. se sia $a = 0$, sarà $\frac{c}{d} = 0$ e $c = 0$, cioè se l'oggetto D non abbia celerità alcuna apparente, sarà immobile riguardo all'occhio, quando pur ne avesse una vera lungo l'asse DI: 2°. se $c = c'$ e $d' > d$, sarà $a > b$, cioè benchè D, D' abbiano un'egual celerità vera, se D' sia più distante di D, la sua celerità sembrerà minore: 3°. se $c : c' :: d : d'$, sarà $a = b$, cioè se

le celerità vere di D, D′ siano proporzionali alle lor distanze dall' occhio, parrà che D, D′ si muovano con egual celerità; e le celerità apparenti saranno poi realmente eguali, se sia $c = c'$ e $d = d'$.

458. In quest' ultimo caso ha luogo una nuova e singolare apparenza; poichè se due oggetti K, F che per
53 l'egual celerità e lontananza dalla pupilla I, non cangian situazione tra loro, la cangin però riguardo all' oggetto fisso C′, e passando da K, F in H, L faccian che l' angolo ottico primitivo C′IK si aumenti e divenga C′IH: l'occhio, quando manchi d' ogni altra regola per giudicar del vero, trovando sempre eguali gli angoli FIK, LIH e sempre maggiori gli angoli C′IK, C′IH, stimerà immobili i due oggetti K, F e attribuirà un moto contrario all' oggetto fisso C′. Così la Luna il cui moto in un tempo corto è impercettibile (456), sembra correr velocemente in Settentrione, allorchè il vento spinge a Mezzogiorno una gran nuvola che le sta sotto.

459. Posto ciò; se unitamente agli oggetti K, F si muova senza avvedersene anche l' occhio I, tutto il moto apparirà nell' oggetto fisso C′, e questo moto apparente sarà contrario, ma simile e parallelo al moto reale dell' occhio: così gli alberi alla sponda di un fiume sembrano andare all' insù, mentre la corrente rapisce all' ingiù lo spettatore entro al suo legno, ed un oggetto che si muova sopra la sponda parallelamente allo Spettatore, gli parrà o non muoversi o muoversi assai lentamente o anche andare all' indietro; così se la forza d' un vortice faccia girar con furia un Vascello, l' Isole e gli Scogli all' intorno avranno per un Passeggiero inesperto che fissamente gli osservi, un apparente ed opposto moto di rotazione: e tanto più vere compariranno queste illusioni, quanto sarà più vasto il Vascello o quante più saranno le sue parti che in diverse distanze e positure sembrando immobili, faranno con maggior sicurezza attribuire agli oggetti fissi quel movimento: tale è il caso della Terra rispetto ai Corpi celesti.

Dunque movendosi l' occhio I unitamente agli oggetti K, F, se anche l' oggetto C′ si muova nel senso stesso, ma con movimento più tardo, l' angolo ottico C′IK, benchè con minore aumento di prima, diverrà tuttavia sem-

pre più grande, e l' oggetto C' sembrerà muoversi al solito contrariamente colla differenza delle due celerità, cioè anche il moto più lento nel senso stesso dell'occhio, si cangia in un apparente moto retrogrado. 53

460. Si muova ora il solo occhio e descriva senza avvedersene un' *orbita* circolare ETC il cui raggio $ST = r$. O l' oggetto immobile è nel centro S, ed avrà un moto apparente uguale ed opposto a quello dell' occhio (459); o è in P nell' asse del circolo ETC (L. 674), e farà un giro simile, la cui ampiezza è determinata dall' *angolo parallattico* $CPS = p$, che (posto $SP = R$ molto maggiore di r, onde sia prossimamente $PS = PC$) sarà $= \frac{r}{R}$ (L. 646). Ma se l' oggetto è in un punto A assai remoto dall' orbita ETC, a cui si dee riferire e segnatamente al suo centro S, le apparenze son più composte. Pertanto sia AD la normale al piano ETC prolungato se occorra, e suppongasi l' occhio in T. Conduco le rette DT, DS (prolungata in C) e da T la normale TH: dipoi le rette HA, SA, TA che attesa la gran distanza potranno prendersi per eguali ad R e tra loro, come pure si prenderanno per eguali gli angoli $AHD, ATD = l$, *latitudine apparente* del Corpo A dal piano ETC. Fatto ciò, e chiamata e la distanza angolare EST dell' occhio dal punto E (intersezione dell' orbita colla retta DSC o piuttosto col piano verticale ADC), avrò 1°. nel triangolo ASH, AS (R) : *sen* AHS (*sen* l) : : SH ($r \cos e$) : 54 2ª.

$sen\ HAS = \frac{r\ sen\ l \cos e}{R}$ che potrà chiamarsi la *parallasse di latitudine*, cioè la differenza tra la latitudine apparente AHD o ATD, e la vera ASD: 2° nel triangolo AHT rettangolo in H si ha parimente AT (R) : *sen* AHT (1) : :

TH ($r\ sen\ e$) : *sen* $HAT = \frac{r\ sen\ e}{R}$, angolo della parallasse

che devìa l' oggetto A dal piano verticale ASDA, e che può chiamarsi di *longitudine*. Che se si voglia l' effetto della parallasse HAT relativamente al piano ETC, cioè l' angolo HDT, projezione di A in D, poichè $TD = R \cos l$, si avrà

TD : TH : : 1 : *sen* $TDH = \frac{r\ sen\ e}{R \cos l}$. Osservo intanto che chia-

54 2ª. mando L la latitudine vera ASD, si avrebbe egualmente AH(R): *sen* ASH (= *sen* ASD = *sen* L)::HS ($r \cos e$):

$sen\, HAS = \frac{r\, sen\, L \cos e}{R}$. Quindi fatto $\frac{r}{R} = a$, $\frac{r\, sen\, L}{R} = b$,

$a\, sen\, e = x$, $b \cos e = y$, si troverà $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$,

equazione all' ellisse, da cui si ricava che il corpo A descriverà un' ellisse, tanto più compressa quanto minore sarà L.

53 461. Infine sia un oggetto lucido e fisso H il cui raggio Hd giunga in I quando l' occhio è in b, e passi in d mentre l' occhio trascorre bd, onde le celerità della luce e dell' occhio sieno Id, bd: compito il parallelogrammo bP, è chiaro (96) che la celerità Id sarà la risultante delle due IP, Ib, delle quali non potendo IP (parallela ed eguale a bd) esser sensibile all' occhio, lo sarà solamente Ib, ovvero Pd; onde egli vedrà l' oggetto lucido H per mezzo del solo raggio dP, e lo vedrà perciò non in H ma nella direzione di bI o dP cioè in H' (447). Posta dunque I$d = c$ la celerità della luce, $bd = c'$ la celerità dell' occhio, bId = HdH' $= a$ il movimento apparente o l' *aberrazione* dell' oggetto H, e dbI $= \phi$ l' angolo fatto dalle direzioni bd dell' occhio ed Ib o Pd del

raggio apparente, si avrà $sen\, a = \frac{c'\, sen\, \phi}{c}$ (L. 636); ove

fatto per esempio $c = r = 1$, $c' = arc\, 20''$ (L. 629 II°.) $= 20''$ e $sen\, a = a$, sarà $a = 20''\, sen\, \phi$, aberrazione per un corpo che descriva un arco di 20″, mentre il raggio di luce percorre la distanza r. Se poi $c = \infty$, sarà $sen\, a$

$= \frac{c'\, sen\, \phi}{\infty} = 0$, ed $a = 0$ (L. 611) cioè l' oggetto H si

vedrà nel suo vero luogo: e in generale sarà tanto più piccola l' aberrazione quanto c è più grande di c': dunque 1°. l' aberrazione fa avanzar l' oggetto H in H' nella direzione stessa dell' occhio; e tanto la sua direzione bd, quanto i raggi Hd, H'd diretto e apparente dell' oggetto, sono in un medesimo piano: 2°. la parallela IP che può chiamarsi *l' aberrazion lineare* è sempre eguale allo spazio bd trascorso dall' occhio, mentre la luce tra-

scorre Id: 3°. se l'oggetto è immobile in H', l'occhio venendo in d lo vedrà nella direzione df e l'aberrazion lineare sarà parimente P$f = bd$; ma se l'occhio riferisce l'aberrazione a una sfera Phg, di cui gli sembri d'esser nel centro d, l'oggetto gli comparirà in h, e la quantità dell'aberrazione sarà P$h <$ Pf: 4°. prolungata bd in t, si conduca Pt normale a dt e si chiami l l'angolo Pdt; e poichè Ph si confonde colla tangente, sarà retto l'angolo fhP come lo è Ptd e come hPd; ed essendo retto anche l'angolo fPt, sarà parimente fPh $= t$Pd, e quindi per i triangoli simili fPh, dPt si avrà (fatto P$f = m$) l'aberrazione angolare Ph = Pdh = m sen l: 5°. che se l'occhio venga da t verso d collo stesso moto, H' aberrerà nella parte opposta, e l'aberrazione sarà egualmente m sen l; se non che la distanza angolare di H dal piano dt che prima diminuiva, ora si aumenta.

53

462. Ma descriva l'occhio un' orbita circolare o almeno poco diversa dal circolo, e sia A un corpo immobile luminoso riferito a una sfera immensa, di modo che le rette che partono parallele da qualunque punto dell' orbita, coincidano sensibilmente nel punto stesso. Sia S il centro visibile del moto, ed E il punto da cui S ed A compariscono all' occhio in uno stesso piano ESA, verticale a quello a cui han da riferirsi i cangiamenti di aberrazione, cioè ad ETC. Se l'occhio in un tempo t percorrerà TR $= m$, che suppongo uno spazio assai piccolo, il corpo A sembrerà avanzato per uno spazio eguale e parallelo a TR. Conduco perciò RQ parallela ad ES, HTQ normale ad ambedue, e da A le Aq, Ar parallele ed eguali a TQ, TR unendo qr, eguale anch' essa e parallela a QR (L. 438). L'aberrazion lineare Ar = RT si risolverà dunque in Aq, qr (= TQ, QR) (99) ed Aq esprimerà lo scostamento o avvicinamento di A al piano verticale ESA, mentre qr (= QR) esprime la depressione di A verso il piano ERC. Fatto ora come sopra (460) EST $= e$, SE = ST $= r$, i due triangoli simili TSH, TRQ daranno QR $= m$ sen e, TQ $=$ m cos e; quindi si avranno le quantità angolari di aberrazione in qr, Aq: poichè 1°. dalla retta qr avrò *l' aberrazione di latitudine* $= qr$ sen l (461. 4°.) $= m$ sen e sen l:

54
2ª.

54 2°. considerata la retta Aq come un piccol arco di cer-
2ª. chio massimo che sia base d' un triangolo sferico, il cui vertice è nel polo P della sfera, l'angolo in P o sia l'arco che gli corrisponde sul piano ETC (L. 677) sarà $\frac{Aq}{\cos l}$ (L. 698) $= \frac{m \cos e}{\cos l}$ *aberrazione di longitudine*, che sarà positiva finchè $e < 90°$, oppure $> 270°$, e negativa per il rimanente del circolo.

Fatto $\frac{m \cos e}{\cos l} = x$ ed $m \operatorname{sen} l \operatorname{sen} e = y$ si avrebbe la stessa equazione all'ellisse, che si trovò per la parallasse (460).

Che se A non sia immobile, nè la sua distanza infinita, l'occhio attribuirà all'oggetto la differenza o la somma dei moti dell'oggetto e di se stesso, secondochè le lor direzioni son cospiranti o contrarie (459). Contuttociò per aver l'effetto dell'aberrazione, si supporrà l'oggetto immobile, trasferendo tutto il moto relativo nel solo occhio; quindi chiamato m questo moto corrispondente ad un dato tempo, per esempio a 24^{or}, espresso in minuti primi, e sapendosi dalle osservazioni astronomiche che la luce viene dal sole a noi in $8' 7'' = 487''$, si dirà 1°. la distanza media dal Sole a noi ($= r = 1$): alla distanza d dell'oggetto (calcolata in parti del raggio r) :: $487'' : \frac{487 \times d}{r} = 487d$, tempo (in secondi) che impiega la luce nello spazio d: 2°. 24^{or} ($= 1440'$) : m :: $487d$: $\frac{487 . d . m}{1440}$, espressione in secondi dell'aberrazione dell'oggetto, che chiamata a, darà $La = Ld + Lm + 9,5291665$.

463. L'ultimo effetto del moto rettilineo della luce son l'*ombre*. Infatti propagandosi i raggi lucidi in linea retta, e l'opacità dei corpi essendo per quelli un ostacolo (440), gli intervalli che al di là del corpo opaco corrispondono alla direzione dei raggi impediti, resteranno privi di luce e quindi occupati dall'ombra (433), la quale perciò si moverà sempre contrariamente al moto del corpo lucido, e sarà tanto più forte, quanto è più viva la luce che ne rischiara le vicinanze: onde quanti saranno i corpi lucidi dalla parte medesima del corpo opaco,

tante ombre differenti gli si vedranno all' intorno, delle quali la più sensibile sarà necessariamente verso il suo piede ove non giunge alcun raggio.

Segue da ciò che un corpo lucido di un qualunque anche piccolo diametro IN, potendosi riguardare come un aggregato di molti lumi, oltre l'*ombra vera* AB prodotta dietro al corpo opaco AH e terminata dal raggio estremo superiore IHB, genera una diminuzion di luce o *penombra* BL contigua all' ombra vera AB, e terminata dall' estremo raggio inferiore NHL; poichè in L cominciandosi a perdere i raggi N e continuando la perdita fino in B ove tutti mancano, è chiaro che scema la luce, e cresce perciò la penombra da L a B. 54 1ª.

464. Per determinar primieramente le proprietà dell'ombra $AB = x$, sia $AH = h$ l' altezza del corpo opaco, ed $ABH = a$ l' angolo o *altezza apparente del lembo* superiore I del corpo lucido, e supposta AB orizzontale ed AH verticale, si avrà al solito $x = h \cot a = \frac{h}{tang\, a}$.

Onde 1°. se $a = 45°$, sarà $tang\, a = 1$, ed $x = h$; cioè se l' altezza apparente del corpo lucido faccia un angolo semiretto, la lunghezza dell' ombra eguaglierà l'altezza del corpo opaco: 2°. per un' altra altezza a' del lembo I, avremo un' altr' ombra $x' = \frac{h}{tang\, a'}$, ed $x : x' :: tang\, a' : tang\, a$, cioè le lunghezze dell'ombra d' uno stesso corpo opaco sono in ragione inversa delle tangenti dell'altezza apparente del lembo superiore I: 3°. poichè scemando l' angolo a scema anche la sua tangente (L. 611), e perciò cresce il valor di $\frac{h}{tang\, a}$ (L. 48), l' ombra si aumenterà non solo per l' aumento di h, ma anche per la diminuzione dell' altezza apparente ABH del lembo superiore I, e reciprocamente: 4°. poichè $HA : AB :: h : \frac{h}{tang\, a} :: tang\, a : 1 :: sen\, a : cos\, a$ (L. 610) *l' altezza del corpo opaco alla lunghezza dell' ombra sarà come il seno dell' altezza del corpo lucido al suo coseno*.

465. Ma oltre l' ombra AB gettata sopra un piano orizzontale dal corpo verticale AH la quale dicesi *ombra retta*, si può anche considerar *l' ombra versa* FH che

54 la lunghezza orizzontale del corpo opaco FP getta sopra
1ª. un piano verticale FA; dunque 1°. se uno stesso punto lucido I produca le due ombre FH, AB, i triangoli simili PFH, BAH ci daranno HF : FP :: HA : AB :: $sen\ a : cos\ a$ (464) cioè *l'ombra versa alla lunghezza del corpo opaco sta come il seno dell'altezza del corpo lucido al suo coseno:* 2°. perciò se sia $sen\ a = cos\ a$, ovvero $tang\ a = 1$, onde $a = 45°$, si avrà HF = FP, cioè qualora l'altezza del corpo lucido sia $= 45°$, anche l'ombra versa eguaglierà, come la retta (464), la lunghezza del suo corpo opaco: 3°. e se il corpo opaco PF eguagli l'altro HA, l'altezza dell'opaco HA sarà media proporzionale tralle sue ombre retta e versa: 4°. Perciò supposta PF = HA, sarà $AB = \frac{HA\ cos\ a}{sen\ a}$, $FH = \frac{PF\ sen\ a}{cos\ a}$, ed $AB : FH :: cos^2 a : sen^2 a$, cioè *l'ombra retta starà alla versa in ragion duplicata del coseno al seno dell'altezza del corpo lucido* IN.

466. Quanto alla penombra BL, sia come sopra AH $= h$, ABH $= a$, ed inoltre ALH $= b$ e BHL $= a - b$ (L. 425) $= c$; si avrà dunque AL $= h\ cot\ b$, onde BL $=$ AL $-$ AB $= h\,(cot\ b - cot\ a) = \frac{h\ sen\,(a-b)}{sen\ a\ sen\ b}$ (L. 620) $= \frac{h\ sen\ c}{sen\ a\ sen\ b}$: ma questo rotto è tanto più grande, quanto è minore o l'angolo $a =$ ABH, o l'angolo $b =$ ALH, e quanto è maggiore o l'altezza del corpo opaco $h =$ AH, o l'angolo $c =$ BHL, misura del diametro apparente IN dell'oggetto lucido; dunque *la penombra sarà tanto più estesa, quanto è più alto il corpo opaco* AH, *quanto è più vasto o più vicino il corpo lucido* IN, *e quanto è meno elevato sull'orizzonte*.

467. Siano infine IKN, CVD i circoli massimi di due globi, l'uno opaco e l'altro lucido con le comuni tangenti CI, DN; e poichè il moto della luce è rettilineo, e CI, DN cadono interamente fuori dei circoli (L. 410), niun raggio che parta di là da C, D potrà incontrare il globo opaco IKN: cosicchè la parte illuminante CVD e l'illuminata IKN son determinate dalle tangenti CI, DN. Condotta dunque MG per i centri dei globi ed ME parallela

ad

ad IC, MG dividerà in mezzo gli archi IKN, CVD, onde basterà esaminare i soli archi IK, CV. Sia la distanza dei centri $MG = d$, il raggio del globo lucido $GC = l$, dell'opaco o tenebroso $MI = t$ e l'angolo $IMK = x$; sarà $GE = l - t$, e l'angolo $CGV = 180^\circ - x$ (L. 414), onde (L. 649) $MG = d = \frac{l - t}{\cos(180^\circ - x)}$, cioè (L. 618) $d = \frac{l - t}{-\cos x}$, $\cos x = \frac{t - l}{d}$, e $\operatorname{sen} x = \sqrt{(1 - (\frac{t - l}{d})^2)}$.

468. Dunque 1°. se $t > l$, $\cos x$ sarà positivo e quindi (L. 611) x (= IMK) $< 90^\circ$ e $180^\circ - x$ (= CGV) $> 90^\circ$, cioè per illuminare men della metà dell'opaco vi vorrà più della metà del lucido: se $t = l$, $\cos x = \frac{0}{d} = 0$, onde (L. 611) $x = 90^\circ$, e $180^\circ - x = 90^\circ$, cioè per illuminar la metà dell'opaco basterà la metà del lucido: e se $t < l$, $\cos x$ sarà negativo, e quindi (L. 611) $x > 90^\circ$, e $180^\circ - x < 90^\circ$, cioè per illuminare più della metà dell'opaco basterà men della metà del lucido.

469. Dunque 2°. poichè $\frac{t - l}{d}$ è tanto più grande quanto d è più piccolo e reciprocamente (L. 48), se scemi la distanza GM e sia $t > l$, crescerà $\cos x$ positivo, scemerà x, e crescerà $180^\circ - x$, cioè vi vorrà una parte del globo lucido sempre più grande per illuminare una parte dell'opaco sempre più piccola; che se sia $t < l$, crescerà $\cos x$ negativo, crescerà x e scemerà $180^\circ - x$, cioè una parte del lucido sempre più piccola basterà per illuminare una parte dell'opaco sempre più grande. Quando cresca la distanza GM, avverrà tutto all'opposto.

470. Dunque 3. poichè quando $t > l$ si ha $x < 90^\circ$ (468), sarà IMH $> 90^\circ$, ed IMH + MIH $> 180^\circ$; dunque le rette MH, IH divergeranno e l'ombra del globo opaco, determinata dalle tangenti CI, DN, avrà la forma d'un cono troncato inverso; se $t = l$ sarà IMH + MIH $= 180^\circ$, e le rette MH, IH saranno parallele (L. 414), onde l'ombra avrà la forma d'un cilindro; e se $t < l$, sarà IMH + MIH $< 180^\circ$, e le rette MH, IH convergeranno, onde l'ombra avrà la forma d'un cono:

471. Dunque 4°. poichè in quest'ultimo caso CE (t):

54 EG $(l-t)::$ HM : MG (d), sarà la lunghezza del co-
1ª. no ombroso $HM=\frac{dt}{l-t}$.

472. Condotta CMT, se sia l'angolo $MCI=p$ e GMC (semidiametro apparente del corpo lucido) $=r$, l'angolo CHD del cono ombroso sarà $=2CHG=$ (L. 425) $2(r-p)$: onde se cerchisi la semisezione QZ del cono per un punto Q di nota distanza $MQ=h$, e sia $MI=g$, $MQI=p'$, sarà $sen\,p'=\frac{g}{h}$ (L. 642), e $QMZ=z$, semidiametro cercato, sarà $=MQC-GHC=p'+p-r$. Se si volesse la sezione in Q', date le stesse denominazioni, si avrebbe $z'=Q'MG=MQ'H+Q'HG=p'-p+r$. Infine se si supponga osservato da H il corpo DVC, il suo diametro vero sarà all'apparente :: GC : CO :: 1 : cos GCO :: 1 : cos GHC ($=cos(r-p)$) semidiametro apparente angolare.

Luce Riflessa.

52 473. Sia Pp la densità della luce allorchè penetra il primo strato DC del mezzo uniforme DA; sia Cc la sua densità quando penetra l'altro strato EB ec., e poichè queste ordinate decrescono in progressione geometrica (444), la curva *pcba* che passa per le loro estremità sarà una logaritmica (L. 788) in cui posto il modulo o la suttangente $=A$, la densità nota $Pp=b$, l'ascissa corrispondente $AP=c$, la densità ignota $Cc=y$, la corrispondente ascissa $AC=c-x$, si avrà la grossezza degli strati eguali $PC=x$, e per la natura della curva (L. 788) $c=Alb$, e $c-x=Aly$, dalle quali equazioni viene A $=\frac{x}{lb-ly}$, e $ly=lb-\frac{x}{A}$. Quindi benchè l'asintoto PA ci dimostri che l'ordinate o densità Bb, Aa ec. non son ridotte a zero fuorchè nell'infinito (L. 735), e che perciò non si dà corpo alcuno assolutamente opaco, nondimeno crescendo il numero degli strati DC, EB ec., l'ordinate o densità s'impiccoliscon tanto, che i raggi divengon ben presto insensibili e il mezzo perde ogni carattere di trasparenza. Sapendosi in fatti che 16 laminette di vetro la cui grossezza totale era di 9^{lin}, 5, non dettero adito

che ad $\frac{1}{240}$ di luce, mentre 80 simili laminette con una grossezza di $47^{lin}, 5$ produssero una perfetta opacità, se nella formula $A = \frac{x}{lb - ly}$ si ponga $Pp = b = 240$, $Cc = y = 1$, $PC = x = 9,5$, si avrà $A = \frac{9,5}{l240} = \frac{9,5}{5,4\,06389}$ (per esser quì iperbolico il logaritmo) $= 1,7333$; e se nell'altra formula $ly = lb - \frac{x}{A}$ si faccia $x = 47,5$, avremo $ly = l240 - \frac{47,5}{A} = l240 - 5l240 = -4l240 = -l240^4 = l\frac{1}{240^4}$, onde $y = \frac{1}{240^4} = 0,000\,000\,000\,301$; perciò quando l'ordinata o densità sarà ridotta ad $y = \frac{301}{1000000000000}$, il corpo si potrà chiamare opaco, e il raggio HD non potendo vincer l'ostacolo, sarà costretto per la più gran parte a riflettersi; dal che potremo inferire che *non vi è riflessione disgiunta da refrazione, nè refrazione separata da riflessione*. Intanto dobbiam distinguer due classi di corpi opachi: gli uni hanno le superficie ineguali e mal pulite, come gli alberi, le muraglie, i monti ec.; gli altri le hanno levigate ed eguali, come i cristalli, i metalli bruniti ec. I primi rigettando i raggi d'un oggetto luminoso o illuminato, gli dividono, gli sparpagliano e gli riflettono in tutte le direzioni: onde guastate e disperse dalla riflessione irregolare l'immagini degli oggetti, giunge all'occhio la sola immagine del corpo opaco. All'incontro i secondi respingendo quei raggi con l'ordine e con la mescolanza stessa che ebbero nel partir dall'oggetto, non solo dipingono nell'occhio se stessi, ma conservano anche alle immagini degli altri oggetti la loro essenza, inviandole all'occhio ora con le dimensioni naturali, ora con qualche aumento o diminuzione, ed ora con delle bizzarre ma sempre uniformi e sempre ordinate trasformazioni. La teoria della luce riflessa non ha luogo che nella seconda classe dei corpi opachi.

50

474. Dato per tanto uno specchio concavo qualunque MO e nel suo asse ΦO un corpo lucido Φ, è facile di assegnare nell'asse medesimo il punto o *fuoco f* ove la riunione dei raggi riflessi produce l'immagine dell'oggetto. Poichè

55

55 se sia ΦM un raggio incidente vicinissimo a ΦO, condotta Mf al fuoco cercato f e alzata da M la normale o raggio MC di curvatura (L. 867. 868), la piccolezza dell'arco MO darà $\Phi O = y = \Phi M$, $CO = r = CM$, $fO = x = fM$, onde $\Phi C = y - r$ e $Cf = r - x$; ma per essere MC normale in M, l'angolo d'incidenza ΦMC deve eguagliare l'angolo di riflessione fMC (440); dunque (L. 471) ΦC $(y - r)$: Cf $(r - x)$ :: ΦM (y) : Mf (x) e la *lunghezza focale* $fO =$

$x = \frac{ry}{2y - r}$, formula generale che determina le proprietà

tutte del fuoco in uno specchio qualunque o piano o concavo o convesso come tra poco dimostreremo.

475. Si osservi frattanto 1°. che $\Phi O = y$, $CO = r$, $fO = x$ son sempre in proporzione armonica, cioè $y : x :: y - r : r - x$, il che è evidente: 2°. che nascendo la formula dalle supposizioni di $\Phi O = \Phi M$, $CO = CM$, $fO = fM$, i soli raggi incidenti ΦM vicinissimi a ΦO costituiscono negli specchi curvilinei il fuoco f; gli altri taglian l'asse in punti tanto più distanti da f quanto M è più remoto da O, cosicchè non è possibile che uno specchio di questa specie rifletta in un sol punto f tutti i raggi venuti in esso da un punto qualunque indeterminato Φ; per altro la densità della luce essendo estremamente più grande in f che altrove, il fuoco f dei raggi che cadono quasi normalmente sulla superficie MO, può considerarsi come un vero punto fisico ove si forma la distinta immagine dell'oggetto Φ: 3°. che trovandosi il fuoco f nei soli assi ΦO, l'immagine d'un oggetto Φ è sempre in una retta che passa per Φ e per il centro C, onde un occhio che voglia vedersi, diverrà egli medesimo l'oggetto lucido Φ e non otterrà l'intento se il suo raggio visuale non passi per il centro C.

476. Ciò supposto, esaminiamo primieramente le proprietà degli specchi piani. Poichè le curvature sono in ragione inversa dei loro raggi (L. 510), la curvatura zero dello specchio piano avrà un raggio infinito, e perciò nella formula generale $x = \frac{ry}{2y - r}$ (474) bisognerà fare $r = \infty$,

il che dà la particolar formula per gli specchi piani $x =$

56 $\frac{\infty y}{2y - \infty} = \frac{\infty y}{-\infty} = -y$, cioè *la distanza* fG *dell'immagine* f *dallo specchio* MOG *è negativa ed eguale alla distanza*

ΦG *dell' oggetto Φ dallo specchio medesimo, onde quanto l' uno è al di quà di esso, tanto l'altra ne comparisce al di là.*

477. Dunque 1°. l'immagine *f* è nel prolungamento della normale ΦG condotta da Φ sullo specchio; poichè dovendosi trovar l' immagine in una retta che passa per Φ e per il centro dello specchio (475), questa retta sarà necessariamente la normale ΦG (L. 510): perciò ΦG, *f*G non solo sono eguali (476), ma formano anche una stessa retta Φ*f*.

478. Dunque 2°. *lo specchio piano riflette i raggi con la loro natural divergenza* (442); poichè il punto Φ dovendo vedersi non solo nella direzione EO dei raggi visuali, ma anche nel vertice *f* del cono lucido E*f* (447), ciascun raggio ΦO, a cagione di *f*G = ΦG (476, 477) eguaglierà il suo corrispondente *f*O (L. 438), ed il cono OΦ sarà simile ed eguale al cono O*f*, onde OE sarà non meno la continuazione di O*f* che di OΦ, e la riflessione non accrescerà nè diminuirà la divergenza dei raggi.

479 Dunque 3°. *l'immagine è simile ed eguale all'oggetto;* poichè conservandosi nella riflessione la natural divergenza dei raggi (478), l'angolo ottico formato in E dai raggi estremi dell'immagine *f*B, eguaglia l'angolo ottico che farebbero in *e* i raggi estremi dell' oggetto ΦB, onde *f*B = ΦB (449).

480. Dunque 4°. essendo ΦG = *f*G (476), ΦB = *f*B (479) e gli angoli in G retti (477), sarà anche ΦBG = *f*BG (L. 438), cioè l'angolo ΦB*f* fatto dall'oggetto ΦB e dall'immagine *f*B, è sempre doppio dell'angolo ΦBG fatto dall'oggetto ΦB e dallo specchio MG; onde se collocato lo specchio orizzontalmente, l'oggetto sia verticale, sarà ΦBG = 90° e ΦB*f* = 180°, cioè l'immagine sarà diametralmente opposta all'oggetto; se lo specchio s'inclini finchè sia ΦBG = 45°, sarà ΦB*f* = 90°, cioè l'immagine dell'oggetto verticale comparirà orizzontale; e se lo specchio s'alzi interamente onde divenga parallelo all'oggetto, sarà ΦBG = 0°. e ΦB*f* = 2 × 0° = 0, cioè anche l'immagine gli diverrà parallela.

481. Dunque 5°. il moto dell'immagine è sempre doppio del moto dello specchio; poichè se dal parallelismo ove ΦBG = 0° e ΦB*f* = 0° (480), passi lo specchio ad un'inclinazione ΦBG = 45°, si troverà ΦB*f* = 90° (480), onde

56 mentre lo specchio da 0° scende a 45°, l'immagine corre da 0° a 90°; e se dai 45° passi lo specchio ai 90°, si trova $\Phi Bf = 180°$ (480), onde mentre lo specchio da 0° va a 90°, l'immagine va da 0° a 180° ec.

482. Dunque 6°. se da un punto qualunque P dell'oggetto CD, parallelo allo specchio, si conducano i raggi Pc, Pd all'estremità dell'immagine, sarà NM la porzion dello specchio occupata da lei : ma NM : cd : : PN : Pc (L. 467) e $PN = Nc$ (476) $= \frac{Pc}{2}$; dunque anche $NM = \frac{cd}{2} = \frac{CD}{2}$ (479), cioè l'immagine occupa una porzion di specchio eguale per tutti i lati alla metà dell'oggetto; onde niuno potrà vedersi intieramente in uno specchio parallelo, o vi si avvicini o se ne allontani, quando lo specchio non abbia almeno la metà delle sue dimensioni, perchè anche l'immagine vi si avvicina o se ne allontana egualmente (476).

57 483. Dunque 7°. posto l'occhio I e l'oggetto O nell'angolo ABC dei due specchi AB, BC, e condotta da O a BC la normale OD onde sia $OE = FD$, l'occhio I vedrà primieramente l'oggetto in D; poichè se da I si conduca la retta ID, e da F ove ella incontra lo specchio, la retta OF, sarà l'angolo $OFE = DFE = IFB$ e perciò anche l'angolo d'incidenza OFZ eguale a quello di riflessione IFZ; similmente se dall'immagine D che ora diventa oggetto, si conduca all'altro specchio BA la normale DH onde $DG = GH$, l'occhio I per la stessa ragione vedrà nuovamente in H l'oggetto O; così se da H si conduca a BC (prolungata occorrendo) la normale HL onde $HM = LM$, lo vedrà nuovamente in L, e se da L ad AB prolungata si conduca la normale LR onde $LQ = QR$, lo vedrà per la quarta volta in R ec. e non cesserà di vederlo finchè l'una o l'altra delle due rette RI, LI condotte dall'immagine all'occhio, non tagli lo specchio fuor dell'angolo ABC, come è chiaro. E giacchè l'oggetto O si dipinge egualmente e in D nello specchio BC, ed in K nello specchio BA, nascerà dall'immagine K una nuova serie d'immagini, simile a quella che nasce dall'immagine D.

484. Dal che si raccoglie 1°. che essendo per esempio $IR = IN + NR$, $NR = NL = NS + SL$, $SL = SH = ST + TH$, $TH = TD = TV + VD$, $VD = VO$, e quindi $IR = OV + VT + TS + SN + NI$, la distanza d'un'immagine qualunque R dall'occhio I eguaglia la somma dei

raggi incidente e riflessi per cui è veduta : 2°. che perciò l'immagine è tanto più lontana quanto più si moltiplica, è attesa la decrescente densità della luce (443), è tanto più languida quanto più lontana : 3°. che crescendo l'angolo ABC, scema il numero delle immagini; perchè gli angoli EDH, DHL ec. fatti dalle normali OD, DH, HL ec. eguagliando l'angolo ABC (L. 435), al crescer di questo cresce anche la distanza di quelle tra loro, e si giunge più presto a quella retta che tagliando lo specchio fuor dell'angolo ABC, dà fine alle immagini (483) : 4°. che se gli specchi son paralleli, il numero delle immagini, l'une però sempre men vive dell'altre, è infinito, perchè tutte si formano in una stessa normale OD prolungata indefinitamente. 57

485. Passo agli specchi concavi e convessi. Già per i concavi si trovò la formula $x = \frac{ry}{2y - r}$ (474) che facilmente si adatta ai convessi sol che si faccia r negativa, giacchè in questi il raggio di curvatura è nella parte opposta al raggio incidente Φ'O : si avrà dunque $x = \frac{-yr}{2y + r}$, e la formula generale per gli specchi concavi e convessi sarà $x = \frac{\pm ry}{2y \mp r}$, cioè nei concavi il fuoco o immagine f può essere al di quà o al di là dello specchio, secondo che $2y$ e maggiore o minor di r: ma nei convessi, qualunque sia il valor di $2y$, si avrà sempre x negativa, e il fuoco o immagine f sarà sempre al di là dello specchio. 55

486. E quì una volta per sempre si osservi che il fuoco nè in uno specchio MO nè in una lente BI (*fig* 63) può mai esser *reale* quando si trova nell' uno dalla parte opposta, nell'altra dalla parte medesima del punto lucido Φ: poichè i raggi per andare al fuoco dovrebbero o attraversar lo specchio ad onta della sua opacità, e non si avrebbe più riflessione; o non attraversar la lente ad onta della sua trasparenza, e non si avrebbe più refrazione. Il fuoco in questo caso è dunque *virtuale* o *immaginario*, cioè i raggi o riflettendosi nello specchio o rifrangendosi nella lente divergono in guisa, che prolungati si riunirebbero in quel fuoco, e l'occhio ricevendogli così divergenti, gli riferisce a quel punto (447).

487. Dunque 1°. fatto $y = \infty$, ovvero supposto che il punto raggiante Φ o Φ' sia infinitamente lontano dallo spec-

55 chio onde i raggi ΦO, ΦM, Φ'O, Φ'M cadano sensibilmente paralleli sopra di lui (L. 510), si avrà $FO = x = \frac{\pm \infty r}{2\infty \mp r}$ $= \frac{\pm \infty r}{2\infty} = \frac{\pm r}{2} = CF$, cioè *la distanza dell'immagine dallo specchio o concavo o convesso eguaglia la metà del raggio osculatore*. Pertanto in un circolo o sfera, ove questo raggio $r = n$ (L. 872), il fuoco dei raggi paralleli è distante dal vertice della metà della normale o semiasse della sfera medesima; in una parabola o conoide parabolico, ove $r = \frac{p}{2}$ (L. 872), il fuoco è distante dal vertice d'un quarto del parametro (L. 746); e nel modo stesso, trovato il raggio osculatore, si determinerebbe il fuoco in ogni altra curva. Ma si noti la differenza considerabile tra l'altre curve e la parabola: in quelle, pochissimi sono i raggi paralleli che si riuniscano in un sol punto F (475), in questa son tutti (L. 750); onde gli specchi parabolici sarebbero i più atti a riflettere i raggi paralleli o del Sole o d'un oggetto lucido distante almeno di 180 tese (442), se la difficoltà di fabbricarli con esattezza, non avesse data la preferenza agli sferici, dei quali soli perciò intendiamo di parlare in seguito.

Il fuoco F prodotto dai raggi paralleli dicesi *fuoco principale*; e la distanza FO del fuoco principale F dal vertice O dello specchio, chiamasi *lunghezza focale principale*.

488. Dunque 2°. se $y = \frac{1}{\infty}$ ovvero supposto che Φ o Φ' sia infinitamente vicino allo specchio, si avrà $x = \frac{\pm r}{\infty\left(\frac{2}{\infty} \mp r\right)}$ $= \frac{\pm r}{2 \mp \infty r} = \frac{-1}{\infty}$, cioè l'immagine f sarà sulla superficie stessa dello specchio MO, nel concavo in certo modo sulla convessa, e nel convesso sulla concava.

489. Quindi se la distanza dell'oggetto si esprima in parti del raggio r, e si faccia $y = mr$, avremo per gli specchi concavi $x = \frac{m r}{2m - 1}$; onde 1°. se $m < \frac{1}{2}$, sarà $2m < 1$ ed x negativa, cioè il fuoco sarà dalla parte opposta, lungo OΦ',

go $O\Phi'$, allontanandosi dallo specchio al crescer di m; 2°. se $m=\frac{1}{2}$, si avrà $2m=1$ ed $x=\infty$, onde posto l'oggetto nel fuoco principale F, i raggi riflessi son paralleli; 3°. se $m>\frac{1}{2}$, sarà $2m>1$ ed x positiva: ove si osservi che m può esser <1, $=1$, e >1; perciò quando $m<1$ (cioè l'oggetto è discosto più della metà del raggio, ma meno del raggio intero) $m-1$ è quantità negativa, e quindi $2m-1$ $(=m+m-1)<m$, ed $x\left(=\frac{mr}{2m-1}\right)>\frac{mr}{m}$ (L. 48) onde $x>r$; quando $m=1$ (cioè l'oggetto è nel centro) $x=r$; e quando $m>1$ (cioè l'oggetto è più lontano del centro) $m-1$ è quantità positiva e $2m-1$ $(=m+m-1)>m$, onde x $\left(=\frac{mr}{2m-1}\right)<\frac{mr}{m}$ e $>\frac{mr}{2m}$ (L. 48), cioè $<r$ e $>\frac{r}{2}$, e il fuoco sarà sempre tra F e C; 4°. finalmente se $m=\infty$, $x=\frac{r}{2}$ come si sapeva (487).

490. La stessa supposizione darà negli specchi convessi $x=\frac{-mr}{2m+1}=\frac{-r}{2+\frac{1}{m}}$, onde qualunque valore abbia m, x è sempre negativa, e il fuoco dei raggi che partono da Φ', è nella parte interna cioè immaginario (486.); quindi 1°. se $m<\frac{1}{2}$, sarà $\frac{1}{m}>2$, e $2+\frac{1}{m}>4$, onde (non attendendo più al segno) $x<\frac{r}{4}$ (L. 48); 2°. se $m=\frac{1}{2}$, sarà $2m=1$ ed $x=\frac{r}{4}$; 3°. se $m>\frac{1}{2}$, sarà $\frac{1}{m}<2$, e $2+\frac{1}{m}$ <4, onde $x>\frac{r}{4}$; ove essendo $m=1$, si ha $x=\frac{r}{3}$; ed essendo $m>1$, cioè $\frac{1}{m}<1$ (e perciò $2+\frac{1}{m}<3$ e >2), viene $x>\frac{r}{3}$ e $<\frac{r}{2}$; 4°. infine se $m=\infty$, si ha $x=\frac{r}{2}$ come sopra (487).

55 491 Dal che generalmente si vede che negli specchi concavi, scostandosi l'oggetto Φ dallo specchio d'un solo semiraggio OF, l'immagine f se ne allontana per la parte opposta (485) da zero fino all'infinito (488. 489.); continuando a scostarsi l'oggetto Φ d'un altro semiraggio FC, l'immagine f torna dall'infinito, e per la parte stessa si accosta allo specchio fino al centro C (489): e se lo scostamento dell'oggetto Φ prosegue al di là del centro, l'immagine f scende da C verso F, e non vi giunge che quando ne è infinitamente distante. Ma negli specchi convessi, se l'oggetto Φ' si scosti delle medesime quantità dallo specchio, l'immagine f sempre dalla parte opposta (485) primieramente se ne allontana da zero (488) fino al quarto del raggio (490), poi dal quarto fino al terzo, e infine dal terzo fino alla metà.

492. Se l'oggetto A sia fuori dell'asse ΦO ma in modo che A, B sieno egualmente distanti dallo specchio, condotto da A per il centro C l'asse AM, la sua immagine a darà $aM = x = \frac{\pm ry}{2y \mp r}$, $bO = x' = \frac{\pm r'y'}{2y' \mp r'}$ (485) ec.: ma $y = AM$, $y' = BO$ ec. perchè tutte queste linee passano per il centro C e appartengono agli assi degli specchi (474); di più $AM = BO$ per ipotesi e $CM = r = CO = r'$; dunque $x = x'$ ed $aM = bO$ ec., cioè anche le immagini a, b saranno egualmente distanti dallo specchio MO, il quale se sia concavo, mostrerà diritta l'immagine ab quando l'oggetto e l'immagine siano dalla stessa parte del centro C, e la mostrerà rovesciata se il centro C sia tra l'uno e l'altra, perchè le immagini dei punti A, B dovendo necessariamente passar per C (475), vi si segano e vanno nei punti opposti a, b. E' chiaro che questo raziocinio si applica rigorosamente a tutti i punti di AB se AB sia un arco concentrico allo specchio, e prossimamente se AB ne sia la corda; onde l'immagine ab è presso a poco simile all'oggetto AB, e per aver la posizione dell'intera immagine d'un oggetto, basta calcolar quella del suo punto b nell'asse. Ora i triangoli isosceli e simili ABC, abC danno $AB : ab :: CB : Cb :: BO \mp CO : CO - bO$, ovvero (fatto negativo il raggio negli specchi convessi (485)) $AB : ab :: y \mp r : \pm r - x :: y \pm r : \pm r \mp \frac{ry}{2y \mp r} :: y : \frac{\pm ry}{2y \mp r}$; dunque *le grandezze dell'oggetto e dell'im-*

magine stanno come le lor distanze y, $\frac{\pm ry}{2y \mp r}$ cioè y, x *dallo* *specchio*.

Gli Ottici più precisi dimostrano che l'immagine d'un oggetto rettilineo è una porzione or di parabola or d'ellisse or d'iperbola ed or di circolo: ciò per altro non interessa punto l'uso ordinario degli specchi.

493. Osserveremo per ultimo che fin quì abbiam sempre supposti divergenti i raggi ΦO, ΦM: ma qualora o per natura o per arte ΦO, DM, Φ'O, D'M fossero convergenti, è chiaro che ΦO, DM e Φ'O, D'M posson considerarsi nello specchio concavo come venuti da Φ' e nel convesso da C ove anderebbero a riunirsi; onde poichè Φ', C son dalla parte opposta l'uno alla concavità, l'altro alla convessità, nella formula $x = \frac{\pm ry}{2y \mp r}$ (485) bisogna far negativa y, e si avrà la lunghezza facale $x = \frac{\mp ry}{-2y \mp r} = \frac{ry}{r \pm 2y}$, nuova formula per i raggi convergenti, dalla quale potranno dedursi delle conseguenze simili a quelle che dalla prima si son dedotte.

55

494. Osserveremo ancora, che oltre gli specchi piani e sferici, ve ne sono dei prismatici, dei piramidali, dei cilindrici e dei conici: gli uni son composti di più specchi piani o verticali o inclinati; gli altri partecipano dei piani nella loro altezza e degli sferici nella lor larghezza; onde l'immagine d'un oggetto verticalmente presentato ad uno specchio cilindrico verticale, sarà esatta riguardo alle dimensioni verticali (480) e sarà deformata riguardo all'orizzontali (492). Vi son dei metodi pratici, dipendenti dalle regole di Prospettiva, per delineare in un piano delle figure deformi le cui immagini compariscano regolari in uno specchio conico o cilindrico, ma non ci fermeremo in queste ricerche di sola curiosità.

495. Aggiungiamo piuttosto qualche cosa intorno agli *specchi ustorj*, così detti perchè riunendo i raggi ardenti del Sole verso il fuoco principale F, vi sveglian la fiamma, vi liquefanno i metalli, vi calcinan le pietre ec.; e poichè i soli specchi concavi son capaci di tali effetti, mentre essi soli fanno convergere e riducono in un fuoco reale F i raggi paralleli (485), che gli specchi convessi cangiano in di-

58

58 vergenti, sia lo specchio concavo QOI col raggio PQ parallelo all' asse ed ultimo di tutti quelli ch' ei può ricevere: si sa che questo, se sia assai lontano dall' asse ΦO, non anderà al fuoco principale F (475), ma a qualche punto inferiore f di cui si avrà la posizione se si determini qual parte del raggio CO è la retta Ff occupata dai raggi riflessi di tutto lo specchio QOI. Condotto pertanto il raggio o normale $QC = CO = 1$, e posto l'angolo d'incidenza $PQC = CQf$ (440) $= fCQ$ (L. 414) $= i$, si avrà $fC = \frac{sen\, i}{sen\, 2i}$ (L. 656) $= \frac{sen\, i}{2\, sen\, i\, cos\, i}$ (L. 621. 26ª) $= \frac{1}{2\, cos\, i}$, e quindi $Ff = fC - CF = \frac{1}{2\, cos\, i} - \frac{1}{2}$ (487) $= \frac{1 - cos\, i}{2\, cos\, i} = \frac{sen^2 \frac{1}{2} i}{cos\, i}$ (L. 622. 32ª); onde calcolando questo rotto, sarà nota in parti del raggio $CO = 1$ la cercata Ef; così se $i = 60°$, sarà (L. 613) $Ff = \frac{1}{2}$, cioè il raggio riflesso Qf caderà in O; se $i = 10'', = 20'', = 30'' \ldots\ldots = 90''$, sarà $Ff = 0$, cioè il raggio riflesso caderà in F come già si sapeva (475); e se $i = 3°$, verrà $\frac{sen^2 \frac{1}{2} i}{cos\, i} = 0,000686 = \frac{1}{1458}$, cioè $Ff = \frac{1}{4458}$ ec.; di modo che più piccola sarà l' ampiezza o apertura dello specchio, dalla quale Ff dipende, più grande sarà la condensazione dei raggi. Ma siccome per l' opposto col diminuirsi lo specchio, scema il numero dei raggi riflessi, e perciò anche la loro attività, determiniamo ora fino a qual segno debba estendersi uno specchio sferico onde se ne abbia il massimo effetto possibile.

496. Sieno ΦO, DB i raggi che partono dalle due estremità o *lembi* Φ, D del diametro del Sole; dunque l'immagine dell' una e dell' altra passerà per C (475), l' angolo $\Phi CD = OCB$ misurerà il diametro apparente del Sole (451) l' immagine di Φ sarà in F (486), di D in A, ed FA parallela alla corda OB sarà l' immagine del diametro (492). Ora gli effetti dello specchio ustorio sono evidentemente prodotti dall' immagine del Sole ristretta intorno ad AF; onde come tutti i raggi che cadono tra A ed F accrescono questi effetti, così tutti gli altri che passano di là da quei punti, sono inutili; la questione è dunque ridotta a trovar l' angolo $CQA = QCO$

FIG. 5

$= i$ (495) fatto dal raggio CQ dello specchio e dall' estremo raggio utile QA, ovvero l' angolo $AfF = 2i$ (L.425). È noto che il diametro apparente del Sole è di $32'$ in circa; dunque $OCB = 32'$, e poichè $OC : CF :: OB : FA$ ed $\frac{OC}{2} = CF$ (486), sarà $FA = \frac{OB}{2} = sen\,16'$, immaginando sopra OB un raggio normale (L. 644). Quindi preso per rettangolare il triangolo AFf, giacchè il suo angolo $AFf = 90°, 16'$ (L. 401.424), avremo $FA = sen\,16'$, $Ff = \frac{sen^2 \frac{1}{2} i}{cos\, i}$ (495); onde $tang\ AfF = tang\, 2i \left(= \frac{sen\, 2i}{cos\, 2i}\right) = \frac{sen\, 16' cos\, i}{sen^2 \frac{1}{2} i}$ (L. 646); quindi $sen\, 16' = \frac{sen\, 2i\, sen^2 \frac{1}{2} i}{cos\, i\, cos\, 2i} = \frac{2\, sen\, i\, sen^2 \frac{1}{2} i}{cos\, 2i}$ (L. 621.261), equazione che risoluta col metodo delle false posizioni darà $i = 11°, 45'$ in circa (L. 665); onde poichè non pregiudica il dare allo specchio uno o due gradi di più di quelli che il calcolo assegna, potrà concludersi che *uno specchio sferico produrrà il massimo effetto possibile quando abbia un' ampiezza di 24° o di 25°*.

497. Pertanto tutti gli specchi di 25° avranno una forza eguale, qualunque sia il lor diametro; poichè se per una parte, quelli che lo hanno più piccolo come Q'O'I' ricevono un minor numero di raggi, per l'altra però essendo QI : Q'I' : : FA : F'A' (L. 508) gli riuniscono in uno spazio proporzionalmente più piccolo, e si sa che i raggi sono tanto più efficaci quanto più son condensati (443): nondimeno gli specchi maggiori avendo il fuoco ad una distanza più grande dalla superficie, posson produrre alcuni effetti che invano si aspetterebbero dai minori. Del resto gli effetti di due specchi qualunque, dipendendo dalle densità d, d' dei raggi che riuniscono, ed avendosi $d = \frac{m}{v}$, $d' = \frac{m'}{v'}$ (10), sarà $d : d' :: \frac{m}{v} : \frac{m'}{v'}$; ma le masse m, m' della luce sono espresse dai circoli di $QN = s$, $Q'N' = s'$, e i volumi v, v' dai circoli di $AF = f$, $A'F' = f'$ (496); dunque $d : d' :: \frac{s^2 \pi}{f^2 \pi}$:

FIG. 58 $\frac{s'^2\pi}{f'\cdot\pi}::\frac{s^2}{f^2}:\frac{s'^2}{f'^2}$; e poichè atteso l' angolo costante OCB (496), si ha sempre AF : FC : : A'F' : F'C, ovvero $f:f'::\frac{r}{2}:\frac{r'}{2}$ (487), sarà finalmente $d:d'::\frac{s^2}{\frac{1}{4}r^2}:\frac{s'^2}{\frac{1}{4}r'^2}$, cioè gli effetti degli specchi son proporzionali ai quadrati e delle loro ampiezze direttamente e delle loro lunghezze focali principali inversamente. Dal che si vede di nuovo e in generale, che gli effetti di due specchi simili qualunque son sempre eguali, mentre in tal caso $s:s'::r:r'$.

498. Mancando i raggi del Sole, possono aversi dei considerabili effetti anche coi comuni carboni accesi, sol che questi si collochino esattamente nel fuoco principale dello specchio; poichè se i raggi ardenti che allora si riflettòn paralleli (489), incontrino in giusta distanza un nuovo specchio, si renderanno al fuoco principale di lui (487) e vi incendieranno delle materie combustibili in proporzione della loro attività.

Luce refratta.

499. Stabilito una volta coll'esperienze più delicate e più certe che la ragion dei seni d'incidenza e di refrazione è costante (439), poco vi è voluto ad esprimerla con dei numeri in cui tutti gli Ottici son convenuti: così se il raggio passi dall'aria A nel vetro comune V, la ragion dei seni d' incidenza A *sen i* e di refrazione V *sen r* è di 31 : 20 ovvero di 3 : 2 prossimamente; se passi dall'aria A nel *Flint* o *Flintglass* F (è questo un celebre cristallo che si fabbrica in Inghilterra) la ragion dei seni A *sen i*, F *sen r* è incirca di 8 : 5; e se passi dall'aria A nell'acqua H, la ragion dei seni A *sen i*, H *sen r* è in circa di 4 : 3; reciprocamente è di 20 : 31, o di 5 : 8, o di 3 : 4 se passi dal vetro comune o dal flint o dall'acqua nell'aria, e questa reciprocazione si intenda quì avvertita una volta per sempre.

500. Dunque 1°. avendosi A *sen i* : V *sen r* : : 3 : 20, A *sen i* : F *sen r* : : 8 : 5 : : 31 : $\frac{155}{8}$, A *sen i* : H *sen r* : : 4 : 3 : : 31 : $\frac{93}{4}$, sarà V *sen r* ovvero (ciò che è lo stesso) V *sen i* : F *sen r* : : 20 : $\frac{155}{8}$: : 32 : 31, ed H *sen r* o H *sen i* : V *sen r* : : $\frac{93}{4}$:

20 : :93 : 80, cioè se il raggio passi dal vetro nel flint, la ragion dei seni sarà di 32 : 31, e se passi dall'acqua nel vetro, di 93 : 80 e reciprocamente.

501. Dunque 2°. se I, i sieno due angoli d'incidenza ed R, r i corrispondenti di refrazione, supposti due mezzi qualunque e la ragion dei seni $n:1$, si avrà $sen\, I : sen\, R :: n : 1 :: sen\, i : sen\, r$; onde se $I > i$, sarà anche $R > r$, cioè crescendo o scemando l'incidenza, cresce o scema anche la refrazione.

502. Dunque 3°. se i ed $i + di$ sieno due incidenze pochissimo differenti, ed r, $r + dr$ le corrispondenti refrazioni (501), avremo $sen\,(i + di) : sen\,(r + dr) :: n : 1 :: sen\, i : sen\, r$, cioè (L.614) $sen\, i \cos di + sen\, di \cos i : sen\, r \times \cos dr + sen\, dr \cos r$, ovvero (L. 617) $sen\, i + di \cos i : sen\, r + dr \cos r :: sen\, i : sen\, r$, e quindi permutando e sottraendo (L. 211) $di \cos i : sen\, i :: dr \cos r : sen\, r$, onde poi $di : dr :: \frac{sen\, i}{\cos i} : \frac{sen\, r}{\cos r} :: tang\, i : tang\, r$; onde se $tang\, i > tang\, r$, cioè se $i > r$, sarà anche $di > dr$; ma variando i di di ed r di dr, la deviazione δ varia di $d\delta$, e per la natura di quest'angolo (439) si ha $d\delta = di - dr$; dunque poichè $di > dr$ sarà $d\delta$ una quantità positiva, cioè crescendo o scemando l'incidenza, cresce o scema anche la deviazione (L. 833).

503. Dunque 4°. se un raggio di luce HD passi da uno in un altro mezzo uniforme IB terminato dalle superficie parallele IA, KB, chiamate i, i' la prima e seconda incidenza HDE, DCV, ed r, r' le corrispondenti refrazioni LDC, FCG, si avrà $sen\, i : sen\, r :: n : 1$ e $sen\, i' : sen\, r' :: 1 : n$ (499); ma $r = i'$ attese le parallele, e perciò $n\, sen\, r = n\, sen\, i'$; dunque anche $sen\, i = sen\, r'$ ed $i = HDE = r' = GCF$, cioè il raggio *emergente* CG è parallelo all'incidente HD. 59

504. Dunque 5°. se in un prisma triangolare IAK di vetro l'angolo $i = HDE$ sia piccolissimo, sarà $r = LDC$ ancor più piccolo (499. L. 573) onde la ragione dei due angoli non differirà sensibilmente da quella de' loro seni (L. 617) e si avrà (499) $i : r :: 3 : 2$, $r = \frac{2i}{3}$, la deviazione $BDC = \delta = i - r = \frac{i}{3}$, $ADC = 90° \mp \frac{2i}{3}$, e (fatto l'angolo *rifrangente* $A = a$) $ACD = 180° - a - ADC = 90° \pm \frac{2i}{3} - a$, ed $VCD = i' = 90° - ACD = a \mp \frac{2i}{3}$; 60 e 61

60 e 61

dunque se anche i' e perciò a da cui i' dipende (L. 514), sieno molto piccoli, nel passaggio dal vetro nell' aria si avrà $i' : r' :: 2 : 3$ (499), $r' = \frac{3i'}{2} = \frac{3a}{2} \mp i$ e la deviazione $MCG = \delta' = r' - i' = \frac{a}{2} \mp \frac{i}{3}$, ovvero essendo $\frac{i}{3}$ negligibile, $\delta' = \frac{a}{2}$: cioè 1°. la deviazione dopo le due refrazioni eguaglierà la metà in circa dell' angolo rifrangente: 2°. poichè $\delta' = \frac{a}{2}$, nello stesso prisma la deviazione δ è invariabile ancorchè varino l' incidenze i, i'; purchè sieno sempre assai piccole: 3°. in un altro prisma della stessa materia sarà del pari $\Delta' = \frac{A}{2}$ e perciò $\delta : \Delta' :: \frac{a}{2} : \frac{A}{2} :: a : A$; cioè le deviazioni son proporzionali agli angoli rifrangenti.

62]

505. Ma Nevvton ha scoperte nei prismi delle proprietà molto più singolari. Introdotto in una camera oscura e ricevuto sulla faccia IA del prisma e normalmente all' asse il raggio L, vedesi egli dopo le due refrazioni dilatarsi in uno spettro bislungo *rp* e dividersi in sette specie di raggi diversamente coloriti, cosicchè la prima specie, contando dai più bassi, forma la scala graduata del color *rosso* ed occupa 45 parti di tutta la lunghezza dello spettro diviso in 360, la seconda specie dà la scala del colore *aranciato* e ne occupa 27, la terza dà quella del *giallo* e ne occupa 48, la quarta dà quella del *verde* e ne occupa 60, la quinta dà quella del *celeste* e ne occupa parimente 60, la sesta dà quella del *turchino* e ne occupa 40, la settima ed ultima dà quella del *paonazzo* e ne occupa 80. Se il seno d'incidenza dentro al prisma sia comune a tutte le specie di raggi e si supponga diviso in 50 parti, si trova per esperienza (432) che uscendo i raggi dal prisma nell'aria, il seno di refrazione della scala dei *rossi* va dalle 77 fino alle $77\frac{1}{8}$ di quelle parti, della scala degli *aranciati* dalle $77\frac{1}{8}$ fino alle $77\frac{1}{5}$, dei *gialli* dalle $77\frac{1}{5}$ fino alle $77\frac{1}{3}$, dei *verdi* dalle $77\frac{1}{3}$ fino alle $77\frac{1}{2}$, dei *celesti* dalle $77\frac{1}{2}$ fino alle $77\frac{2}{3}$, dei *turchini* dallo

dalle $77 \frac{2}{3}$ fino alle $77 \frac{7}{9}$, dei *paonazzi* dalle $77 \frac{7}{9}$ fino alle 78.

506. Segue di quì 1°. che la luce è un composto di sette specie di raggi *omogenei* che sono inalterabili; poichè se per un numero qualunque di prismi si faccia nuovamente passare una specie di raggi, per esempio i rossi, questi non si decompongon mai ulteriormente e restano sempre rossi; perciò i colori ottenuti dal prisma diconsi *prismatici* o *primitivi*. La lor mancanza totale dà il *nero*, la lor mescolanza produce un nuovo colore che a proporzione partecipa dei componenti, e l'unione di tutti insieme genera il *bianco*. In fatti se si divida un circolo in sette settori colorati, corrispondenti ai sette spazj occupati dai colori nello spettro prismatico (505), e si rivolga velocemente intorno al suo centro, tutta la superficie comparirà quasi bianca o del colore stesso della luce solare: se la bianchezza non è perfetta, dee attribuirsi al difetto di gradazione e all'impurità dei colori artificiali. Del resto la differenza dei colori negli oggetti visibili nasce da quella dei raggi che gli riflettono; l'oro è aranciato, la foglia dell'albero è verde ec. perchè dissipano o assorbiscono tutte le specie di raggi fuorchè gli aranciati e i verdi, o per dir meglio, perchè i soli aranciati e verdi riflettuti dall'oro e dalla foglia, fanno nell' organo della vista un'impressione tanto efficace, che l'impressioni più deboli di tutte l'altre specie di raggi divengono insensibili: così l'inchiostro è nero perchè assorbisce tutti i raggi, e il latte è bianco perchè tutti gli ripercuote. Tale è in compendio la teorìa Newtoniana dei colori.

507. 2°. Che crescendo continuamente i seni e perciò anche gli angoli di refrazione dal primo raggio del rosso fino all'ultimo del paonazzo (505), *le sette specie di raggi si rifrangono variamente in un medesimo mezzo, ed i rossi*, passando per esempio dall'aria nel vetro, *sono i meno, come i paonazzi sono i più rifrangibili di tutti gli altri*. Pertanto le proporzioni assegnate di sopra (499. 500) tra i seni d'incidenza e di refrazione convengono ai soli raggi *medj* o di *media rifrangibilità*, a quelli cioè i cui seni sono medj aritmetici tra i seni dei rossi e i seni dei paonazzi: ma distinguendo ora le tre specie R, M, P dei raggi *rossi, medj* o verdi, e *paonazzi* che passano dall'aria A nel vetro V o nel flint F o nell'acqua H ec. e reciprocamente, potrà formar-

si con quanto si è stabilito (499 . 500 . 503) la seguente più esatta

Tavola delle ragioni dei seni d'incidenza e di refrazione dei raggi rossi, medj e paonazzi.

	dall' *Aria* nel *Vetro*				
508	R	77 : 50	1,54 : 1	1 : 0,64935	
509	M *sen i* : *sen r* ::	77,5 : 50 ::	1,55 : 1 ::	1 : 0,64516,	inc :: 31 : 20
510	P	78 : 50	1,56 : 1	1 : 0,64103	
	dall' *Aria* nel *Flint*				
511	R	313 : 200	1,565 : 1	1 : 0,63898	
512	M *sen i* : *sen r* ::	316 : 200 ::	1,580 : 1 ::	1 : 0,63291,	inc :: 8 : 5
513	P	319 : 200	1,595 : 1	1 : 0,62696	
	dall' *Aria* nell' *Acqua*				
514	R	108 : 81	1,33333 : 1	1 : 0,75000	
515	M *sen i* : *sen r* ::	108,5 : 81 ::	1,33951 : 1 ::	1 : 0,74654,	inc :: 4 : 3
516	P	109 : 81	1,34568 : 1	1 : 0,74312	
	dal *Vetro* nel *Flint*				
517	R	313 : 308	1,01623 : 1	1 : 0,98403	
518	M *sen i* : *sen r* ::	316 : 310 ::	1,01935 : 1 ::	1 : 0,98101,	inc :: 32 : 31
519	P	319 : 312	1,02244 : 1	1 : 0,97806	
	dall' *Acqua* nel *Vetro*				
520	R	926 : 800	1,1575 : 1	1 : 0,86393	
521	M *sen i* : *sen r* ::	928 : 800 ::	1,1600 : 1 ::	1 : 0,86207,	inc :: 93 : 80
522	P	930 : 800	1,1625 : 1	1 : 0,86022	

523. 3°. Che fatta $n : 1$ la ragion dei seni d'incidenza e di refrazione per i raggi medj, sarà generalmente quella dei rossi $n - N : 1$, e quella dei paonazzi $n + N : 1$, ed N sarà la misura della *forza dispersiva* nel dato mezzo, il cui valore si avrà sostituendo ad n e ad $n - N$ ovvero ad $n + N$ i loro numeri corrispondenti: così nel passaggio dall'aria nel vetro si ha $n - N = 1,54$ ed $n = 1,55$ onde $N = \frac{1}{100}$: dall'aria nel flint $N = \frac{3}{200}$: dall'aria nell'acqua $N = \frac{5}{809}$: dal vetro nel flint $N = \frac{2}{641}$ prossimamente ec.

524. 4°. Che supposta l'incidenza $i = 90°$ incirca e perciò $sen\ i = 1$, si avrà per gli angoli di refrazione:

dall'*Aria* nel *Vetro*	R		0,64935 (508)	= *sen* 40°, 29', 33''
	M V	*sen r* =	0,64519 (509)	= *sen* 40, 10, 40
	P		0,64103 (510)	= *sen* 39, 52, 6
dall'*Aria* nel *Flint*	R		0,63898 (511)	= *sen* 39, 42, 57
	M F	*sen r* =	0,63291 (512)	= *sen* 39, 15, 55
	P		0,62696 (513)	= *sen* 38, 49, 34
dall' *Aria* nell'*Acqua*	R		0,75000 (514)	= *sen* 48, 35, 25
	M H	*sen r* =	0,74654 (515)	= *sen* 48, 17, 30
	P		0,74312 (516)	= *sen* 47, 59, 52
dal *Vetro* nel *Flint*	R		0,98402 (517)	= *sen* 79, 44, 36
	M F	*sen r* =	0,98101 (518)	= *sen* 78, 48. 58
	P		0,97806 (519)	= *sen* 77, 58, 33
dall'*Acqua* nel *Vetro*	R		0,86374 (520)	= *sen* 59, 45, 39
	M V	*sen r* =	0,86185 (521)	= *sen* 59, 32, 59
	P		0,85997 (522)	= *sen* 59, 20, 29

525. 5°. Che all'incontro dunque non potrà mai un raggio rosso passar dal vetro comune nell'aria se sia $i > 40°, 29', 33''$, nè dal flint nell'aria se $i > 39°, 42', 57''$, nè dall'acqua nell'aria se $i > 48°, 35', 25''$, nè dal flint nel vetro se $i > 79°, 44', 36''$, nè dal vetro nell'acqua se $i > 59°, 44', 20''$, perchè crescendo la refrazione al crescer dell'incidenza (501), verrebbe *sen* $r >$ *sen* 90°, cioè il seno di refrazione sarebbe maggior del raggio, il che è assurdo (L. 511). Ora i raggi rossi sono i men rifrangibili (507); dunque se essi non passano, molto meno passeranno tutte l'altre specie di raggi: in questi casi pertanto il raggio sarà rispinto indietro, e la refrazione si cangierà in riflessione, fenomeno maraviglioso che ha fatto immaginar sulla rifles-

sione e refrazione delle ipotesi affatto singolari: noi non ci fermeremo a parlarne.

526. 6°. Che i raggi più rifrangibili sono anche i più riflessibili; poichè mentre i rossi non son riflettuti nel vetro se non sia $i > 40°, 29', 33''$ (524), i paonazzi più rifrangibili (507) si riflettono subito che $i > 39°, 52', 6''$; dicasi lo stesso del flint, dell'acqua ec.

527. Sottraendo ora le diverse refrazioni u dei raggi ultimi o paonazzi dalle refrazioni p dei primi o rossi, ovvero queste da quelle secondo la lor minore o maggior grandezza, si avrà l'angolo di *dispersione* o la dispersione d: così (524) $p - u = 40°, 29', 33'' - 39°, 52', 6'' = 0°, 37', 27'' = d$ è la massima dispersione dopo la refrazione dei raggi che passano dall'aria nel vetro: $p - u = 39°, 42', 57'' - 38°, 49', 34'' = 0°, 53', 23'' = d$ è la massima dispersione dopo la refrazion dei raggi che dall'aria passano nel flint ec. Dal che può dedursi che la differenza tra gli angoli p, u è piccolissima, ovvero che $p - u = d$ è ordinariamente un angolo minimo, giacchè nel passaggio del vetro nel flint, ove accade una dispersione più grande che in ogni altro passaggio, si trova (524) $p - u = 79°, 44', 36'' - 77°, 58', 33'' = 1°, 46', 3'' = d$, cioè la massima dispersione non eguaglia due gradi.

60 528. Posto ciò, potrà conoscersi la dispersione d dopo il passaggio dei raggi solari per una superficie IA, sol che sia data l'incidenza i dei raggi medj, la ragione $n : 1$ dei seni d'incidenza e di refrazione, e la misura N della potenza dispersiva. Poichè avendosi $M\ sen\ i : M\ sen\ r :: n : 1$, sarà $M\ sen\ r = \frac{M\ sen\ i}{n}$ ($= sen\ m$): avendosi inoltre (527) $R\ sen\ i : R\ sen\ r$ ($= sen\ p$) $:: n - N : 1$, e $P\ sen\ i : P\ sen\ r$ ($= sen\ u$) $:: n + N : 1$, e facendo tutti i raggi sulla superficie rifrangente un comune angolo d'incidenza (442), sarà $R\ sen\ i = P\ sen\ i$ ed $(n + N)\ sen\ u = (n - N)\ sen\ p$; onde essendo $p - u$ un angolo piccolissimo (527) e $sen\ p + sen\ u = 2\ sen\ m$ per la natura dei raggi medj (507), si avrà (L. 662) $p - u = \frac{2N\ tang\ m}{n} = d = tang\ d$ presso a poco. Così posto $i = 23°, 39', 5''$, $n = \frac{77,5}{50} = 1, 55$, $N = \frac{1}{100}$ (523), sarà $M\ sen\ r$

$= sen\ m = sen\ 15°$, $tang\ d = \frac{2\ tang\ 15°}{100.\ 1,55} = tang\ 0°, 11' 53''$
e perciò la cercata dispersione $d = 11', 53''$.

529. Che se da una superficie IA passino i raggi ad un' altra inclinata KA, come per i lati del prisma IAK il cui angolo rifrangente $A = a$, chiamate m, m' le refrazioni LDC, FCG dei raggi medj; $i' =$ VCD la loro incidenza in AK; p, p', u, u' le refrazioni dei raggi primi ed ultimi; e g, h le loro incidenze in AK, se si osservi che $p > u$ (507), onde $h > g$ ovvero $g > h$ (L. 575) ma sempre $u' > p'$ (507), avremo M $sen\ i'$: AM $sen\ r'$ :: 1 : n(499), ed AM $sen\ r' = n$ M $sen\ i' = sen\ m'$; avremo inoltre $sen\ g' : sen\ p' :: 1 : n - N$, $sen\ h : sen\ u' :: 1 : n + N$, $(n + N)\ sen\ h = sen\ u'$, $(n - N)\ sen\ g = sen\ p'$, e però essendo $p - u = \pm h \mp g$ (L. 575) e $p' - u'$ un angolo piccolissimo come sopra, si avrà (L. 663) $\frac{2N\ sen\ (i' \pm m)}{cos\ m\ cos\ m'}$ $= u' - p'$, ovvero poichè $i' \pm m = a$ (L. 574) ed $u' - p' = d'$, sarà $\frac{2N\ sen\ a}{cos\ m\ cos\ m'} = d' = tang\ d'$ vicinissimamente. Così ritenuti i valori di sopra (528) e posto $a = 30°$, poichè $sen\ m = sen\ 15°$, sarà $i' = a - m = 15°$, $sen\ m' = n$ M $sen\ i' = 1,55 . sen\ 15° = sen\ 23°, 39', 5''$, e $tang\ d' =$ .... $\frac{2\ tang\ 30°}{100 \times cos\ 15° . cos\ 23°, 39', 5''} = tang\ 0°, 38', 52''$ e perciò l'angolo di dispersione $d' = 38', 52''$.

60 e 61

530. Ma se all'incontro per mezzo degli angoli di refrazione e di dispersione voglia determinarsi la misura delle potenze refrattiva e dispersiva d' un prisma, ricevuto normalmente sulla sua prima superficie un raggio solare, si misureranno con esattezza l'angolo di refrazione AMr' dei raggi medj alla seconda superficie, l'angolo di dispersione d e l'angolo rifrangente a, e avremo AM$i = 0$, M$r = 0$, M$i' = a$ (L. 572), AM$r' = m'$, e sarà nota la potenza refrattiva o la ragione tra M $sen\ i'$ ed AM $sen\ r'$. Sia dunque M $sen\ i'$: AM $sen\ r'$ :: 1 : n; dunque AM $sen\ i$: M $sen\ r$ :: n : 1 (499) ed M $sen\ r = sen\ m$ (528) : ma $\frac{2N\ tang\ m}{n} = d$ (528); dunque la misura della potenza dispersiva $N = \frac{dn}{2\ tang\ m}$.

E qui si noti che l'equazione $(n-N)$ *sen* $p=(n+N)$ *sen* u (528) da cui nasce tutta la teoria e delle potenze dispersive e degli angoli di dispersione, non si riduce alle forme che le abbiamo date (528, 529) se non nell'ipotesi di p prossimamente eguale ad u (527) o di $p \infty u$ prossimamente eguale a zero; onde quando l'ipotesi non sussista, la teoria non avrà luogo. E' però vero che se gli angoli d'incidenza e quindi (501) anche quelli di refrazione saranno assai piccoli, la pratica differirà dal rigor matematico di soli pochi secondi, il cui effetto non è sensibile all'occhio; e diciamo *all'occhio* perchè in somma tutte queste ricerche sulla dispersione dei raggi omogenei son dirette a perfezionar le macchine ottiche di cui tra poco ragioneremo.

531. I prismi guidano naturalmente alla considerazion delle *lenti* o di quei solidi diafani MCND di forma lenticolare, il cui asse PQ congiunge i centri P, Q dei due segmenti sferici MCN, NDM che gli compongono. In fatti riguardando la lente come un poliedro d'infinite faccie, e stendendo indefinitamente in due piani le due faccie per cui passa il raggio lucido DC, è chiaro che la refrazione si farà in uno stesso modo e nei piani e nella lente. Dovrà dunque intendersi delle lenti quanto si è detto finora dei piani paralleli e dei prismi, e perciò 1°. condotti due piani paralleli IA, KB tangenti alla lente in D, C, il raggio HD che cadendo in D si refrange in DC, emergerà per CG parallelo (503) e paralleli saranno ancora i semidiametri o normali QD, PC dei segmenti; onde dai triangoli simili QOD, POC avendosi QO : OP :: QD : PC, ed essendo invariabile la ragione dei raggi QD, PC e perciò anche quella di QO, OP, è forza che il raggio lucido DC situato tra due parallele qualunque IA, KB, passi sempre per O; dunque ogni lente doppiamente convessa o concava ha un certo punto o *centro* O per cui se passi un raggio di luce comunque obliquo, son sempre paralleli i raggi incidente HD ed emergente CG: 2°. perciò tra i raggi che cadono paralleli sopra una lente qualunque NM, ve ne sarà sempre uno che passando per il centro O emergerà parallelo; anzi supposta la lente molto sottile, il raggio continuerà sensibilmente per la medesima retta: 3°. i raggi HD, CG mediocremente obliqui convergono verso l'asse quando la lente è convessa, e ne divergono quando è concava, appunto come nei prismi IAK: 4°. i raggi stessi HD quasi paralleli all'asse, fanno un angolo di

[margin: 59; 60 e 61]

FIG.

deviazione proporzionale all' angolo rifrangente A (504), e poichè quest' angolo in una lente è formato dalle tangenti ad essa, e perciò diviene tanto più grande quanto i punti D son più lontan dall' asse, crescerà la deviazione a misura che i punti D si avvicinano all' estremità della lente ec. 60 e 61

532. Data ora una lente AITB *convesso-convessa*, la cui grossezza $AB = c$, i cui raggi $BC = a$, $AK = b$, e il cui asse Φf passa per l'oggetto lucido Φ, è facile di assegnare in Φf i punti o *fuochi* f, F ove la riunione dei raggi dopo una o due refrazioni produce l'immagine di Φ. Poichè preso un raggio incidente ΦIG vicinissimo a ΦA, che piegandosi prima in I e poi in T, formi le prolungate fTD, FTE, se dai centri C, K si conducano sopra ΦG, fD, FE i seni KG, KH della prima incidenza KIG e refrazione KIH, e i seni CD, CE della seconda incidenza CTD e refrazione CTE; gli angoli infinitesimi $A\Phi I$, TFB, TfB daranno $\Phi A = \Phi I = y$, $fB = u = fT$, $fK = fA - AK = u + c - b = fH$, $fC = u + a = fD$, $FB = x = FT$, $FC = x + a = FE$, e gli archi minimi AI, BT potranno riguardarsi come rette linee. Perciò chiamata $\frac{p}{q} = \frac{KG}{KH}$ la ragion dei seni d'incidenza e di refrazione all' entrar nella lente, e $\frac{q}{p} = \frac{CD}{CE}$ la ragione stessa all' uscirne (499), dai triangoli rettangoli e simili ΦAI e ΦGK, fAI ed fHK avremo $\Phi K (y + b) : KG (p) :: \Phi I (y) : IA = \frac{py}{y + b}$, e parimente $fA (u + c) : AI \left(\frac{py}{y + b}\right) :: fH (u + c - b) : HK (q)$, onde $qu + cq = \frac{puy + pcy - bpy}{y + b}$, ovvero $fB = u = \ldots\ldots$ $\frac{cqy + bcq + bpy - cpy}{py - qy - bq}$, e perciò $fA = z = fB + c = \frac{bpy}{y(p - q) - bq}$, prima equazione che determina la lunghezza focale fA dopo una refrazione, e che si applica, fatto $b = \infty$ (476), alle superficie piane, e fatto b negativo, alle concave; e generalmente dà $z = \frac{\pm bpy}{y(p - q) \mp bq}$. 63

63 533. Di nuovo, dai triangoli rettangoli e simili fDC ed fBT, FEC ed FBT avremo $f\mathrm{C}\ (u + a) : \mathrm{CD}\ (q) :: f\mathrm{T}\ (u) : \mathrm{TB} = \frac{qu}{u + a}$, e parimente $\mathrm{FC}(x + a) : \mathrm{CE}(p) :: \mathrm{FT}\ (x) : \mathrm{TB}\ (\frac{qu}{u + a})$; onde $u = \frac{apx}{qx + aq - px} = (532)$ $\frac{cqy + bcq + bpy - cpy}{py - qy - bq}$, ed $\mathrm{FB} = x = \dots\dots\dots\dots$

$$\frac{acq^2y + abcq^2 + abpqy - acpqy}{ap^2y - apqy - abpq - cq^2y - bcq - bpqy + 2cpqy + bcpq + bp^2y - cp^2y}$$

$$= \frac{abq(cq + py) - acqy(p - q)}{(apy + bpy + bcq)(p - q) - cy(p - q)^2 - abpq},$$ seconda equazione che determina la lunghezza focale FB dopo due refrazioni, e che si applica, fatta $a = \infty = b$, alla lente *piano-piana*; fatta $b = \infty$ alla *piano convessa*; fatta $b = \infty$ ed a negativa, alla *piano-concava*; fatta $a = \infty$, alla *convesso-piana*; fatta a negativa, alla *convesso-concava* o *menisco*; fatta a negativa e $b = a + c$, alla *convesso-concavo-concentrica*; fatta b negativa ed $a = \infty$ alla *concavo-piana*; fatta b negativa, alla *concavo-convessa* o *menisco*; fatte a, b negative, alla *concavo-concava*; fatta b negativa ed $a = b + c$, alla *concavo-convesso-concentrica*; ed infine fatto $c = 2a$ e $b = a$, alla *sfera* del raggio a.

534. Cominciamo dalla prima equazione $f\mathrm{A} = z = \frac{\pm bpy}{y(p - q) \mp bq}$ e supponghiamo $b = \infty$ (532); dunque $z = \frac{-py}{q}$, cioè se la superficie rifrangente AI sia piana (quali posson considerarsi certe porzioni d'acqua o d'aria, benchè matematicamente sferiche), il fuoco o immagine f, che nella costruzione della formula si prese di quà da AI oppostamente a Φ, sarà dalla parte medesima dell'oggetto Φ; e poichè l'equazione dà $\frac{py}{q} : y :: p : q$, oltre il sapersi d'altronde che l'oggetto F dee rialzarsi fino in N (447), si saprà ancora la quantità del rialzamento, perchè *la distanza dell'immagine* N *dalla superficie* AB *starà sempre alla distanza dell'oggetto* F *dalla medesima superficie*, *come il seno d'incidenza al seno di refrazione*. Sicchè l'occhio H

50

situato

situato nell' aria vedrà un oggetto F nell'acqua più vicino per $\frac{1}{4}$ della sua profondità e più grande del vero: più vicino per $\frac{1}{4}$, perchè $\frac{3y}{4} : y :: 3 : 4 :: \frac{3}{4} : 1$ (515); più grande, perchè altrove dimostreremo esser questa una general proprietà dei mezzi più refringenti o più densi. Dopo ciò non dee far maraviglia se la parte d'un oggetto diritto immersa obliqnamente nell'acqua, comparisca incurvata e più grossa del rimanente, o se in un vaso ripieno d'acqua si renda visibile un oggetto a quella distanza da cui, vuotato il vaso, non si vedrebbe.

50

535. All'incontro dunque un occhio F nell'acqua vedrà più remoto dalla superficie e più piccolo del vero un oggetto H che sia nell'aria; l'effetto per altro è lo stesso riguardo al rialzamento, e da H salirà l'oggetto in M lungo il raggio refratto FD (447). Di quì l'alterazione di tutte l'osservazioni astronomiche (se non si facciano allo *zenit*) e la perpetua necessità di correggerle; poichè il raggio lucido Sp che dal vuoto passa nell'atmosfera DO, si rifrange in p, in c, in b, in a ec. a misura degli strati sempre più densi che incontra, e per una curva $pcbaO$ assolutamente indefinibile, entra nell'occhio O che giudica l'astro S nella direzione di OS' tangente in O (447). Dal che segue 1°. che *la refrazione fa comparire gli astri più del vero elevati nel circolo verticale* sopra cui si misura la refrazione: 2°. che gli astri son realmente sotto l'orizzonte allorchè sembrano arrivarvi: 3°. che *la refrazione scema continuamente dall'orizzonte*, ove atteso il massimo angolo d'incidenza è massima (501), *fino allo zenit*, ove annullandosi quell'angolo, diventa nulla: 4°. che dipendendo la refrazione non dalla distanza dell'astro ma dalla quantità d'atmosfera che il suo raggio attraversa, *tutti gli astri a una stessa altezza soffrono una medesima refrazione*: 5°. che *la refrazione avvicina sempre tra loro due astri*, per la ragione medesima per cui gli allontana la parallasse (455.8°.) cioè per la convergenza dei verticali dall'orizzonte allo zenit ove si riuniscono; onde se a' sia l'altezza apparente di un astro, e se ne conoscano la parallasse p e la refrazione r, sarà l'altezza vera $a = a' + p - r$: 6°. che essendo varia ne'varj climi e nelle varie stagioni la densità dell'atmosfera, la qua-

52

le varia anche irregolarmente in vicinanza della terra, le osservazioni presso l'orizzonte son poco esatte, e inoltre è assai difficile avere una Tavola universale delle refrazioni. Gli Astronomi per altro costretti a farne uso perpetuamente, hanno vinta in gran parte colla moltitudine delle osservazioni la difficoltà; ed oltre le Tavole *locali* (di cui parleremo altrove, accennando il modo di costruirle) hanno formata una *Tavola delle refrazioni medie* per le zone temperate, unendovi quelle correzioni che esige l'attual densità dell'aria indicata dal barometro (337) ed il grado del calore attuale preso dal termometro Reaumuriano in cui il 0° esprime lo stato dell'aria nella congelazione dell'acqua, 10° il temperato, e 80° il calor dell'acqua bollente. Poichè sapendosi per esperienza che i volumi v, v' dell'aria a 0° e a 80° son tra loro :: 173 : 253 :: 173 : 173 + 80, cioè aumentano come i gradi, e preso per unità di temperatura atmosferica T quella in cui il barometro e à 28 *pollici* (= 336 *lin.*) ed il termometro è a 10° (cioè quando il volume dell'aria $= v + 10 = v'' = 173 + 10 = 183$), se sian calcolate su questi dati le refrazioni medie r, e suppongasi che esse crescano in ragion diretta dell' aumento di altezza barometrica b (cioè di $\frac{b}{336}$) e in ragione inversa di v'' aumentata dei gradi t oltre i 10 (cioè di $\frac{183}{183+t}$), facendosi finalmente $\frac{183}{183+t} \times \frac{b}{336} = X$, e chiamando r' la refrazione vera, si avrà $r : r' :: 1 : X$ ed $rX = r'$ *refrazione vera cercata*.

Tanto la *Tavola delle refrazioni medie*, quanto quella *delle densità atmosferiche per la lor correzione*, cioè delle quantità X, si troveranno al fine di questo Libro. Così se vogliasi la vera refrazione r' per l' altezza di 26° 30' quando il barometro è a $27^p\, 4^l$ ($= 328^l$) e il termometro a 19°, si troverà nella prima Tavola $r = 1' 53'', 6$, e nella seconda sotto $27^p\, 4^l$ e di fianco a 19° si avrà $X = 0,930 \left(= \frac{328}{336} \times \frac{183}{192}\right)$, ed $r' = 0,930\, r = 1' 45'', 6$. Se i gradi fossero sotto il gelo, per es. -8, sarebbe $X =$

$\frac{328}{336} \times \frac{183}{183-18} = \frac{328}{336} \times \frac{183}{165} = 1,083.$

So bene che le più recenti e più combinate osservazioni hanno spinta anche più avanti la precisione sul calcolo delle rifrazioni, come su tutti gli altri sì ottici che astronomici; e dopo le sublimi teorie del celebre Sig. La-Place, essa è portata ad un grado tale da non desiderar forse di più: ma in questi nostri *Elementi*, ove non possono aver luogo le troppo lunghe e troppo profonde dimostrazioni, ci è necessario di protestarci ora per sempre, che debbon bastare ai nostri Studiosi le Tavole di una prima o seconda approssimazione, dovendo essi per ottener risultati più rigorosi aver ricorso alle più ricche Tavole pubblicate dalle Accademie e dai Dotti più celebri. Ciò specialmente avrà luogo nell' Astronomia le cui Tavole troppo estese, non meno che i fondamenti sui quali son costruite, aumenterebbero eccessivamente la mole di questo Libro, e ci condurrebbero fuori del sistema adottato. Contuttociò per non defraudare i Giovani dei vantaggi che possono combinarsi coi limiti già prefissi, aggiungeremo a suo luogo non poche formule molto utili, la dimostrazion delle quali potrà cercarsi dipoi nell' Opere più voluminose dei più insigni Autori moderni, aggiungendo ove occorre le Tavole relative e il modo di farne uso. Dobbiamo al celebre Sig. Barone di Zach la raccolta di molte di tali formule, da esso o formate di nuovo o adottate e ridotte nei preziosi Libri delle sue Tavole Solari e Lunari pubblicate in Toscana nel 1809, e nella grand' Opera delle Tavole di Aberrazione ec. pubblicata in Gotha nel 1806.

536. Se nell' equazione $z = \frac{\pm bpy}{y(p-q) \mp bq}$ per le superficie convesse e concave (532), si faccia $y = \infty$, verrà $z = \frac{\pm bp}{p-q}$, cioè *posto l' oggetto ad infinita distanza, la principal lunghezza focale sarà quarta proporzionale dopo la differenza dei seni, il seno d' incidenza e il raggio della superficie rifrangente*. Preso $p > q$, se la superficie è convessa, $\frac{bp}{p-q}$ è positivo; se è concava, si ha

$\frac{-bp}{p-q}$ negativo; cioè l' immagine portata dai raggi paralleli è dentro il mezzo rifrangente nel primo caso, e ne esce fuori nel secondo.

Molte altre riflessioni sul moto e positura dell'immagine potranno farsi, se piaccia, per mezzo di questa equazione: ma dopo averne dato distesamente il metodo nella teorìa degli specchi sferici, è inutile per noi di trattenervisi; lo stesso motivo ci dispensa dal fermarci molto sulla seconda equazione, a cui però torneremo trattando delle macchine ottiche.

537. Supponghiamo in primo luogo che la lente divenga una sfera: fatto $b = a$, e $c = 2a$ (533), la se-

63 conda equazione sarà $FB = x = \frac{ay(2q-p)+2a^2q}{2y(p-q)-a(2q-p)}$, e se i raggi sieno paralleli, cioè se $y = \infty$, avremo $x = \frac{a(2q-p)}{2(p-q)}$; onde dal fuoco principale F al centro O vi sarà la distanza $FO = FB + BO = x + \frac{c}{2} = x + a = \frac{ap}{2(p-q)}$, che nel vetro, ove $p = 3$, $q = 2$ incirca (509), si riduce ad $FO = \frac{3a}{2}$; nel flint, ove $p = 8$, $q = 5$ incirca (512), ad $FO = \frac{4a}{3}$; e nell' acqua, ove $p = 4$, $q = 3$ incirca (515), ad $FO = 2a$.

538. Ma nelle lenti è per lo più sì piccola la grossezza $AB = c$ in paragone dei raggi a, b, che comunemente si neglige: allora la lunghezza focale nelle lenti convesso-convesse e concavo-concave diviene $FB = \frac{abqy}{(a+b)(p-q)y-abq}$ (533), ove fatto $y = \infty$ e chiamando f la principal lunghezza focale, si ha $f = \frac{abq}{(a+b)(p-q)} = \frac{ab}{(a+b)(n-1)}$, fatto $p : q :: n : 1$ (523.3°): quindi dividendo $\frac{nbqy}{(a+b)(p-q)y-abq}$ sopra e sotto per $(a+b)(p-q)$, e sostituendo f in luogo del suo valore trovato

ora, si avrà l' espressione semplicissima $x = \frac{fy}{y-f}$ per le lenti convesso-convesse, e per le concavo-concave, ove f è nagativo, $x = \frac{-fy}{y+f}$. Dunque 1°. fatto nella prima $y = f$, sarà $x = \frac{f^2}{0} = \infty$, cioè *se l' oggetto sia nel fuoco principale, l' immagine sarà ad infinita distanza*, e i raggi usciranno dalla lente paralleli; perciò se l' oggetto abbia più punti lucidi, i coni venuti da ciascun punto si cangeranno all' uscir della lente in cilindri, che attesa l' obliquità dell' incidenza, convergeranno nelle lenti convesse, ma nelle concave divergeranno (531): 2°. essendo nelle lenti convesse $y < f$, e nelle concave y o positivo, o se negativo, maggiore di f, si avrà $x = \frac{\pm fy}{y \mp f}$ quantità negativa, cioè il fuoco sarà immaginario (486) e i raggi divergenti usciranno perciò non più in cilindri ma in lunghi coni lucidi che convergeranno al solito nelle convesse e divergeranno nelle concave (531): 3°. se nelle lenti convesse sia $y > f$, si avrà $x = \frac{fy}{y-f}$ quantità positiva, cioè il fuoco sarà reale e i raggi divergenti (486) usciranno perciò in coni molto più serrati e più corti dei precedenti ec.: 4°. poichè dall' espression generale di x si ricava $x : f :: y : y - f$ ed $x : y :: f : y - f$, d' onde viene $x - f : x :: f : y$ ed $x : x + y :: f : y$ e quindi $x - f : x :: x : x + y$, supposto F il fuoco principale, ed f quello d' un oggetto vicino Φ, sarà $fO : f\Phi ::$ FO : OΦ, ed fF : fO :: fO : $f\Phi$: 5°. facendo y negativa, si avrà il *fuoco dei raggi convergenti*, che per le lenti convesse sarà $x = \frac{fy}{y+f}$ e per le concave $x = \frac{fy}{f-y}$, ove se $y = f$, si avrà nelle prime $x = \frac{f}{2}$, e nelle seconde $x = \infty$ cioè in queste i raggi convergenti diventeran paralleli: 6°. potrà infine determinarsi il fuoco anche dei raggi che passano per più lenti. Siano per esempio due, la prima delle quali suppongo convessa, e siano poste tra

63

loro alla distanza d. I loro fuochi separati saranno $x = \frac{fy}{y-f}$ ed $x' = \frac{\pm f'y'}{y' \mp f'}$. Ora la seconda lente o è più lontana dalla prima che non è x (come C'C' rispetto a

70 VV, il cui fuoco è in φ), e in tal caso $y' = d - x$: o ne è più vicina come LL, ed allora y' è negativa e si ha $-y' = x - d$; e perciò nell' uno e nell' altro caso $y' = d - x = d - \frac{fy}{y-f} = \frac{dy - df - fy}{y-f}$. Dunque sostituendo e riducendo, si troverà $x' = \frac{\pm f'dy \mp ff'd \mp ff'y}{dy - df - fy \mp f'y \pm ff'}$; se sia al solito $y = \infty$, la formula diverrà $x' = \frac{\pm f'(d-f)}{d - f \mp f'}$; e se $d = 0$, cioè le lenti siano a contatto, si avrà, essendo convessa la seconda lente, $x' = \frac{ff'}{f + f'}$; ed essendo concava, $x' = \frac{ff'}{f' - f}$; infine posto nel caso delle due convesse, $d = f + f'$, e in quello della seconda concava $d = f - f'$, si avrà $x' = \frac{f'f'}{0}$, $\frac{-f'f'}{0}$, cioè i raggi si renderanno paralleli, quali appunto gli esige la retta visione come vedremo.

539. E' certo che l'equazione $x = \frac{abqy}{(a+b)(p-q)y - abq}$ si avvera egualmente e quando l' oggetto è nell' asse Φf

63 come Φ, e quando è fuori dell' asse, come μ, purchè μ, Φ sieno egualmente distanti dalla lente. Infatti condotto per μ l' asse μKm della superficie sferica AI, e posto $\mu a = \Phi A = y$, si troverà dopo la prima refrazióne, $ma = z' = \frac{bpy}{y(p-q) - bq} = z = f$A (532): di nuovo se da m si conduca l' asse mtC della superficie BT, e si consideri l' immagine m come un secondo oggetto situato contrariamente al primo μ, e si ponga perciò la distanza $y = -y' = mt$ e il raggio $b = -a =$ BC cangiando anche p in q e q in p atteso il cangiamento dei mezzi,

si avrà una nuova lunghezza focale $x' = \frac{aqy'}{-y'(q-p)+ap}$ (532) $= \frac{aqy'}{y'(p-q)+ap}$: ma $y' = ma = z'$ perchè per ipotesi $c = o$; dunque sostituito in luogo di y' il valor di z', verrà $x' = \frac{abqy}{(a+b)(p-q)y-abq} = x = FB = Mb$, cioè i fuochi f, m dopo la prima refrazione e i fuochi F, M dopo la seconda, saranno egualmente distanti dalla lente, e l' immagine FM sarà presso a poco simile all' oggetto $\Phi\mu$, intendendo quì ripetuto sulla rigorosa figura delle immagini e sulla loro situazione quanto dicemmo altrove (492).

63

540. Sieno intanto μa, $\mu' a'$ due raggi che partendo dallo stesso punto lontanissimo Φ' posson prendersi per paralleli (442), e sia $\mu' a'$ quello che passa per O ed emerge per b formando sensibilmente una linea retta $\mu' b$ (531.2°.). E' certo che il fuoco di questi raggi si troverà nel prolungamento di $\mu' b$, poichè il raggio $\mu' b$ non si piega e deve non pertanto unirsi con gli altri; dunque la retta passerà per il fuoco M; e quindi si formeranno i due triangoli simili $\Phi\mu'$O o sia $\Phi\Phi'$O, FOM, onde $\Phi\mu'$ $(= \Phi\mu = \Phi\Phi')$: FM :: ΦO $(y + AO)$: OF $(x + BO)$, ovvero (per esser $c = o$ e perciò $AO = OB = o$) $:: y : x :: y : \frac{fy}{y \mp f}$ (538) $:: 1 : \frac{f}{y \mp f}$ non attendendosi al segno del numeratore che è relativo non alla quantità ma alla situazione: e quindi le grandezze lineari $\Phi\Phi'$, MF dell' oggetto e dell' immagine saranno tra loro come la distanza ΦA alla lunghezza focale FB.

541. Ora se nell' equazione $x = \frac{abqy}{(a+b)(p-q)y-abq}$ si faccia $a = b = \infty$, sarà $x = \frac{\infty^2 qy}{2\infty(p-q)y-\infty^2 q} = -y$ (L. 197.8), cioè *nelle lenti piano-piane* (533) *l' immagine si trova dalla parte stessa e nella stessa distanza dall' oggetto*, di cui perciò non si cangia nè la positura nè la grandezza. Che se inoltre sia $y = \infty$, verrà $x = -\infty$, cioè la lente piano-piana conserva ai raggi il loro parallelismo. E tutto ciò se $c = o$: ma se la grossezza delle lenti sia qualche poco considerabile, fatte le sostituzioni nella formula generale

(533), si troverà $x = \frac{cq + py}{-p}$, cioè l'immagine (non attendendo al segno —) sarà distante dalla superficie più vicina all'occhio di $\frac{cq + py}{p}$.

542. Poichè la principal lunghezza focale è $f = \ldots \frac{abq}{(a+b)(p-q)}$ (538), nel vetro, posto $p = 31$, $q = 20$, ovvero $p = 3$, $q = 2$ (509), sarà $f = \frac{20ab}{\pm 11(a+b)}$ ovvero $f = \frac{2ab}{\pm(a+b)}$; e quindi se $b = a$, viene $f = \pm a$, cioè nella lente di vetro convesso-convessa o concavo-concava di raggi eguali, la lunghezza focale principale eguaglia il raggio. Se inoltre si faccia $a = \infty$, oppure $b = \infty$, si trova $f = \pm 2b$ o $f = \pm 2a$, cioè *nella lente di vetro piano-convessa o piano-concava, la principal lunghezza focale eguaglia il diametro e resta sempre la stessa o si presenti all' oggetto la superficie piana della lente o la curva*. E di quì per le lenti piano-convesse si deduce $f + CB = CF = 3a$, e
63 $CF : FB :: 3 : 2 :: p : q$.

In pratica i raggi lucidi posson supporsi paralleli e perciò $y = \infty$ quando $y = 1000a$; poichè fatto $y = \infty$ e $b = a$ $= 10$ per esempio, avremo $x = \frac{20 \cdot 10^2}{11 \cdot 20} = 9{,}0909$, e fatto $y = 1000a = 100^2$, avremo $x = \frac{abqy}{y(a+b)(p-q) - abq} = \frac{10^2 \cdot 20 \cdot 100^2}{100^2 \cdot 20 \cdot 11 - 20 \cdot 10^3} = 9{,}0992$; di modo che tra il fuoco dei raggi paralleli e il fuoco dei raggi che vengono da una distanza 1000 volte più grande del raggio a, non vi è la differenza di $\frac{1}{100}$, il che in pratica non è valutabile.

543. Infine essendosi trovata la lunghezza focale per le lenti concavo-concave, $x = \frac{-fy}{y+f}$ (538), l'immagine a motivo del segno — sarà situata sempre di là dalla lente (485), e sarà distante da questa di $\frac{fy}{y+f}$. Per le lenti convesso-convesse

convesse si avrà $x = \frac{fy}{y - f}$ se sia $y > f$; ma se $f > y$, sarà $y - f$ quantità negativa ed $x = \frac{-fy}{f - y}$ dimostrerà che di là dalla lente è situata anche in questo caso l'immagine, ond'ella ne sarà distante di $\frac{fy}{f - y}$. E se si faccia $y = mf$, si avrà $x = \frac{\pm mf}{m \mp 1}$, valore che darà esattamente la situazione e la distanza dell'immagine dalle lenti.

544. Quanto alle *lenti ustorie* che sono evidentemente quelle sole il cui fuoco F è reale (485), sia $QO = a$ un piccolo semiarco della lente piano-convessa QOI col raggio PQ parallelo all'asse ed ultimo di quanti ella ne può ricevere, e sia f il punto diverso da F ove questo raggio sega l'asse ΦF (531). Descritto col raggio fQ il piccolo arco QD e condotti dal centro C il semidiametro CQ $= CO = 1$ e i seni CP, CM della seconda incidenza e refrazione, onde $\frac{CP}{CM} = \frac{q}{p}$ (532), dai triangoli simili CfM, NfQ si avrà $Cf : fQ$ $(= fD) :: CM : NQ$ $(= CP) :: p : q :: CF . FO$ (542); onde (L.211) $CF - Cf (= Ff) : FO - fD (= Ff - OD) :: CF : FO$, cioè $Ff : OD :: CF : CF - FO (= CO) :: p : p - q$, ed $Ff = \frac{pOD}{p - q}$. Ora poichè i coseni CN, fN attesa la piccolezza degli archi QO, QD, non differiscono sensibilmente dai raggi CO, fD, e perciò (L. 477) $ND : NO :: CO : fD = FO$ presso a poco (538), onde $OD : NO :: CF : FO :: p : q$, avremo $OD = \frac{p . NO}{q}$, e quindi (giacchè $NO = 1 - \cos a$) $Ff = \frac{p^2 (1 - \cos a)}{q (p - q)}$, spazio occupato da tutti i raggi refratti dalla lente QOI. E se si osservi che essendo ON assai piccola, si ha presso a poco $ON = \frac{QN^2}{2CO}$ (L. 478) $= \frac{sen^2 a}{2CO}$, troveremo anche $Ff = \frac{p^2 sen^2 a}{2q (p - q) CO}$: ma $CO : CF :: p -$

64

64 $q:p$, e CF — CO (= FO) : CO : : $q:p-q$; dunque $Ef = \frac{p^2 sen^2 a}{2(p-q)^2 FO}$, perciò $AF = \frac{QN \times fF}{Nf} = \frac{QN \times fF}{OF} = \frac{p^2 sen^2 a}{2q^2 CO^2} = \frac{p^2 sen^2 a}{2(p-q)^2 OF^2}$. Nel resto si potrà procedere come sopra (496, 497).

545. Fin qui abbiamo considerati i soli raggi di media rifrangibilità per cui $p = 31$, $q = 20$: ma se si voglia aver riguardo ai raggi paonazzi Qf per cui $p = 78$, $q = 50$ (510), e ai rossi QE per cui $p = 77$, $q = 50$ (508), si troverà che la principal lunghezza focale di quelli è $Of = f' = \frac{50ab}{28(a+b)}$ (542), di questi $OE = f'' = \frac{50ab}{27(a+b)}$; onde $f' : f'' : : 27 : 28$, $f' = \frac{27f''}{28}$, $f'' = \frac{28f'}{27}$ ed $fE = f'' - f' = \frac{f'}{27} = \frac{f''}{28}$, cioè *se i raggi cadano paralleli sopra una lente convesso-convessa o piano-convessa, i lor fuochi ovvero le immagini formate dalle sette specie di raggi, occupano* $\frac{1}{27}$ *o* $\frac{1}{28}$ *della principal lunghezza focale;* onde in una lente che abbia questa lunghezza di 27 piedi o di 28, l'immagini occupano lo spazio d'un intero piede. Pertanto essendo la luce molto densa e pochissimo separata verso il mezzo F dello spettro, ove perciò si trova il fuoco o immagine degli oggetti bianchi, è manifesto 1°. che sarà fF o $\frac{1}{54}$ o $\frac{1}{56}$, o prendendo un mezzo tra due, $\frac{1}{55}$ in circa della principal lunghezza focale: 2°. che essendo simili i triangoli fAF, fQN, si ha $AF : Ff : : QN : Nf = OF$; onde come $fF = \frac{OF}{55}$, così $AF = \frac{QN}{55}$.

Non ci fermeremo sulle proprietà del menisco, poichè non se ne fa comunemente alcun uso, ed è poi facile di averne e di esaminarne la lunghezza focale $x =$

$\frac{-2aby}{\pm(a-b)y+2ab}$, fatto $p=3$, $q=2$ e b ovvero a negative (533,538): così si troverà che il menisco concavo-convesso-concentrico equivale alla lente piano-piana, il concavo-convesso alla piano-convessa o alla convesso-convessa ec.

546. Terminiamo colla spiegazione dell'*Iride*, cioè di quell'arco mirabile AEB che con tutta la pompa dei colori prismatici comparisce sì spesso nell'atmosfera allorchè voltate le spalle al Sole ben chiaro, si osserva una nuvola che investita dai raggi di lui, si scioglie in pioggia. Non è raro di vedere a un tempo stesso due iridi AEB, CGD, l'una concentrica all'altra: in tal caso i colori dell'interiore o *primaria* AEB son vivi e brillanti; il rosso ne occupa la parte più alta, l'infimo è il paonazzo, e tra questi son situati in fasce concentriche gli altri cinque intermedj nel loro ordine consueto; all'incontro i colori dell'esteriore o *secondaria* CGD son languidi e smorti, il rosso è al disotto, il paonazzo al di sopra, e anche l'ordine degli intermedj e rovesciato. Se dal punto P ove suppongo l'Osservatore, si conduca l'indefinita PO parallela ai raggi solari SE, SF, SG, SH che tutti son paralleli fra loro (442), gli angoli EPO, FPO, GPO, HPO determineranno il *semidiametro apparente* dei diversi archi dell'iridi, il quale eguaglia sempre l'altezza apparente EPI, FPI, GPI, HPI del punto E, F, G. H il più elevato dei varj archi, e l'apparente altezza OPI = LPK del centro del Sole sull'orizzonte. I principali fenomeni dell'iride dipendono dalla determinazione di questo semidiametro. 65

547. Sia dunque la sfera o gocciola d'acqua MRNVM illuminata dai raggi paralleli del Sole BM, *bm*, $\beta\mu$: è chiaro che $\beta\mu$ passando per il centro C, non soffre refrazione (439) e che tutti gli altri raggi, come BM, si rifrangono verso la normale MC (439) e vanno in qualche punto R, donde in parte escono dalla gocciola e in parte si riflettono (473) facendo l'angolo MRC = CRV (440) e tagliando perciò l'arco MSR = RNV (L. 418.396); onde si ha l'angolo MRV = 2MRC = 2CMR. In V avviene del pari una nuova refrazione e una nuova riflessione, e l'une e l'altre posson moltiplicarsi all'infinito, ma sempre con discapito del raggio primitivo BM che in ciascuna riflessione trasmette nell'aria una porzion di se stesso, e perciò continua-

mente si indebolisce. Ora ogni raggio è variamente rifrangibile (507) e nel rifrangersi sviluppa i sette colori prismatici (505); dunque se l'occhio possa ricevere il raggio rifratto, dovrà necessariamente riceverlo colorato, e nella
67 prima uscita in R lo vedrebbe più vivo che nella seconda in T, e in questa più che nella terza in V ec.

548. Ma l'occhio in tanta distanza dalla nuvola piovosa e in tanta piccolezza delle gocciole rifrangenti non riceve *efficacemente* una specie qualunque di raggi se non sieno paralleli; poichè la densità della luce divergente decrescendo almeno in ragione inversa dei quadrati delle distanze (444), i tennissimi raggi trasmessi all'occhio, non saranno *efficaci* se non vi giungano con la loro densità primitiva, cioè se
66 non conservino il loro parallelismo (443). Ora 1°. i raggi paralleli BM, *bm* non possono mai uscir parelleli in R dopo due refrazioni senza alcuna riflessione; perchè questa è una proprietà delle lenti piano-piane (541) che non conviene alla sfera: 2°. usciranno bensì paralleli in
67 V, *v*, dopo una riflessione e due refrazioni se si riflettano da uno stesso punto R; perchè allora si avrà $MSR = RNV$ ed $mSR = RNv$ (547) e perciò $Vv = Mm$, onde come entrarono paralleli in M, *m*, così ne usciranno per V, *v*: 3°. usciranno anche paralleli per V, *v* dopo due riflessioni e due refrazioni se fatta la prima riflessione in R, *r*, camminino paralleli per RT, *rt*; perchè allora essendo $Rr = Tt$ (L. 416), sarà anche $Vv = Mm$ (L. 396). Poichè dunque i raggi colorati non sono efficaci se non escano paralleli, e possono uscir paralleli o dopo una riflessione allorchè son più forti, o dopo due quando son più deboli, è manifesto che l'iride primaria si mostra nell'uno e la secondaria nell'altro caso; nel caso di tre riflessioni, di quattro, di cinque ec., si avrebbe la terza iride, la quarta, la quinta ec.: ma non occorre parlar di queste che non son mai sensibili all'occhio umano.

66 e 67 549. Prolungati pertanto fino al concorso in X se occorra, i raggi incidenti ed emergenti BM, PV e posto l'angolo d'incidenza $CMS = i$, l'angolo di refrazione $CMR = r$, l'angolo o semidiametro cercato $XPO = PXM = x$, avremo nel poligono quadrilatero MXVRM l'angolo $RMS =$
66 $RVX = i - r$, e l'angolo rientrante $MRV = 360° - MRV$ (L. 446) $= 360° - 2r$ (547): ma gli angoli del poligono sono $180° \times 2 = 360°$ (L. 447); dunque $360° = 2i - 2r +$

FIG.

$360° - 2r + x$, e quindi $x = 4r - 2i$ cioè *il cercato semidiametro apparente* XPO *nel caso di una riflessione e due refrazioni, eguaglia la differenza tra il quadruplo della refrazione e il doppio dell'incidenza*. Similmente nel poligono pentagono XVTRMX i cui angoli sono $180° \times 3 = 540°$ (L. 447), se si osservi che l'angolo $RMX = TVX = 180° - RMS$ (L. 401) $= 180° - i' + r'$, l'angolo $MRT = RTV = 2r'$, e l'angolo cercato $XPO = VXM = x$, si avrà $540° = 360° - 2i' + 2r' + 4r' + x$ e quindi $x = 2(90° + i' - 3r')$ cioè *il cercato semidiametro apparente nel caso di due riflessioni e due refrazioni, eguaglia la doppia differenza tra la somma degli angoli d'incidenza e retto, e il triplo dell'angolo di refrazione*. Determinate dunque l'incidenza e la refrazione, sarà interamente noto il semidiametro VPO.

66

67

550. Sieno BM, bm due raggi vicinissimi prolungati in S, s, e si conducano i diametri MN, mn: chiamate i ed $i + di$ le loro incidenze, r ed $r + dr$ le corrispondenti refrazioni (501), si avrà $i = CMS = MC\mu$ (L. 414) $= \mu M$ (L. 397), ed $i + di = Cms = mC\mu = \mu M + Mm$, onde $di = Mm$; similmente $r = NMR = \frac{1}{2} NR$, ed $r + dr = nmR = \frac{1}{2} nR = \frac{1}{2}(nN + NR)$, onde $dr = \frac{1}{2} nN = \frac{1}{2} Mm$; dunque $di : dr :: Mm : \frac{1}{2} Mm :: 2 : 1 :: tang\ i : tang\ r$ (502), cioè *nel caso d'una riflessione e due refrazioni, le tangenti d'incidenza e di refrazione son tra loro in ragion dupla*.

66

Di nuovo $i' = \mu M$, $di' = Mm$, $r' = \frac{1}{2}$ NR come sopra, $r' + dr' = \frac{1}{2} nr = \frac{1}{2}(nN + NR - Rr)$, onde $dr' = \frac{1}{2}(Mm - Rr)$; e poichè $Rr = RT - Tt - tr$ ed $RT = RM = Rm + mM$, $Tt = Rr$ (L. 416), $tr = rm$ (547) $= Rr + Rm$, si ha $Rr = Rm + mM - Rr - Rr - Rm = mM - 2Rr$ cioè $Rr = \frac{1}{3} mM$, avremo infine $dr' = \frac{1}{3} Mm$; dunque $di' : dr' :: Mm : \frac{1}{3} Mm :: 3 : 1 :: tang\ i' : tang\ r'$, cioè *nel caso di due riflessioni e due refrazioni, le tangenti d'incidenza e di refrazione sono in ragion tripla*.

67

551. Ora per i raggi rossi nel primo caso si ha $sen\ i : sen\ r :: n (= 1,33333) : 1$ (514); $tang\ i : tang\ r :: m (= 2) : 1$ (550); dunque (L. 660) $tang\ i = \sqrt{\left(\frac{m^2 - n^2}{n^2 - 1}\right)} = \sqrt{\left(\frac{(m+n)(m-n)}{(n+1)(n-1)}\right)} = \sqrt{\frac{3,33333 \times 0,66667}{2,33333 \times 0,33333}} = tang\ 59°$.

67 23′ 28″, e $tang\ r = \frac{1}{2}\ tang\ i = tang\ 40° 12′ 11″$; quindi $x =$ FPO $(= 4r - 2i\ (549)) = 42° 2′$ in circa. Per i raggi paonazzi si ha $n = 1,34568$ (516), $m = 2$ come prima, e quindi $i = 58° 40′ 31″$, $r = 39° 24′ 18″$, ed $x' =$ EPO $=$
65 40° 16′ in circa; dunque *nell' iride primaria* AEB, ove il semidiametro dei raggi rossi FPO supera quello dei paonazzi EPO, *il rosso dee vedersi al di sopra e il paonazzo al di sotto*, come si trova in effetto (546).

Nel secondo caso per i raggi rossi si ha *sen i* : *sen r* : : 1,33333 : 1 ; *tang i* : *tang r* : : 3 : 1 (550); dunque $tang\ i = \sqrt{\frac{4,33333 \times 1,66667}{2,33333 \times 0,33333}} = tang\ 71° 49′ 55″$, e $tang\ r = \frac{1}{3}\ tang\ i = tang\ 45° 26′ 52″$; dunque $x =$ GPO $(= 180° + 2i - 6r\ (549)) = 50° 59′$ in circa. Per i raggi paonazzi *sen i* : *sen r* : : 1,34568 : 1 ; *tang i* : *tang r* : : 3 : 1; $i = 71° 26′ 9″$; $r = 44° 47′ 7″$, ed $x' =$ HPO $= 54° 10′$ in circa; dunque *nell'iride secondaria* CGD, ove il semidiametro dei raggi rossi GPO è minor di quello dei paonazzi HPO, *il rosso dee vedersi al di sotto e il paonazzo al di sopra*, come in effetto succede (546). Dati i seni d'incidenza e di refrazione dei raggi dell'altre specie, si otterrebbe col metodo stesso il semidiametro apparente dei loro archi, e si troverebbe che nell'iride primaria il turchino è immediatamente sopra di E, quindi il celeste ec., come nella secondaria, che l'aranciato è contiguo a G, il giallo all' aranciato ec., tutto coerentemente all'osservazione (546). Se non si distinguon talvolta alcuni dei colori prismatici, bisogna incolparne e la figura imperfettamente sferica delle gocciole, il che turba l'ordinata refrazione e riflessione dei raggi, e il fondo poco oscuro della nuvola piovosa, il che confonde i colori più omologhi come l'aranciato e il giallo, il turchino e il paonazzo ec. Quest'ultima è la ragione per cui non è possibile di veder l'iride in faccia al Sole; quando pur le condizioni tutte della primaria potessero combinarsi in questa situazione, l'occhio colpito dall' estrema vivacità dei raggi solari, non ne avrebbe il minimo sentimento.

552 La larghezza apparente FPE dell'iride primaria sarebbe dunque FPO — EPO $= 42° 2′ - 40° 16′ = 1° 46′$, della secondaria, HPG $=$ HPO — GPO $= 54° 10′ - 50° 59′ = 3° 11′$, e per la distanza apparente dell'una dall'altra si

avrebbe GPF = GPO — FPO = 50° 59′ — 42° 2′ = 8° 57′: ma poichè il Sole riguardato finora come un punto lucido, ha realmente un apparente diametro di 32′, è chiaro che le larghezze dateci da questo punto si estendono di 16′ al di quà e di 16′ al di là di esso, onde la larghezza FPE = 2° 18′, la larghezza HPG = 3° 43′, la distanza GPF = 8° 25′, e i semidiametri EPO = 40°, FPO = 42° 18′, GPO = 50° 43′, HPO = 54° 26′: e tali son le misure che presso a poco si trovano anche col quadrante ordinario allorchè l' iridi son perfette.

553. Supponghiamo ora che gli angoli EPO = 40°, FPO = 42° 18′, GPO = 50° 43′, HPO = 54° 26′ si rivolgano intorno all' asse comune PO; l' estremità E, F, G, H delle rette EP, FP, GP, HP descriveranno dunque sulla nuvola piovosa gli archi circolari AFEB, CHGD il cui centro sarà in O, e tutti i cui punti formeranno nell' occhio P uno stesso angolo respettivo e gli trasmetteranno perciò lo stesso respettivo colore. Ed ecco perchè i colori prismatici veggonsi continuati in archi concentrici, e perchè due Osservatori non veggono mai la stessa iride, giacchè uno stesso circolo non può aver due centri o due assi diversi. S' intende ancora che i colori essendo visibili sotto il solo angolo determinato EPO, FPO ec., il quale si altera subito che l' Osservatore si muove, l' iride veduta in movimento sarà sempre nuova, e fuggirà chi la segue e seguirà chi la fugge.

554. Infine sia un semidiametro qualunque EPO = s e l' altezza del centro del Sole IPO = x; sarà EPI = $s - x$ l' altezza dell' iride, e poiche è retto l' angolo POE fatto dall' asse PO e dal semidiametro OE, avremo PIO = 90° — x e l' iride farà con l' orizzonte PI un angolo EIP = 90° + x (L. 425). Dunque 1°. se il Sole spunti dall' orizzonte, sarà $x = 0$, onde EPI = s ed EIP = 90°, cioè l' altezza dell' iride eguagliando il semidiametro, e facendo EI con l' orizzontale PI un angolo retto, l' arco colorato sarà un intero semicircolo normalmente appoggiato sull' orizzonte: 2°. se il Sole sia alto, per esempio, di 20°, si avrà $x = 20°$, onde EPI = $s - 20°$. ed EIP = 110°, cioè l' altezza dell' iride essendo minore del semidiametro, e facendo EI con l' orizzontale PI un angolo ottuso, l' arco colorato sarà più piccolo del semicircolo, e comparirà inclinato all' orizzonte opposta-

65 mente allo spettatore: 3°. se sia successivamente $x = 42°$ $18'$, $x = 54° 26'$, sarà pur successivamente $FPI = 0$, $HPI = 0$ (552), cioè i corrispondenti archi dell'iride non avranno altezza alcuna sull'orizzonte, e quindi per tutto il tempo impiegato dal Sole a salire da questi punti allo zenit, e a scendere dallo zenit a questi punti, non potrà vedersi iride o primaria o secondaria nel Cielo.

PARTE SECONDA.

TEORÌA DELLE MACCHINE OTTICHE

Natura delle Macchine Ottiche.

555. Tutto ciò che supposta la presenza della luce, rende visibile un oggetto o lo altera in qualche modo nella grandezza, nella positura o nella distanza, dicesi *Macchina Ottica*. Così l'occhio sano che in virtù della sua prodigiosa struttura, trasmette all'anima le distinte immagini degli oggetti e le rovescia (447); così l'acqua limpida che aumenta il diametro d'una porzion di cilindro immersovi obliquamente, che vi produce una sensibilissima piegatura e lo accosta alla superficie (534), sono due vere macchine ottiche, quantunque non sogliano ordinariamente ridursi a questo genere.

556. Ma poichè dei varj fini a cui può destinarsi una macchina ottica, il più interessante è l'aumento delle forze visive; perciò la teorìa, benchè si diriga talora anche all'opposte ricerche, si occupa principalmente in determinare non come possa impiccolirsi o allontanarsi un dato oggetto, ma per quali mezzi all'incontro o si ingrandisca se è troppo piccolo, o si avvicini se è troppo remoto, conservandogli, quando pure occorra, la sua natural situazione.

557. Una macchina ottica ha dunque per fondamento la presenza d'una luce e l'esistenza d'una forza visiva; è inutile nelle tenebre perfette e nella completa cecità: ma supposto del lume e della sensibilità nei nervi analoghi, ella ha lo stupendo potere di cangiar la distanza e le dimensioni

mensioni dei varj oggetti, e per questo stesso di aprir la strada a una folla di scoperte che l'uomo cieco e l'occhio *disarmato* non avrebbero mai potute fare.

Dalla diversa combinazione delle lenti e degli specchi può aversi un'infinità di macchine ottiche, ma le principali e più comuni sono l'*Occhio*, l'*Occhiale*, il *Canocchiale* o *Teloscopio* e il *Microscopio*. La loro forza, o in generale i loro effetti, variano al variar delle combinazioni o di altre circostanze essenziali, come farà veder chiaramente la particolar teorìa di ciascheduna.

Occhio.

558. Il *nervo ottico* è l'istrumento fondamentale della visione (557); fabbricato in modo che le molecule lucide, per tutti gli altri nervi inefficaci, vivamente lo scuotano, egli solo può trasmetterne all'anima le impressioni con le corrispondenti idee degli oggetti visibili; ond'è che introdottosi nel *globo* ROR dell'occhio per una tenue apertura O, col suo esteriore integumento o *dura madre*, forma il recinto o *tunica sclerotica* SS; coll'integumento seguente o *pia madre*, produce la *tunica coroide* KK; e con la sostanza più delicata o *midolla*, si spande in quell'intreccio reticolare RR che si chiama la *retina* e con cui interiormente vien terminato l'involucro dell'occhio. Su questa base fu ideata da Dio la macchina sorprendente di cui parliamo; poichè quantunque il dare ad un nervo la capacità di sentir l'impulso delle molecule quasi infinitesime della luce (434) e il forzarlo a stendersi in una gran superficie per accrescerne il sentimento, sia già l'essenziale della visione; vi volea però molto di più per produrre il completo fenomeno della visione distinta. Bisognava 1°. risparmiare al possibile la delicatezza estrema del nervo, onde e non cagionasse dolore e non incallisse appoco appoco sotto il flagello continuato dei raggi lucidi; 2°. riunir questi raggi sempre divergenti (442) in un sol punto, onde venendo da limitata ma varia distanza, formassero sempre ben terminate sulla retina o sulla coroide l'immagini degli oggetti (445); senza contar poi che la macchina esigeva nel tempo stesso e semplicità, onde non disperdesse la luce (473), e mobilità, onde l'animale

68

68 senza fatica se ne valesse, e custodia, onde l'azione dei corpi esterni a cui doveva esporsi, non la guastasse sì facilmente.

559. A tutto divinamente provvide la sapienza infinita del Creatore: Primieramente nella coroide KVVK fece un apertura rotonda P, che si chiama la *pupilla*, e per questa sola permise alla luce di penetrar nell'interno dell'occhio; circondò la pupilla con l'*uvea* VV, gruppo mirabile di fibre circolari e rettilinee con tal' arte intessute, che stirando le circolari, si allentano le rettilinee e la pupilla si stringe, mentre all'incontro forzate le rettilinee, si rilasciano le circolari e la pupilla si dilata; infine vestì la coroide d'una *tunica vasculare* donde per mille sottilissimi vasi trasuda un umore che tinge in nero o in bruno assai cupo la *tunica vellutata* su cui posa la retina: ciò che ha servito poi di modello all'industria degli uomini per annerire le interne pareti dei canocchiali e delle camere oscure. Così la pupilla limitò l'ingresso alla luce, l'uvea rese variabile, secondo la forza e quantità del lume, la grandezza della pupilla, e il nero interiore della coroide assorbendo i raggi irregolarmente venuti (506), impedì le riflessioni che avrebbero turbata la schiettezza delle immagini: tutto contribuiva, benchè per anche da lungi, alla grand'opera della visione distinta.

560. Per perfezionarla immaginò Dio una lente composta, ma d'un artifizio sì particolare e sì perfetto, che la fina teorìa e la lunga pratica degli Ottici più valenti appena ha potuto ai nostri giorni avvicinarvisi. Fece nascere alle due estremità della sclerotica SS una tunica trasparente e molto convessa CC, chiamata *cornea* in cui termina l'esteriore dell'occhio, e riempì tutto il vuoto tra CC e TT di un umore limpidissimo AA che per la sua somiglianza con l'acqua dicesi *umore aqueo*; quindi sospese dietro alla pupilla una lente convesso-convessa TT di raggi ineguali e di un umore più solido e più denso del primo, detto l'*umor cristallino*, e fecè occupare ad un terzo *umor vitreo* EE men solido del cristallino, ma più viscoso e quasi egualmente denso che l'aqueo, la rimanente cavità dell'occhio da TT fino ad O. In tal guisa la cornea e l'umore aqueo formano un menisco, un altro ne forma l'umor vitreo, il cristallino è chiuso tramezzo a loro, e il tutto insieme costituisce la lente composta da cui risulta

distintissima la visione. In fatti oltre il vantaggio che la prominenza della cornea procura all'occhio, facendogli abbracciare colla vista uno spazio o *campo* non minore d'. un angolo retto, tale è poi l'economìa delle quattro refrazioni che soffre la luce nell'attraversar la cornea e i tre fluidi contigui, che non solo la divergenza o il parallelismo dei raggi è cangiato in convergenza, onde nell' atto di toccar la retina si riuniscono insieme in un sol punto: ma di più, correggendosi le refrazioni scambievolmente fra loro, ciascuna immagine si presenta nettissima e senza quell' *iridi* o colori prismatici che la varia rifrangibilità dei raggi necessariamente produce nelle lenti semplici (545). E' vero che queste immagini son rovesciate: ma ciò senza pregiudicar punto alla legittima percezion degli oggetti che la lunga esperienza ci mostra sempre nella loro natural positura, giova poi assaissimo ad evitar l'indebolimento e la dispersion della luce: si vedrà (583, 584) con quanto scapito di campo e di chiarezza giungano gli ottici a raddirizzare un'immagine che l'intersezion dei raggi in certe macchine ha rovesciata; e facilmente s'intende che Dio non avrebbe mai moltiplicato a pura perdita il meccanismo dell'occhio.

561. Restava però tuttora una grande imperfezione a questa macchina; poichè supposto che i raggi lucidi si fossero esattamente riuniti alla retina quando l'oggetto ne era distante, per esempio, di 8 pollici, cangiata in più la distanza, non sarebbe stato possibile di riunirvegli, e la visione distinta avrebbe avuto il limite indivisibile d'un sol punto. Più mezzi adoprò il Creatore perchè si vedessero distintamente gli oggetti entro un più ampio confine: formò nella maggior parte degli animali la sclerotica assai flessibile per cagionare una mutazion di figura a tutto il globo dell'occhio, onde potesse ora accorciarsi ed ora allungarsi: attaccò l'umor cristallino a dei ligamenti che or distratti ed ora slentati, non solamente lo accostassero o lo rimovessero dalla pupilla, ma ne rendessero anche or più grande ed or più piccola la convessità: infine concesse un' azione al primo e più ampio anello o fibra circolare dell' uvea (559), il quale appartenendo egualmente alla cornea, la costringe a rialzarsi quando egli si contrae, e a comprimersi allorchè si rilascia. Ora è manifesto che tanto il moto della retina e del cristallino, quanto il cangiamento

del cristallino e della cornea, eseguiti quasi senza avvedersene dall'animale, renderanno in ragion delle diverse distanze sì ben misurata la convergenza dei raggi lucidi, che il punto di riunione sarà sempre sul nervo ottico e produrrà sempre la visione distinta dentro i limiti assegnati alla forza dell'occhio.

Tale è l'essenziale artifizio della macchina lavorata da Dio; al che se si aggiunga il piccol numero e la stabilità dei pezzi che vi impiegò, il vario e facile movimento che per mezzo di sei muscoli le concesse, e i ripari delle palpebre, delle tempie, del naso e delle ciglia con cui la munì d'ogni intorno, si converrà senza pena che non hanno gli Ottici un più perfetto originale su cui dirigere i loro studj; e che intanto le loro invenzioni potranno meritar qualche stima, in quanto si accosteranno più da vicino all'eccellenza di questo esemplare.

Occhiale.

562. Allorchè la struttura dell'occhio o la soprabbondanza degli umori incurvano più del giusto il cristallino o la cornea, i raggi a', b' della loro sfericità divengon minori dei raggi a, b della sfericità ordinaria dell'occhio perfetto (L. 509); e poichè $\frac{abqy}{(a+b)(p-q)y-abq} > \frac{a'b'qy}{(a'+b')(p-q)y-a'b'q}$, cioè la lunghezza focale (538) dell'ultimo supera quella del primo: se i raggi lucidi si riuniscono esattamente sulla retina dell'uno, anticiperanno la riunione nell'altro e la visione sarà confusa. Avverrà l'opposto qualora il cristallino per mancanza di umori si appiani oltre al dovere, ed a', b' essendo allora maggiori di a, b, la lunghezza focale in quest'occhio supererà quella dell'occhio ordinario, onde i raggi lucidi giungendo alla retina o tuttor divergenti o non affatto riuniti, la visione sarà del pari confusa. Il primo vizio suol manifestarsi in gioventù, e diconsi *miopi* gli occhi che vi son soggetti; il secondo è comune all'età provetta e l'occhio in tal caso si chiama *presbita*: le lenti concave sono il rimedio dell'uno, le convesse dell'altro, e quelle e queste prendono allora il nome d'*Occhiali*. Per mostrar-

ne compiutamente gli effetti, ricerchiamo le generali proprietà della visione attraverso alle lenti.

563. Già si sa che se la grossezza della lente sia zero, l'immagine veduta col mezzo d'una lente piano-piana LL eguaglia l'oggetto (541): ma non è così se si calcoli la grossezza HK. Siano $OG = g$, $IM = g'$ le lineari grandezze dell'oggetto e dell'immagine; $OCG = a$, $ICM = b$ le lor grandezze apparenti; $EH = y$, $CK = e$ le distanze dell'oggetto OG e dell'occhio C dalla lente, ed $HK = c$ la grossezza di essa; sarà dunque $EC = y + c + e$ la distanza dell'oggetto dall'occhio, $AK = \frac{cq + py}{p}$ la distanza dell'immagine dalla lente (541), ed $AC = e + \frac{cq + py}{p} = \frac{ep + cq + py}{p}$ la distanza dell'occhio dall'immagine che sempre è di là dalla lente (541).

69

Ora poichè i raggi incidenti OB, GD son paralleli agli emergenti NC, PC (503), saranno simili i triangoli OFG, ICM, onde $OG : IM :: EF : AC$, ovvero (fatta HC ovvero $c + e : HF :: m : n$ e perciò $HF = \frac{n(c + e)}{m}$ ed $EF = y + \frac{n(c + e)}{m}$ ove per la natura della refrazione (439) è sempre $m > n$) si avrà $g : g' :: y + \frac{n(c + e)}{m} : \frac{ep + cq + py}{p}$: ma quando l'immagine è assai piccola in confronto della sua distanza dall'occhio, abbiamo (451) $a : b :: \frac{g}{y + c + e} : \frac{g'p}{ep + cq + py}$; dunque $a : b :: \frac{y + \frac{n}{m}(c + e)}{y + c + e} : 1 :: my + n(c + e) : my + m(c + e)$; dunque poichè $m > n$, anche $b > a$, cioè *l'occhio per una lente piana di sensibil grossezza vedrà l'oggetto maggior del vero*.

564. Se nell'equazione $b = \frac{amy + am(c + e)}{my + n(c + e)}$ si faccia $e = 0$, sarà $b = \frac{amy + amc}{my + cn}$, valore più piccolo del primo; e se si faccia $y = 0$, sarà $b = \frac{am}{n}$, valore più grande del primo; cioè quando la lente tocca l'occhio,

l' immagine è la minima, e quando tocca l'oggetto, è la massima. Che se si faccia $y = \infty$, sarà $b = a$, e se si faccia $e = \infty$, sarà $b = \frac{am}{n}$, cioè quando l'oggetto è lontanissimo dalla lente non vi è differenza tra l'oggetto e l'immagine, e la lente piana cessa d'esser macchina; ma quando la lente è lontanissima dall'occhio, l'immagine è la massima. Avendosi in oltre $EC = y + c + e$, $AC = \frac{ep + cq + py}{p}$ ed $y + c + e > \frac{ep + cq + py}{p}$, è manifesto che *la lente piana di sensibil grossezza avvicina l'oggetto all'occhio* ed è facile il dimostrare che lo rende anche più chiaro; imperocchè se sia C un punto lucido dell'oggetto, e OG la larghezza della pupilla, tutti i raggi tra CN e CP saranno introdotti nell'occhio dalla lente LL, tolta la quale è perduto per lui quanto vi è di luce tra QO e GR.

69

La lente piana è dunque una macchina ottica: ma l'occhiale che volesse comporsene, sarebbe di molto incomodo per la grossezza che ella esige, e di pochissimo vantaggio per la troppa vicinanza dell'occhio. Tra le curiosità ottiche si trovano delle *lenti poliedre* cioè sfaccettate da una parte e piane dall'altra: i raggi venuti da un medesimo punto lucido soffrono in ciascuna faccia una diversa refrazione e giungono all'occhio come se procedessero da punti diversi; di quì è che ciascun punto dell'oggetto, e perciò anche l'oggetto medesimo, per mezzo della lente poliedra si vede moltiplicato (447). Gli occhiali piani di color giallo sono un trastullo puerile: più vantaggiosi possono essere i verdi; poichè quantunque le lenti piane e sottili onde son fatti, tolgan loro l'essenza delle macchine ottiche (541), il verde però come colore intermedio (505), è attissimo a conservar la vista e a difender la retina dall'impressione troppo violenta o troppo continuata dei raggi riflessi del Sole ec.

565. Venghiamo ora alle lenti concave, e ritenendo le denominazioni di sopra, sia al solito la grossezza eguale a zero ed f la principal lunghezza focale: sarà dunque $y + e$ la distanza dell'oggetto dall'occhio, $\frac{fy}{f+y}$ la di-

stanza dell'immagine dalla lente (543), ed $e + \frac{fy}{f+y} = \frac{ef+ey+fy}{f+y}$ la distanza dell' occhio dall'immagine che è sempre al di là della lente (538). Se dunque l'immagine in paragone della sua distanza dall'occhio sia assai piccola, avremo (451) $a : b :: \frac{g}{y+e} : \frac{g'(f+y)}{ef+ey+fy}$: ma (540) $g : g' :: 1 : \frac{f}{f+y}$; dunque $a : b :: \frac{1}{y+e} : \frac{f}{ef+ey+fy} :: ey + f(y + e) : f(y+e)$; dunque poichè $ey > 0$, anche $a > b$, cioè *l'occhio per mezzo d'una lente concava vedrà l'oggetto minor del vero*.

566. Se nell'equazione $b = \frac{af(y+e)}{ey+f(y+e)}$ si faccia $e = 0$ ovvero $y = 0$, sarà $b = a$, cioè quando la lente tocca l'occhio o l'oggetto, l'immagine eguaglia l'oggetto, e la lente concava non è più macchina. Ma se $e = \infty$ ovvero $y = \infty$, sarà $b = \frac{af}{y+f}$ ovvero $b = \frac{af}{e+f}$, valori che essendo più piccoli di $\frac{af(y+e)}{ey+f(y+e)}$, ci dimostrano che quando l'occhio o l'oggetto son lontanissimi dalla lente, l'immagine è la minima. Essendo inoltre $y + e > \frac{ef+ey+fy}{f+y}$, è manifesto che la lente concava accosta l'oggetto all'occhio: attesa però la maggior divergenza che in essa acquistano i raggi (531), toglie molta luce alla pupilla, onde per una ragione opposta all'apportata di sopra (564), rende l'oggetto men chiaro.

567. Intanto a questa divergenza debbono i miopi il miglioramento della lor vista; poichè impedendosi con una lente concava la troppo rapida riunione dei raggi, se la concavità sia proporzionata al particolar vizio del miope, i coni lucidi prolungheranno il vertice fino alla retina e la visione diverrà distinta. Già s'intende che per gli oggetti assai vicini, i quali inviano divergentissimi i loro raggi e non gli lasciano riunir sì presto, l'occhio miope non ha bisogno di macchina: ma quando l'oggetto si trovi a qual-

che intervallo dall' occhio onde i suoi raggi poco divergenti e quasi paralleli vi convergano in fretta, allora la macchina giocherà con successo, e ad onta della luce dispersa e dell'immagine impiccolita, mostrerà l'oggetto distintamente.

568. Son più varj i fenomeni delle lenti convesse. Supposto un oggetto la cui distanza dalla lente sia minore della principal lunghezza focale f, e ritenute al solito le denominazioni di sopra, sarà $y+e$ la distanza dell'oggetto dall'occhio, e poichè per ipotesi $f>y$, sarà $\frac{fy}{f-y}$ la distanza dell'immagine dalla lente (543) ed $e+\frac{fy}{f-y}=\frac{ef+fy-ey}{f-y}$ la distanza dell'occhio dall'immagine, che in questo caso è di là dalla lente (538). Ripetuto pertanto il precedente raziocinio (565), avremo $a:b::f(y+e)-ey:f(y+e)$; dunque poichè $o>-ey$, anche $b>a$, cioè *l'occhio per mezzo d'una lente convessa vedrà in questo caso l'oggetto maggiore del vero.*

569. Se nell'equazione $b=\frac{af(y+e)}{f(y+e)-ey}$ si faccia $e=o$ ovvero $y=o$, sarà $b=a$ come sopra (566), e la lente convessa non è più macchina: ma se $e=\infty$, sarà $b=\frac{af}{f-y}$, valore, che superando $\frac{af(y+e)}{f(y+e)-ey}$, dimostra che quando l'occhio è lontanissimo dalla lente si ha la massima immagine. Essendo poi $\frac{f(y+e)-ey}{f-y}>y+e$, è manifesto che la lente convessa allontana l'oggetto dall'occhio; ma attesa la minor divergenza dei raggi, cioè per la ragion contraria alla già portata per le lenti concave (566), lo rende anche più chiaro.

570. Questa minor divergenza giova mirabilmente al presbita che vedendo assai bene un oggetto lontano perchè i suoi raggi quasi paralleli hanno bisogno di poca refrazione per riunirsi alla retina, non distingue poi gli oggetti i più vicini, la divergenza de' cui raggi non può esser

esser vinta dalla debole convessità del cristallino. Una lente convessa rimedia al disordine, mentre inviando all'occhio i raggi molto più convergenti dei naturali, forza il cono lucido ad accorciarsi e ad appoggiare il suo vertice sulla retina, dal che nasce, come tante volte si è detto, la visione distinta.

571. Fin quì abbiamo supposto $f > y$ (568): ma se sia $y > f$ cioè $Eu > u$F l'immagine F sarà sempre di quà dalla lente, ed ora potrà esser l'occhio tra la lente e l'immagine, per esempio in N, ora di là dall'immagine, per esempio in ϕ. Nel primo caso (in cui però la visione per un occhio sano è confusa perchè vi entrano assai convergenti i raggi (538) che la sua struttura esige o divergenti o paralleli (560)), sarà $u\mathrm{F} = \frac{fy}{y-f}$ la distanza dell'immagine dalla lente (543), ed $u\mathrm{F} - \mathrm{FN} = \frac{fy}{y-f} - e = \frac{f(y+e)-ey}{y-f}$ la distanza dell'occhio dall'immagine, onde $b = \frac{af(y+e)}{f(y+e)-ey}$ e l'ingrandimento dell'oggetto si avvererà come prima (568); di modo che se $y = f$ (nel qual caso i raggi entrano paralleli nell'occhio (538) e la visione è distinta (560)), sarà $f(y + e) - ey = f^2$ ed $a : b :: f^2 : f(e+f) :: f : e+f$, cioè l'immagine diverrà maggiore a misura che $e+f$ supererà f o che l'occhio si allontanerà dalla lente, purchè resti sempre tra la lente e l'immagine.

70

572. All'incontro se essendo $y > f$, l'immagine F sia tra l'occhio ϕ e la lente VV, avremo $\mathrm{FN} = e - \frac{fy}{y-f} = \frac{ey-f(y+e)}{y-f}$ per la distanza dell'occhio dall'immagine, e quindi $a : b :: ey - f(y+e) : f(y+e)$, ove posto $y = \infty$, sarà $a : b :: e-f : f$, onde se $e > 2f$, sarà $e-f > f$ ed $a > b$; se $e < 2f$, sarà $a < b$; e se $e = 2f$, sarà $a = b$, cioè *l'immagine d'un oggetto lontanissimo comparirà minore, maggiore o eguale all'oggetto, secondochè la distanza dell'occhio della lente sarà maggiore, minore o eguale al doppio della principal lunghezza focale*. Si troverà facilmente che se l'occhio fos-

se tra là lente e l'immagine, ed y come sopra $= \infty$, si avrebbe $a : b :: f - e : f$, onde generalmente $a : b :: f \infty e : f$.

Raccogliendo per maggior comodo in una tavola tutti questi risultati, e chiamando e ed i le distanze dell'*occhio* e dell'*immagine* della lente, si avrà:

	Supposizioni	Risultati
1.	$y < f$	$a : b :: \quad f(y+e) - ey : f(y+e)$
2.	$y > f$ ed $e \lesseqgtr i$	$a : b :: \pm f(y+e) \mp ey : f(y+e)$
3.	$y = f$	$a : b :: \quad f : e + f$
4.	$y = \infty$ ed $e \gtreqless i$	$a : b :: \pm e \mp f : f$

573. Infine l'immagine si avrà dalle lenti diritta o rovesciata relativamente all'oggetto, quando essi saranno o dalla parte medesima o l'una al di quà e l'altro al di là della lente, nel quale ultimo caso solamente può avvenire l'intersezione dei raggi (446). E si osservi che se gli occhiali convessi situati nel loro luogo ordinario non rovescian l'immagine, ciò succede perchè $e < \frac{fy}{y-f}$ come dicemmo (571) cioè l'occhio riceve i raggi lucidi prima che si sieno intersecati. Per veder l'immagine rovesciata conviene che ella cada tra l'occhio e la lente (572) onde si abbia $e > \frac{fy}{y-f}$; e poichè l'intervallo e nella comune situazion degli occhiali è molto piccolo, dovrebbe $\frac{fy}{y-f}$ esserlo anche di più, il che esigendo una convessità mostruosa e fuori d'uso, non bisogna stupirsi se coi comuni occhiali un oggetto si mostra sempre nella sua natural positura.

Canocchiale.

L'ingrandimento dei lontanissimi oggetti ottenuto dalle semplici lenti convesse (572), non si trovò tanto sensibile da valersene con successo nell'immensa distanza degli Astri e nei tratti sterminati dell'Oceano e della Terra. Fu dunque pensato a dei sistemi di lenti variamente combinate, cioè a macchine ottiche più composte e perciò più efficaci, onde oltrepassare i limiti in cui son ristrette le semplici. Questi sistemi portano il nome di *Canocchiali*; le canne o tubi in cui stanno le lenti, sono interiormente anneriti (559) e possono slungarsi ed accorciarsi a piacere (561), la lente situata alla più ampia estremità del canocchiale e più vicina all'oggetto, si chiamà *objettivo*, l'altre più prossime all'occhio, in qualunque numero sieno, diconsi *oculari*, e non è l'esterior dimensione dei tubi, ma la principal lunghezza focale dell'objettivo che determina la *lunghezza* del canocchiale.

574. Il miglior sistema (a cui si riducono tutti quelli che sono in uso) porta un objettivo convesso VV con un oculare parimente convesso C'C', e dagli Astronomi che anche oggidì se ne vagliono, fu detto *Astronomico*. Sieno $Eu = y = \infty$ ed $uO' = e$ le distanze dell'oggetto remotissimo GG e dell'occhio O' dall'objettivo VV la cui principal lunghezza focale sia $uF = f$, e si suppongano al solito a, b l'apparenti grandezze dell'oggetto e dell'immagine. Poichè $y = \infty > f$ e l'immagine in F è tra l'occhio O' e la lente VV cioè $e > i$ (572), avremo (572 4°.) $a : b :: e - f : f$ e perciò $b = \frac{af}{e-f}$. Ora se l'oculare C'C' si collochi di quà da F in p talmente che il fuoco stesso F di VV ne sia il fuoco principale, i coni lucidi attraversando C'C' si cangieranno in cilindri, cioè i raggi di ciascun punto dell'immagine F usciranno paralleli (538 . 6°) e l'immagine stessa diventerà per l'occhio O' un nuovo oggetto la cui immagine uscita per C'C', si allontana all'infinito. Poste dunque $Fp = y'$ ed $O'p = e'$ le distanze dell'oggetto F e dell'occhio O' dall'oculare C'C', la cui principal lunghezza focale $Fp = y' = f$, saranno $b \left(= \frac{af}{e-f}\right)$ e b' le

70

70 grandezze apparenti del nuovo oggetto e della sua immagine; onde poichè $y' = f'$ e l'occhio O' è tra la lente C'C' e l'immagine infinitamente distante, si avrà (571 . 572 . 3°) $\frac{af}{e-f} : b' :: f' : e' + f'$, e perciò $b' = \frac{af(e' + f')}{f'(e-f)}$; ma $e' + f' = O'p + pF = O'F = O'u - uF = e - f$; dunque $b' = \frac{af}{f'}$, ed $a : b' :: f' : f$ cioè *nel canocchiale astronomico la grandezza apparente dell'oggetto sarà a quella dell' immagine come la principal lunghezza focale dell'oculare a quella dell' objettivo.*

575. Dunque 1°. giacchè nell' equazione $b' = \frac{af}{f'}$ non entra la distanza della lente dall'occhio, l'immagine conserverà la stessa apparente grandezza ovunque egli si collochi. Per altro la sua miglior situazione sarà nel punto O' poco sotto al fuoco f' della lente C'C', ove riceverà tutti quasi i cilindri di luce, i quali forzati dalla refrazione ad intersecarsi, occupano necessariamente un piccolo spazio $O'f'$, d'onde poi cominciando a divergere entrerebbero in minor quantità nella pupilla, ed il *campo* o area visibile diminuirebbe.

576. Dunque 2°. giacchè $a : b' :: f' : f$, e in due lenti *isosceli* convesso-convesse dei raggi r, r', si ha $f = r$, $f' = r'$ (542), quanto r sarà maggior di r', tanto l'apparente grandezza dell'immagine supererà quella dell'oggetto; e se l'objettivo sia piano-convesso, onde $f = 2r$ (542), l'immagine comparirà ancor più grande.

577. Dunque 3°. supposto $r > r'$ ovvero $f > f'$, se il canocchiale si rovesci, onde l' objettivo VV divenga oculare e l'oculare C'C' divenga objettivo, si avrà $O'p = y = \infty$, $pF = h$, $Fu = h'$, $Ep = e$, $Eu = e'$, e in forza del raziocinio di sopra (574), $a : b' :: h' : h$; ma $h = f'$, $h' = f$ e per ipotesi $f > f'$; dunque $h' > h$ ed $a > b'$, cioè l'immagine comparirà più piccola dell'oggetto nella ragion medesima in cui col canocchiale diritto comparisce più grande. Non è così se l'oggetto O' si avvicini tanto alla lente, che sia $O'p = y' = f'$. E' facile di conoscere che allora l'immagine ingrandirà. Lo vedremo parlando del Microscopio.

578. Dunque 4°. l' immagine essendo insomma lo stesso oggetto più o meno avvicinato, le lineari grandezze

g', g dell' una e dell' altro sono assolutamente eguali e perciò (452) $a : b' :: d' : d$: ma $a : b' :: f' : f$ (574); dunque $d' : d :: f' : f$ cioè *le distanze dell' immagine e dell' oggetto sono come le principali lunghezze focali dell' oculare e dell' objettivo*. Quindi *il canocchiale rovesciato mostrerà l' immagine non solo più piccola* (577) *ma anche più remota* nella ragione di h' ad h ovvero di f ad f'.

579. Dunque 5°. se si rifletta che per l' occhio inerme tanta è la chiarezza c dell' oggetto, quanta è la luce che può entrar nell' area $n^2\pi$ (L. 520) della pupilla, mentre per l' occhio armato è tanta la chiarezza c' dell' immagine quanta è la luce che penetra nell' *apertura* o area $m^2\pi$ dell' objettivo, converrà concludere $c : c' :: n^2 : m^2$, cioè *le chiarezze dell' oggetto e dell' immagine saran tra loro come i quadrati dei raggi dell' apertura della pupilla e dell' objettivo*. Onde se con due telescopj d' ineguali dimensioni, ma di eguale struttura e bontà, si osservi da un luogo stesso uno stesso oggetto, si avrà (574) $\frac{b'}{a} = \frac{f}{f'}$, $\frac{\beta'}{a} = \frac{\varphi}{\varphi'}$, e $b' : \beta' :: \frac{f}{f'} : \frac{\varphi}{\varphi'}$; perciò le chiarezze c', k' dell' immagini che davano l' analogia $c' : k' :: \frac{cm^2}{n^2} : \frac{c\mu^2}{n^2} :: m^2 : \mu^2$, essendo ora di più in ragione inversa dei quadrati delle lor grandezze $\frac{f}{f'}$, $\frac{\varphi}{\varphi'}$ (443), troveremo $c' : k' :: \frac{\varphi^2 m^2}{\varphi'^2} : \frac{f^2\mu^2}{f'^2} :: \frac{f'^2 m^2}{f^2} : \frac{\varphi'^2\mu^2}{\varphi^2}$, cioè *le chiarezze delle due immagini sono come il quadrato delle principali lunghezze focali degli oculari, moltiplicato per il quadrato dei raggi dell' apertura dell' objettivo e diviso per il quadrato delle principali lunghezze focali dello stesso objettivo*.

580. Dunque 6°. giacchè i raggi trasmessi da ciascun punto dell' oggetto escono paralleli dalla lente C'C', l' immagine sarà veduta distintamente dall' occhio sano (561) e dal presbita (570), ma riuscirà confusa per l' occhio miope, nè diverrà distinta per lui se l' oculare C'C' non si avvicini alquanto all' objettivo VV, onde i raggi uscendo da C'C' divergenti (538), vadano a riunirsi esattamente sulla sua retina (567).

70

581. Dunque 7°. giacchè i raggi dei coni lucidi si

70 segano in F, l' immagine vi si rovescierà (573), onde l' occhio che la riceve di quà da F in O' la vedrà rovesciata.

582. Se quest' ultima proprietà del canocchiale astronomico giova (560) all' osservator celeste poco sollecito del rovesciamento degli astri, confonde in molti casi il terrestre che più non ravvisa certi oggetti allorchè gli si presentano rovesciati. In due modi specialmente possono raddirizzarsi l'immagini, e da ciascuno di essi è nato un nuovo sistema di lenti o canocchiale. Il primo o inventato o con gran successo adoperato dal Galileo, fu detto *Galileano* in cui alla lente convessa C'C' si sostituisce la concava LL che come C'C', ha il suo fuoco in F, con questa sola differenza che C'C' perchè convessa, era al di quà del fuoco, ed LL perchè concava, ne è al di là. Con ciò, ritenute le denominazioni di prima (574), osservando che O'N $= e'$, che l' apparente grandezza della nuova immagine è $-b'$, e che NF $= f' = -y'$, mentre nella costruzion della formula (565) si suppose di là dalla lente ciò che ora è di quà, avremo (566) $-b' = \frac{bf'(e'-f')}{-e'f'-f'^2+e'f'}$, ovvero $b' = \frac{b(e'-f')}{f'}$, ovvero sostituito a b il suo valore $\frac{af}{e-f}$ (574), $b' = \frac{af(e'-f')}{f'(e-f)}$: ma $e' - f' =$ O'N $-$ NF $=$ FO' $=$ O'u $-$ uF $= e - f$; dunque $b' = \frac{af}{f'}$ come sopra (574).

583. Dunque anche in questo canocchiale può collocarsi l'occhio ove piace (575): ma poichè i cilindri lucidi escono dalla lente LL assai divergenti (531), quanto la pupilla ne sarà più distante, tanto men di cilindri potrà ricevere e tanto sarà più piccolo il campo: quindi il luogo più vantaggioso per l' occhio è il punto o vicinissimo alla lente. Tutte l' altre proprietà dell' Astronomico (576....580) convengono al telescopio Galileano, ma non si vedrà in questo l'immagine rovesciata, perchè i raggi in luogo di riunirsi in F ove l'inversione accaderebbe, se ne discostano all' uscir dalla lente insieme coi cilindri di cui son parte, e non permettono all' immagine di rovesciarsi. Intanto siccome crescendo la lunghezza focale f, cresce anche l'apparente grandezza o angolo $b' = \frac{af}{f'}$, onde la pupilla tuttochè situata in

o, riceve una quantità sempre più piccola di quei cilindri, e si ristringe anzi a misura della maggior copia di luce (559), è chiaro che *in questo sistema di lenti non possono mai star bene insieme la chiarezza dell'oggetto, la lunghezza del telescopio e l'ampiezza del campo*. Questo difetto ha ributtati gli Astronomi, e quel canocchiale con cui Galileo fece nel Cielo delle scoperte sì sorprendenti, non si usa ormai che nei Teatri, ove basta una piccola lunghezza focale per avere in un giusto campo un sufficiente ingrandimento.

584. Nel secondo sistema che può variarsi infinitamente, si uniscono più oculari C′C′, C″C″, C‴C‴ ec. talmente disposte che l'immagine FH dell'oggetto EG ($=a$) fatta dalla prima lente VV divenga oggetto per la seconda C′C′, e la nuova immagine $f'h'$ divenga oggetto per la terza C″C″ e così di seguito. Poste le distanze focali uF, pf', sf'', tf''' ec. $= x, x', x'', x'''$ ec. ed Eu, Fp, $f's$, $f''t$ ec. $= y, y', y'', y'''$ ec., si avrà (540) $uE : EG :: uF : FH = \frac{ax}{y}$; $pF : FH :: pf' : f'h' = \frac{axx'}{yy'}$ e proseguendo, sarà generalmente dopo $n+1$ lenti, cioè dopo n oculari $f^{(n)}h^{(n)} = a \times \frac{xx'x''\ldots x^{(n)}}{yy'y''\ldots y^{(n)}}$, ove si osservi 1°. che la sola y quì necessariamente è positiva, mentre le y', y'' ec. e le x, x', x'' ec. possono essere o positive o negative, purchè però siano positivi i valori $x+y'$, $x'+y''$ ec., i quali esprimono le distanze tra lente e lente (538. 6°), e possono solamente divenir zero quando le lenti sono al contatto: 2°. che quando son negative le x o le y (e queste seconde lo sono ogni volta che $x > x+y'$, $x' > x'+y''$ ec. cioè la distanza focale eccede quella delle due lenti contigue), son negative le quantità $\frac{x}{y'}$, $\frac{x'}{y''}$ ec. e l'immagine allora non si rovescia, anzi nemmeno è reale (486), non vi essendo unione di raggi. 3°. perciò il solo numero delle *immagini reali* determina la situazione o diritta o rovescia dell'ultima presentata all'occhio, secondo che questo numero è pari o impari: 4°. che quando una delle y (quì suppongo convesse tutte le lenti) eguaglia la distanza fo-

70

cale della lente, per esempio $y^{(m)} = f^{(m)}$, la corrispondente $x^{(m)} = \infty$ (538) e quindi i raggi emergendo paralleli, cadono tali sulla lente che segue, onde $y^{(m+1)} = \infty$ e la corrispondente $x^{(m+1)} = f^{(m+1)}$ ec. (538). Perciò se si abbia un sistema di *quattro lenti* in cui sieno eguali le *tre oculari*, ed abbiasi $y = \infty$, $y' = f' = f'' = f'''$, sarà $x = f$, $x' = \infty$, $y'' = \infty$, $x'' = f''$, $x''' = \infty$ ed $f''' h''' = a \frac{x x' x'' x'''}{y y' y'' y'''} = a \frac{f . \infty . f'' . \infty}{\infty . f' . \infty . f'''} = a \frac{f f''}{f' f'''} = \frac{af}{f'}$ come nel canocchiale di due sole lenti (574); ove l'immagine che a motivo di x' ed y'' infiniti non si riproduce tra C′C′ e C″C″, si forma e si rovescia di nuovo tra C″C″ e C‴C‴: onde l'immagini reali essendo due, quella che presentasi all'occhio è raddirizzata; e tale è il più comune sistema dei *canocchiali terrestri*. Talvolta però, così per moderare la troppo violenta inflession de' raggi, come per guadagnar maggior campo, si usano non solo tre, ma quattro e cinque oculari e più; tali per altro che non ne viene alterata la teorìa; sostituendosi, per esempio, due lenti piano-convesse distanti alquanto tra loro, ad una sola, convessa dalle due parti, ec.

70

585. Sia ora z la grandezza angolare di EG veduta dall'occhio inerme nella distanza $y + e$ (onde $y + e : a :: 1 : tang\, z = z$ (L. 629) $= \frac{a}{y+e}$), i la grandezza lineare dell'immagine veduta dall'occhio armato nella distanza k, ed ω la sua grandezza angolare (per cui $k : i :: 1 : tang\, \omega = \omega = \frac{i}{k}$), sarà $\frac{\omega}{z} = \frac{i(y+e)}{ak}$ l'ingrandimento angolare m dell'oggetto EG; e poichè $i =$ FH, $= f'h'$, $= f''h''$ ec. $= \frac{ax}{y}$, $= \frac{a x x'}{y y'}$, $=$ ec., si avrà supponendo una sola lente, $m = \frac{x(y+e)}{yk}$; supposte due lenti, $m' = \frac{x x'(y+e)}{y y' k}$ e generalmente supposte $n + 1$ lenti, $m^{(n)} = x x' x'' \ldots$ ec.

$\frac{x x' x'' \dots x^{(n)} (y+e)}{y y' y'' \dots y^{(n)} k}$; ove si noti che se l'oggetto è lontano, si ha $y = \infty = y + e$ (442) e la distanza k da cui l'occhio riceve i cilindri lucidi dell'immagine che è indeterminata, può farsi $= x^{(n)}$, onde la formula si riduce alla seguente $m^{(n)} = \frac{x x' x'' \dots x^{(n-1)}}{y y' y'' \dots y^{(n)}}$; ma essendo l'oggetto vicino assai, si avrà $y < y + e$, e $k = y + e$ sarà la distanza ordinaria da cui un occhio sano distingue perfettamente l'oggetto, che si suppone comunemente 8 pollici. Di quì ancora si vede che nel canocchiale terrestre potrebbe combinarsi il numero e l'acutezza dell'oculari in modo da aumentare assai l'ingrandimento: ma convien riflettere che se l'objettivo non sia dell'ultima perfezione e l'oggetto non sia ben illuminato, l'ingrandimento si fa a scapito della chiarezza, e l'immagine comparisce *mal terminata*.

586. Poichè frattanto la chiarezza dell'immagine dipende dalla quantità dei raggi vibrati utilmente da un punto E dell'oggetto sull'objettivo VV, i quali passando per tutte le lenti giungono alla pupilla, sarà bene determinar l'ampiezza che il cono lucido acquista sopra ogni lente. Chiamo u il semidiametro uV dell'objettivo ed ho uF (x): uV (u):: Fp (y') : pC$' = \frac{uy'}{x}$ raggio dello spazio che occupa sulla seconda lente, cioè sul primo oculare C$'$C$'$ il cono VEV; per la stessa ragione $f'p\,(x') : p\mathrm{C}'\,(\frac{uy'}{x})$ :: $f's\,(y'') : sr = \frac{uy'y''}{xx'}$ raggio dello spazio che abbraccia sulla terza lente o sul secondo oculare C$''$C$''$; e generalmente sull'oculare n^{mo} l'ampiezza del cono o cilindro lucido avrà per raggio $\rho = \frac{u y' y'' \dots y^{(n)}}{x x' x'' \dots x^{(n-1)}}$; d'onde eliminan-

70

do il fattore $y'y'' \ldots y^{(n)}$ dato dai valori di m, m' ec. trovati sopra (585), si avrà $\rho = \frac{u(y+e)x^{(n)}}{ym^{(n)}k}$, cioè facendo $k = x^{(n)}$ (585), sarà generalmente $\rho = \frac{u(y+e)}{ym}$, ovvero $= \frac{u}{m}$ se $y = \infty = y + e$. Chiamando r il semidiametro della pupilla, se ρ sia eguale o maggior di r, la chiarezza dell' ultima immagine sarà la massima, supposto che l' oggetto non venga illuminato di più: ma se $\rho < r$, la chiarezza attuale sarà alla massima possibile :: $\rho^2 : r^2 :: (\frac{u(y+e)}{ym})^2 : r^2$.

70 587. Che se si cerchi l' ampiezza da darsi a ciascuna lente, onde si scopra un dato *campo* GuG, sia GuC'O'C''O''C'''O'''h''' il raggio estremo che attraversa tutte le lenti. Si avrà 1°. $uF(x) : FH(i) :: up(x+y')$: $pC' = \frac{(x+y')i}{x} = A'$ raggio dell' apertura del primo oculare; 2°. per i triangoli simili $O'pC'$, $O'sC''$, $O'f'h'$ si ha $O'p : O'f' :: pC' : f'h'$, ed $O's : O'f' :: sC'' : f'h'$; la prima proporzione dà $O'p + O'f' (= pf' = x') : pC' + f'h' (= A' + i') :: O'f' : f'h'$; la seconda dà $O's - O'f' (= f's = y'') : sC'' - f'h' (= sC'' - i') :: O'f' : f'h'$; quindi $x' : A' + i' :: y'' : sC'' - i'$, e infine $sC'' = \frac{A'y'' + (x'+y'')i'}{x'} = A''$: nel modo stesso si troverà $tC''' = \frac{A''y''' + (x''+y''')i''}{x''} = A'''$ ec., ove sostituiti i valori di x, y dati dal sistema delle lenti, si ha l' apertura loro dovuta e l' ampiezza del campo sulla quale, come è evidente, non influiscono che le lenti oculari: e poichè queste non possono oltrepassare una certa ampiezza (532), anche il campo del canocchiale non eccede mai certi limiti.

588 Di quì finalmente ricavasi la distanza del punto O', O'' ec. ove dee collocarsi l'occhio perchè la pupilla abbracci un campo maggiore. Poichè la proporzione stessa di sopra ci dà $pO' : pO' + O'f' (= pf'' = x') :: pC' (A') : pC'$

FIG.

$+f'h'$ ($= A' + i'$) e quindi $pO' = \frac{A'x'}{A'+i'}$ e nel modo stes- 70
so $sO'' = \frac{A''x''}{A''+i''}$, $tO''' = \frac{A'''x'''}{A'''+i'''}$ ec.; comunemente però la situazione dell'occhio è vicinissima al fuoco o anzi nel fuoco stesso dell'ultimo oculare.

589. Due difetti naturalmente accompagnano tutti i canocchiali di cui abbiamo data la teoria. L'uno può chiamarsi *aberrazione di sfericità*, ed è il deviamento dei raggi dal punto o fuoco geometrico in cui dovrebbero riunirsi, e dal quale intanto la sfericità dell'objettivo gli allontana (531). Oscurando in fatti questa lente con una sostanza opaca e scoprendone quindi o un piccol circolo intorno al centro o una piccola zona intorno all'orlo, l'*immagine principale* nel primo caso e *l'immagine estrema* nel secondo, si trovano in luoghi assai diversi dell'asse, e resta tra l'una e l'altra uno *spazio di diffusione*, il quale scoperta affatto la lente, si riempie tutto d'immagini corrispondenti alla varia inflessione che danno ai raggi le zone intermedie. Or poichè queste immagini, quantunque non molto vive, son però tanto più numerose quanto è più grande l'apertura o area dell'objettivo, è forza che l'immagine principale ne riesca sensibilmente torbida e nuvolosa. L'altro difetto può chiamarsi *aberrazione di rifrangibilità*, mentre si è veduto (545) che i raggi paonazzi tagliano l'asse molto più presto dei rossi; onde lo spazio tra gli uni e gli altri è occupato dalle cinque specie intermedie, secondo la loro varia rifrangibilità: i più vicini ai rossi, come gli aranciati e i gialli, attraversan l'immagini più remote e le rendon confuse; i più lontani come i celesti e i turchini, le rasentano e le cingono intorno d'*iridi* o zone colorate, e tutti insieme ne distruggono ogni nettezza.

590. Intorno a questa doppia aberrazione nulla è più ingegnoso del raziocinio che persuase Nevvton a preferire ai diottrici i telescopj *catadiottrici* o di riflessione. Immaginato nella lente piano-convessa QOI un raggio qualunque RT parallelo a ΦO che rifrangendosi, incontri in H il 64
raggio estremo QA (544) e in K l'asse, ΦE, si conduca HL normale all'asse: è chiaro che l'effetto della sfericità è di far crescer continuamente l'angolo TKO dal nulla fino all'angolo IfO (531), e di far continuamente scemare la retta Kf da Ff quando TK coincide con ΦE, fino a nulla

quando TK coincide con If: onde HL in qualche luogo dee necessariamente divenir massima, e allora tutti i raggi lucidi passeranno per il circolo del semidiametro HL che sarà perciò il semidiametro dell'aberrazione di sfericità.

64 Sieno dunque le variabili $GN = TV = z$, $HL = x$, e le costanti $NQ = IN = a$, $fF = b$, $Nf = f = VK$ che tendendo continuamente a divenire eguali, poco differiscon tra loro (L. 836), e avremo $FA = \frac{ab}{f}$ ed $fL = \frac{fx}{a}$ attesi i triangoli simili QNf, AFf, HLf. Ora giacchè il raggio If si scosta di $Ff = b = \frac{p^2 NQ^2}{2(p-q)^2 FO}$ (544), onde anche l'altro scostamento $FK = \frac{p^2 TV^2}{2(p-q)^2 FO}$ e quindi $Ff(b) : FK :: NQ^2 (a^2) : TV^2 (z^2)$, sarà $FK = \frac{bz^2}{a^2}$ ed $fK = fF - FK = \frac{b}{a^2}(a^2 - z^2)$: ma $TV\ (z) : VK\ (f) :: HL\ (x) : LK = \frac{fx}{z}$; dunque $fK = fL + LK = \frac{fx}{a}\ (\frac{z+a}{z}) = \frac{b}{a^2}(a^2 - z^2)$ ovvero $x = \frac{bz}{f} - \frac{bz^2}{af}$ che dee essere un massimo: perciò (L. 878) $\frac{dx}{dz} = \frac{b}{f} - \frac{2bz}{af} = 0$, $z = \frac{a}{2} = \frac{IN}{2}$, $x = \frac{ab}{4f} = \frac{FA}{4}$ e $2x = \frac{FA}{2}$ cioè *il diametro del circolo dell' aberrazione di sfericità eguaglia la metà dello scostamento laterale del raggio estremo* QA, e poichè $FA = \frac{p^2 sen^2 a}{2q^2 CO^2}$ (544), sarà $2x = 2HL = \frac{p^2 sen^2 a}{4q^2 CO^2}$; cosicchè fatto $p = 31$, $q = 20$, $sen\ a = 2^{poll.}$, $CO = 600^{poll.}$, avremo $2HL = \frac{31^2 . 2^2}{20^2 . 1200^2} = \frac{961}{72000000}$, diametro dell' aberrazione di sfericità: ma il diametro dell' aberrazione di rifrangibilità è $\frac{2\, sen\, a}{55} = \frac{4}{55}$ (545); dunque le due aberrazioni stanno tra loro co-

me $\frac{961}{72000000} : \frac{4}{55} :: 1 : 5449$, cioè l'aberrazione di sfericità è un nulla in confronto dell'aberrazione di rifrangibilità, la quale o non avendo luogo o essendo insensibile negli specchi, è manifesto che i canocchiali catadiottrici sono esenti dal difetto più grande che accompagna i diottrici.

591. Per meglio assicurarci, paragoniamo anche tra loro le aberrazioni di sfericità in uno specchio concavo e in una lente piano-convessa eguali d'apertura e di principal lunghezza focale. Nello specchio si ha $fF = \frac{1 - \cos i}{2 \cos i}$ 58

(495), e poichè l'apertura $IO = a$ è piccola come si suppose già nella lente (544), onde Ff, NO son piccolissime e $\cos i = 1$ presso a poco, sarà $fF = \frac{1 - \cos i}{2} = \frac{ON}{2}$ incirca: ma $ON = \frac{NQ^2}{CO + CN}$ (L. 477) $= \frac{\text{sen}^2 a}{1 + \cos i} = \frac{\text{sen}^2 a}{2} = \frac{\text{sen}^2 a}{2CO}$, perchè $CO = 1$; dunque $fF = \frac{\text{sen}^2 a}{4CO}$ ed $FA = \frac{Ff . NQ}{Nf} = \frac{Ff . NQ}{\frac{1}{2} OC} = \frac{\text{sen}^3 a}{2CO^2} = \frac{\text{sen}^3 a}{8OF^2}$ (486). Pertanto se il raziocinio fatto di sopra per le lenti (590) si ripeta quì per gli specchi a cui si applica interamente, il diametro dell'aberrazione di sfericità nello specchio concavo eguaglierà la metà dello scostamento laterale $\frac{\text{sen}^3 a}{8OF^2}$ del raggio estremo QA e sarà $\frac{\text{sen}^3 a}{16OF^2}$: ma nella lente è $\frac{p^2 \text{sen}^3 a}{4(p-q)^2 OF^2}$ (544, 590); dunque le due aberrazioni stanno fra loro come $\frac{\text{sen}^3 a}{16OF^2} : \frac{p^2 \text{sen}^3 a}{4(p-q)^2 OF^2} :: \frac{1}{4} : \frac{p^2}{(p-q)^2} :: 121 : 3844 :: 1 : 32$, cioè l'aberrazione di sfericità nello specchio in confronto dell'aberrazion medesima nella lente, è pochissima cosa; nuova ragione per dare ai canocchiali catadiottrici la preferenza. Al che se si aggiunga la maggiore apertura che questi conseguentemente comportano, il maggiore aumento che posson ricever l'immagini senza scapito di vivaci-

tà, e la molto minor lunghezza che esige la macchina; onde è resa tanto più maneggiabile, altri forse non dubiterà di concludere ad onta delle nostre osservazioni (561) che Nevvton, benchè allontanandosi dal divino modello, ha scoperto il vero segreto di accrescerne compiutamente la forza.

592. Il telescopio catadiottrico che egli inventò è semplicissimo. Nel fondo di un tubo chiuse un grande specchio concavo di metallo ΘΘ del semidiametro HR onde i raggi lucidi provenienti dall'oggetto lontanissimo GG vi si andassero a riflettere; tra il fuoco principale F e lo specchio H collocò sull'asse HE in angolo semiretto uno specchio piano assai piccolo PP che ricevendo i raggi riflessi e nuovamente riflettendoli, impedisse la loro riunione in F e la trasportasse in Φ; e collocato sul nuovo asse NO un oculare convesso-convesso KK in modo che il fuoco stesso Φ di ΘΘ ne fosse il fuoco principale, la macchina fu compita. Da questa costruzione facilmente s'intende che la teoria del telescopio Nevvtoniano è precisamente quella dell'astronomico; poichè lo specchio PP non fa che cangiar direzione ai raggi e riunirgli alla distanza $N\Phi = NF$ (478), onde tutti gli effetti che si hanno dal sistema delle due lenti VV, C'C' (574, 581), debbono aversi in generale dallo specchio ΘΘ combinato con l'oculare KK, potendosi in questo come in quello, raddirizzar l'immagine con l'aggiunta di nuovi oculari sotto KK (584). Supposto r il raggio di curvatura e della lente VV e dello specchio ΘΘ, ed f' la distanza focale di C'C' e di KK, è chiaro, che laddove la lunghezza del telescopio diottrico è $2r + f'$ se l'objettivo è piano-convesso, o almeno $r + f'$ se sia convesso-convesso (542), quella del *catadiottrico* è solamente HN cioè minore di $HF = \frac{r}{2}$ (486) e ciò ne rende comodissimo l'uso, come già si osservò (591). Che se l'occhio situato di fianco non può sì facilmente trovar gli oggetti, si è rimediato a questa difficoltà o col situar lungo il tubo un secondo canocchiale diottrico, o con sostituire allo specchio piano PP un altro specchio tale che rimandi l'immagine verso il punto H (485) ove lo specchio primario ha un foro mm corrispondente alla grandezza di un'oculare che sola o congiunta ad altre (584), trasmette all'occhio o rovesciata o diritta l'immagine dell'oggetto. Il tele-

71

70 e 71

FIG.

scopio così corretto dicesi *Gregoriano* assai più comodo del precedente.

593. Eppure non mancano anche quì dei gran difetti. Senza far conto dei raggi che si perdono per l'interposizione dello specchio PP, il che necessariamente indebolisce l'immagine: è certo che il pulimento accurato degli specchi concavi di metallo è di un'estrema difficoltà, che ottenuto con pena e con dispendio considerabile, è poi danneggiato prestissimo dall'umidità e dall'esalazioni, per cui nate quà e là delle macchie rugginose, lo specchio diventa affatto inabile all'uso; infine, che nella riflessione dei raggi sullo specchio metallico anche il meglio fatto, si perde sempre assai più di luce che nella rifrazione a traverso di un objettivo di vetro. Il nome di Nevvton impedì per un tempo di dare il giusto peso a tanti difetti, e quantunque i telescopj diottrici non andassero mai in disuso e si rimediasse in parte ai loro vizj coll'accrescerne la lunghezza, coll'impiccolir l'apertura degli objettivi e col distruggere i raggi inutili per mezzo di *diafragmi* traforati che ne ristringessero il fuoco; pure vi volle un mezzo secolo per determinare gli Ottici a nuove ricerche e ricondurli sul buon cammino (561). Eulero considerata più seriamente la struttura dell'occhio (560), sostenne il primo che gli objettivi potean liberarsi dall'iridi e ne indicò la maniera; Dollond perfezionò la teorìa e ci dette il primo i canocchiali *acromatici* o senza colori. Basterà l'accennare i principali fondamenti di questa scoperta, giacchè la compiuta soluzione del problema eccederebbe i limiti che ci siamo prescritti.

71

594. Poichè dall'occhio si impara che per distrugger l'iridi vi vuole una lente composta, cioè la combinazione di più mezzi variamente densi e figurati (560), si pensò da principio a combinare il vetro coll'acqua: ma la poca diversità delle lor potenze rifrattive esigendo una curvatura troppo ardita nelle lenti, e rendendo perciò molto sensibili le aberrazioni di sfericità, si passò a far prova del flint e da lui dopo qualche travaglio, si ottenne compiutamente l'intento. Il primo tentativo fu di applicare alla base CG di un prisma BCG di flint il vertice C di un prisma tale CBA di vetro, che il raggio emergente dai due prismi fosse parallelo all'incidente. Questa ricerca era molto importante, attesa una celebre esperienza di Nevvton,

72

FIG.

ove era detto che il raggio in tal caso esce sempre senza colori; onde inferivano gli Ottici che sussistendo quell' esperienza, non si sarebbe mai potuta correggere l'aberrazione di rifrangibilità. Già si comprende che i due pri-

72 smi ACB, CBG rappresentano un semi-objettivo convesso-concavo, e che raddoppiati danno un solido da cui è facile di ricavare un intero objettivo o menisco composto, in cui la lente concavo-concava GCBIEB di flint si unisce esattamente con la convesso-convessa CBEA di vetro. Dato pertanto ad arbitrio l'angolo rifrangente CBG del prisma di flint, si cerca quale debba essere l'angolo rifrangente ACB del prisma di vetro onde il raggio che cade normale sulla faccia AC (come cade appunto sugli objettivi dei canocchiali), ad onta della refrazione per i due prismi, si trovi parallelo al raggio emergente dalla faccia BG. Ecco in qual guisa noi anderemo alla soluzione di questo problema.

595. Sia il dato angolo CBG $= 23^\circ\, 40' = b$, il cercato ACB $= x$; e poichè per ipotesi il raggio cade normalmente in AC, sarà $i = 0$, $r = 0$ (439) ed $i' = x$ (L. 574): ma il raggio passa dal vetro nel flint; dunque $sen\, r' = \frac{310\, sen\, i'}{316}$ (518) $= \frac{310\, sen\, x}{316}$ e $cos\, r' = \frac{2}{316} \sqrt{(158^2 - 155^2\, sen^2 x)}$ (L. 610). Supposto pertanto che x superi b di qualche grado onde possa darsi alla lente la necessaria curvatura, l'angolo r' di refrazione nel flint, poco più piccolo dell'angolo $i' = x$ d'incidenza (439), ci darà $b < r'$ e quindi $i'' = r' - b$ (L. 574); onde passando il raggio dal flint nell'aria, avremo $sen\, r'' = \frac{316\, sen\, i''}{200}$ (512) $= \frac{316\, sen\,(r' - b)}{200} = \frac{316}{200} \times (sen\, r' \cos b - sen\, b \cos r') = \frac{31\, sen\, x \cos b}{20} - \frac{sen\, b}{100} \sqrt{(158^2 - 155^2\, sen^2 x)}$; ma l'espressione generale dell'angolo fatto dai raggi incidente ed emergente nel caso di $b < r'$, è $b - x + r''$ (L. 573), e questi raggi debbono essere per ipotesi paralleli, onde $b - x + r'' = 0$; dunque $sen\, r'' = sen\,(x - b) = sen\, x \cos b - sen\, b \cos x = \frac{31\, sen\, x \cos b}{20} - \frac{sen\, b}{100}$

$\frac{sen\, b}{100}\sqrt{(158^2 - 155^2\, sen^2\, x)}$ cioè $11\, sen\, x - \frac{tang\, b}{5}\sqrt{(158^2 - 155^2\, sen^2\, x)} = -20\, tang\, b \cos x$, ed infine $tang\, b = tang\, 23^\circ\, 40' = \frac{55\, sen\, x}{\sqrt{(158^2 - 155^2\, sen^2\, x)} - 100 \cos x}$, equazione che convien risolvere col solito metodo della doppia falsa posizione. Fatto perciò $L\sqrt{(158^2 - 155^2\, sen^2\, x)} = \frac{L(158 - 155\, sen\, x) + L(158 + 155\, sen\, x)}{2} = L m$, e $L\, 100 \cos x = L\, 100 + L \cos x = L n$, si avrà $L\, tan\, 23^\circ\, 40' = L\, 55 + L\, sen\, x - L(m - n)$, in cui se si ponga $x = 25^\circ$, il primo errore sarà $-0{,}0009396$, e se si ponga $x = 30^\circ$, il secondo sarà $+0{,}0893345$, dal che si ricaverà $x = 25^\circ\, 2'\, 48''$ che preso per nuova posizione, darà l'errore $-0{,}0000184$, onde più prossimamente $x = 25^\circ\, 2'\, 51''$, che nuovamente preso per posizione, dà l'errore $-0{,}0000213$, e quindi finalmente $x = 25^\circ\, 2'\, 55''$.

596. Dico ora che uniti contrariamente due prismi, l'uno di vetro dell'angolo rifrangente $x = 25^\circ\, 2'\, 55''$ e l'altro di flint dell'angolo $b = 23^\circ\, 40'$, il raggio emergente da essi sarà parallelo all'incidente. In fatti $i' = x = 25^\circ\, 2'\, 55''$; $sen\, r' = \frac{310\, sen\, 25^\circ\, 2'\, 55''}{316}$ ed $r' = 24^\circ\, 32'\, 28''$; $b = 23^\circ\, 40'$; $i'' = r' - b = 0^\circ\, 52'\, 28''$; $sen\, r'' = \ldots \frac{316\, sen\, 0^\circ\, 52'\, 28''}{200}$ ed $r'' = 1^\circ\, 22'\, 54''$; dunque $b - x + r''$ (L. 573) $= 0^\circ\, 0'\, 1''$, angolo affatto insensibile; dunque i raggi son paralleli come si richiedeva.

597. Resta ora ad esaminare se veramente il raggio esca bianco dai due prismi, come Nevvton ha preteso. Perchè questo succeda è necessario che l'angolo di dispersione sia lo stesso o poco diverso in ciascuno dei due prismi, onde l'effetto della refrazione essendo in essi eguale, e per la loro opposta situazione anche contrario, i raggi emergenti di ciascuna specie non se ne risentano, e l'intero raggio si mostri senza colori. Nel prisma di vetro abbiamo $r = 0$ ed $i' = x = 25^\circ\, 2'\, 55''$ (596), e perciò quando il raggio esce nell'aria, $sen\, r' = \frac{31\, sen\, 25^\circ\, 2'\, 55''}{20}$

(509) ed $r' = 41° 0' 52''$; dunque (529) l'angolo di dispersione $d = \frac{2 \, sen \, 25° \, 2' \, 55''}{100 \, cos \, 41° \, 0' \, 52''} = 0° \, 38' \, 35''$. Ma nel prisma di flint ove $b = 23° \, 40'$, supposto che il raggio lo penetri sotto l'angolo d'incidenza $i \, (= r'') = 1° \, 22' \, 54''$ (596), si avrà $r \, (= i'') = 0° \, 52' \, 28''$ (596), $i' \, (= r') = 24° \, 32' \, 28''$ (596) e si troverà $r' = 41° \, 0' \, 52''$ (512); dunque (529) $d = \frac{3 \, sen \, 23° \, 40'}{100 \, cos \, 41° \, 0' \, 52'' \, cos \, 0° \, 52' \, 28''} = 0° \, 54' \, 52''$. Dunque la differenza dei due angoli di dispersione che secondo Nevvton dovrebbe essere o piccolissima o zero, si trova quì $54' \, 52'' - 38' \, 35'' = 16' \, 17''$, assai grande perchè il raggio emergente produca nell'occhio la sensazione dei colori prismatici: cioè la potenza dispersiva del prisma di flint non solo distrugge la separazione dei raggi prodotta dal prisma di vetro, ma ne genera anche una nuova in contrario sotto un angolo di $16' \, 17''$. In tal guisa l'esperienza di Nevvton, riguardata come un insuperabile ostacolo alla perfezione dei canocchiali, fu convinta di falsità, e Dollond ad onta della fiducia con cui l'aveva opposta ai raziocinj d'Eulero, dovè convenire che anche Nevvton era un uomo.

598. Ora nulla è più facile che il trovar due prismi l'uno di vetro e l'altro di flint, che situati al solito contrariamente, facciano emergere un raggio senza colori; tali sono quelli che hanno gli angoli rifrangenti l'uno di 30°, l'altro di 19°, in cui il raggio normalmente incidente fa con l'emergente un angolo di $5° \, 31' \, 47''$, e non son perciò paralleli, mentre la differenza degli angoli di dispersione è di soli 23″ e perciò insensibile. Ma poichè due soli prismi danno un objettivo o menisco convesso-concavo (594) che per lo più allunga il canocchiale (545); e distrutta una volta l'aberrazione di rifrangibilità da cui rendevasi necessario l'allungamento (593), queste macchine crescon di pregio col diminuir di lunghezza; gli Ottici si rivolsero ben presto agli objettivi convesso-convessi, e a somiglianza della lente composta dell'occhio, la quale risulta principalmente dalla combinazione dei tre umori aqueo, cristallino e vitreo, il primo e l'ultimo pochissimo differenti (560), pensarono di unire ai due pri-

smi ACB di vetro e CBG di flint un terzo prisma BGH parimente di vetro, ma tale che correggendo l' eccesso della potenza dispersiva del flint (597), facesse emergere il raggio senza colori: nuovo problema in cui dati gli angoli ACB, CBG, si tratta di determinar l'angolo BGH del nuovo prisma oppostamente situato, onde si abbia il richiesto effetto.

Serviamoci per brevità degli angoli già fissati di sopra (595, 596), e sia $ACB = a = 25° 2' 55''$, $CBG = b = 23° 40'$, $BGH = x$. L' angolo d' incidenza con cui il raggio passa dal flint nel terzo prisma di vetro, sarà dunque $i'' = 0° 52' 28''$ (596), e perciò $sen\ r'' = \frac{316\ sen\ 0° 52' 28''}{310}$ (518), ed $r'' = 0° 53' 29''$: ma nel prisma di flint si avea $b < r''$; dunque (L. 573) nel prisma di vetro il raggio è al disopra della normale, e quindi (L. 574) $x > r''$ ed $i''' = x + r''$; dunque poichè dal vetro passa il raggio nell' aria, sarà $sen\ (x + r'') : sen\ r''' :: 20 : 31$ (509) e $sen\ r''' = \frac{31\ sen\ (x + r'')}{20}$. Supposto pertanto scambievolmente, che un raggio passi dall' aria nell' ultimo prisma di vetro sotto un angolo d' incidenza $i = r'''$, si avrà $r\ (= i''') = x + r'' = x + 0° 53' 29''$, $i'\ (= r'') = 0° 53' 29''$, ed uscendo il raggio dal vetro nell' aria, sarà $sen\ r' = \frac{31\ sen\ 0° 53' 29''}{20}$, ed $r' = 1° 22' 54''$; dunque $d = \ldots\ldots$

$\frac{2\ sen\ x}{100 . cos\ (x + r'') . cos\ r'} = tang\ 16' 17'' = tang\ f$, giacchè per ipotesi si vuol distrugger l' aberrazione che si trovò di sopra (597). Riducendo l' equazione, si avrà $sen\ x = 50\ tang\ f\ cos\ r'\ (cos\ x\ cos\ r'' - sen\ x\ sen\ r'')$, dipoi $tang\ x = 50\ tang\ f\ cos\ r'\ cos\ r'' - 50\ tang\ f\ cos\ r'\ sen\ r''\ tang\ x$, onde infine $tang\ x = \frac{50\ tang\ f\ cos\ r'\ cos\ r''}{1 + 50\ tang\ f\ cos\ r'\ sen\ r''} = \ldots\ldots$ $\frac{50 . tang\ 16' 17'' . cos\ 1° 22' 54'' . cos\ 0° 53' 20''}{1 + 50\ tang\ 16' 17'' . cos\ 1° 22' 54'' . sen\ 0° 53' 29''} = tang\ 13° 16' 17''$; dunque se ai primi due si unisca contrariamente un terzo prisma di vetro il cui angolo rifrangente sia 13° 16' 17'', l' aberrazione di rifrangibilità sarà distrutta. In

fatti poichè $i'' = 0° \, 52' \, 28''$, $r'' = 0° \, 53' \, 29''$, e $13° \, 16' \, 17'' > 0° \, 53' \, 29''$, sarà $i''' = 14° \, 9' \, 46''$ (L. 574): ma $r''' = 22° \, 17' \, 14''$ perchè $sen\, r''' = \frac{31\, sen\, 14° \, 9' \, 46''}{20}$; dunque $d = \frac{2\, sen\, 13° \, 16' \, 17''}{100 \,.\, cos\, 14° \, 9' \, 46'' \,.\, cos\, 1° \, 22' \, 54''} = 16' \, 17''$.

599. Tali sono i fondamenti su cui si intraprese la costruzione dei nuovi objettivi composti, nei quali il semidiametro delle tre lenti è talmente proporzionato, che non solo svaniscono i colori, ma diviene anche insensibile lo spazio di diffusione, e l'immagine estrema e principale coincidono; cosicchè la stessa lente abolisce del pari l'aberrazione e di rifrangibilità e di sfericità: il rimedio medesimo si è poi esteso anche agli oculari, e un canocchiale corredato di tali vetri, giustamente può chiamarsi perfetto, come appunto si è dato il nome di *perfette* a quelle lenti. Per altro vi è luogo tuttora a maggior perfezione, giacchè le lenti di Dollond non son tanto simili a quella dell'occhio, che non possa sperarsi un'imitazione ancor più esatta: il nostro cristallino è doppiamente convesso (560), ma la lente di flint che lo rappresenta, è doppiamente concava; gli umori aqueo e vitreo che circondano il cristallino, differiscono pur qualche poco tra loro in densità (560), ma le due lenti che chiudono il flint, son precisamente d'una sostanza e densità medesima; infine la cornea è anch'essa un mezzo da tutti gli altri diverso e diversamente rifrangente, a cui nulla vi è di simile nelle nuove lenti acromatiche. Sembra in fatti deciso dall'esperienze più delicate, che la combinazione di due sostanze diafane, come del vetro e del flint, non richiama ad uno stesso fuoco tutti i colori, ma solamente due; che la combinazione di tre sostanze, come del vetro, del flint e dello *strass* (altra specie di cristallo più dispersiva del flint) ne richiama tre ec., onde avendosi nell'occhio quattro diverse sostanze, debbono unirsi ad un fuoco medesimo quattro almeno dei sette colori, il che produce un acromatismo incomparabilmente più accurato del Dollondiano, ove non si hanno che due sostanze diversamente rifrangenti.

Ma poichè gli acromatici di due sole lenti son tuttora i più comuni e i più facili a farsi, gioverà alquanto l'accennar quì il metodo più adattato per combinarle il

meglio che sia possibile. Chiaminsi f, F i due fuochi principali della lente esteriore, l' uno dei raggi rossi, l'altro dei violetti, ed f', F' i due fuochi simili dell'interiore; siano $n - N$, $n + N$ (523) le ragioni dei seni d' incidenza e di refrazione delle due dette specie di raggi nella prima lente, che chiameremo per brevità m, M, e siano nel modo stesso m', M' nella seconda. Avremo dunque per i raggi rossi $x' = \frac{ff'}{f' - f}$ (538. 3°), e per i violetti $\frac{FF'}{F' - F}$, e per distrugger la dispersione (ponendo quì l' una e l' altra lente al contatto) dovrà essere $\frac{ff'}{f' - f} = \frac{FF'}{F' - F}$. Ora poichè $f = \frac{ab}{(a + b)(m - 1)}$ ed $F = \frac{ab}{(a + b)(M - 1)}$ (538), sarà $f : F :: M - 1 : m - 1$ e nel modo stesso $f' : F' :: M' - 1 : m' - 1$, onde $F = \frac{f(m - 1)}{M - 1}$, $F' = \frac{f'(m' - 1)}{M' - 1}$, ed $\frac{FF'}{F' - F} \left(= \frac{ff'}{f' - f}\right) = \ldots\ldots\ldots$; $\frac{ff'(m - 1)(m' - 1)}{f'(m' - 1)(M - 1) - f(m - 1)(M' - 1)}$, dal che si ricava $f : f' :: \frac{M - m}{m - 1} : \frac{M' - m'}{m' - 1}$. Conosciuto pertanto il fuoco della prima lente, e fissata una delle curvature della seconda, si trova subito l' altro raggio di curvatura atto a distrugger la dispersione. Per darne un esempio, sia di cristallo comune la prima lente, e si supponga piano-convessa, il cui fuoco $f = 4$; sarà dunque $b = \infty$ (538) ed $a = 2$ (542). Se sia di flint la seconda lente che si suppone come sopra a contatto della prima, avremo $-b' = a = 2$, e posta $n' = 1,580$ (512) per la refrazione dei raggi medj, avremo $f' \left(= \frac{a'b'}{-(a' + b')(n' - 1)}\right) = -\frac{2a'}{(a' + 2)(n' - 1)} = -\frac{a'}{0,29a' + 0,58} = \frac{f(M' - m')(m - 1)}{(M - m)(m' - 1)}$, ove posti i valori di $f = 4$, e di m, M, m', M' (508, 510, 511, 513), si avrà $-\frac{a'}{0,29a' + 0,58} = \frac{4(0,03)(0,54)}{(0,02)(0,565)}$

$= \frac{0,0648}{0,0113} = \frac{648}{113}$, e infine $- a' = \frac{37584}{30092} = 1,2487$, raggio della curva interiore della lente di flint che si ricercava.

600. I telescopj astronomici o di refrazione o di riflessione, ordinariamente si muniscono d'un *micrometro*, macchinetta che serve a misurare gli apparenti diametri del Sole e dei Pianeti, la differenza delle ascensioni rette e delle declinazioni di due astri ec. Si hanno molte specie di micrometri, ma due sono le più comuni: 1°. sopra un piccolo telajo immobile presso all'oculare, si tendono orizzontalmente uno o più fili tenuissimi di seta che attraversano un simil filo verticale, e per mezzo di una lunga vite, si fa salire e dicendere parallelamente al primo filo orizzontale un simil filo detto il *cursore*, finchè l'uno occulti all'occhio l'altro; il movimento del cursore esattamente riportato sopra una mostra divisa in 100 o più parti, determina la dimensione apparente del dato oggetto: 2°. tagliato in mezzo l'objettivo in *mn*, se con un meccanismo adattato se ne allontanino parallelamente a se stessi, i due segmenti *mo*, *on*, si formeranno due immagini separate *df*,
73 *fb* dello stesso oggetto BD. Condottesi dunque al contatto le loro opposte estremità come in *f*, e conosciuto con esattezza l'allontanamento *a* dei due centri delle semilenti, se l'oggetto è molto distante, sarà B*f*D il suo diametro $'d$ angolare, e si avrà $Of = f$ onde $Of\ (f) : on\ (\frac{a}{2}) :: 1 : tang\,\frac{d}{2} = \frac{a}{2f}$, ovvero per esser gli angoli molto piccoli, $'d = \frac{a}{f}$; e quindi per esser f costante, conosciuta la dimensione angolare di un corpo, si ha quella di tutti gli altri.

Se BD sia un oggetto vicino, e sia f il suo fuoco ed F il fuoco principale, si avrà (538. 4°) $fO : f\Phi$ (ovvero per i triangoli simili, $mn : BD) :: FO : O\phi :: f : y$, onde $\frac{mn}{f} = \frac{BD}{y}$; e l'angolo sotteso da BD in O sarà eguale all'angolo sotteso da *mn* in F, cioè darà come prima, la misura angolare dell'oggetto (L. 469).

Questo Micrometro dicesi anche *Eliometro*, *Astrometro* e *Micrometro objettivo*; egli non è sottoposto a molti dei difetti del primo, ed è di un uso più universale, benchè esiga gran delicatezza e cautela.

Microscopio.

601. Come l'occhio inerme non distingue i lontanissimi oggetti quantunque grandi, così non giunge a scoprire le minime parti degli oggetti piccolissimi benchè vicini; e come per avvalorarlo nel primo caso si immaginarono i canocchiali, così per soccorrerlo nel secondo fu trovata una nuova macchina che dal suo effetto si chiamò *Microscopio*. Tale è qualunque lente convessa se la sua distanza y dall'oggetto eguagli la principal lunghezza focale f; poichè con ciò la visione per l'occhio sano o presbita è distinta (dovendo il miope avvicinar qualche poco l'oggetto alla lente per ottener l'opportuna divergenza dei raggi (538)) e attesa l'analogìa $a : b :: f : e + f$ (571), l'oggetto è manifestamente ingrandito: ma trattandosi quì di veder con distinzione le parti più piccole dei minutissimi insetti, delle polveri, dei peli, dei sali ec., bisogna dare all'immagine il massimo aumento possibile, sempre però dentro i limiti a cui costringono le solite aberrazioni (589) se la lente non sia acromatica. Ora l'equazione $b = \frac{a(e+f)}{f}$ dimostra che l'immagine b è tanto più grande, quanto f è più piccola (L. 48), e supposte eguali le convessità della lente, tanto è più piccola f quanto è minore il raggio di sfericità (542), il quale tanto più scema quanto più crescono le curvature (L. 596); dunque l'ingrandimento dell'immagine sarà tanto più considerabile quanto è minore la sfera a cui la lente appartiene. Ecco però una difficoltà: giacchè la lente dee esser piccolissima e però svanisce il campo a misura che l'occhio se ne allontana, converrà dunque accostarvelo quanto più si può e fare $e = 0$: ma in tal caso l'equazione $b = \frac{a(e+f)}{f}$ diventa $b = a$; dunque si avrà l'immagine eguale all'oggetto mentre si voleva prodigiosamente ingrandita. Si osservi però che tra l'oggetto e l'immagine

vi è questa gran differenza, che laddove l' uno a sì piccola distanza si vedrebbe confusissimamente, attesa la troppa divergenza dei raggi, l' altra per l' interposizion della macchina si vede con la massima distinzione, e l' oggetto per l' occhio armato non è più ove è realmente, ma è ove l'occhio inerme potrebbe distintamente vederlo; cosicchè se la distanza dell' oggetto dall' occhio armato sia

$d' = 0,02^{poll.} = f$ (perchè $e = 0$), e la distanza da cui

l' occhio nudo lo vedrebbe distintamente, sia $d = 8^{poll.}$ (585), giacchè l' oggetto ne' due casi è lo stesso, si avrà (452) $a : b :: d' : d :: 0,02 : 8 :: 1 : 400$, cioè presa una lente la cui principal lunghezza focale sia $\frac{1}{50}$ di pollice, l' immagine comparirà 400 volte maggior dell' oggetto. Tale è la forza di questo microscopio, e consistendo egli in una sola lente, dicesi *semplice*: la necessità di avvicinargli quanto più si può, l' occhio da una parte e l' oggetto dall' altra, lo rese in molte occasioni impraticabile e fece inventare il microscopio *composto*.

602. Sia dunque O' il fuoco principale della piccola lente convesso-convessa C'C' che ora diviene objettiva. Ad una distanza poco maggiore di pO', cioè in f' si collochi il piccolo oggetto da osservarsi, e si faccia che il punto F ove se ne forma l' immagine, sia il fuoco principale dell' oculare VV, onde i raggi emergano paralleli (571). L' immagine si vedrà distinta e ingrandita, e il suo aumento angolare sarà $m' = \frac{x x'(y + e)}{y y' k}$ (585), cioè per essere $x = \frac{fy}{y - f}$ (538), $x' = k$, $y' = f'$ ed $y + e = 8^{poll.}$ (585), si avrà $m' = \frac{8f}{(y - f) f'}$. Così se sia $f = 0,02^{poll.}$, $f' = 0,04$, $y = 0,021$, si troverà $m' = 4000$. Collo stesso metodo si troverebbe m'', m''' ec. per un maggior numero di lenti.

70

603. Su questo stesso principio è costruito il *Microscopio solare*. In F poco lungi dal fuoco principale φ di una piccola lente C'C' convesso-convessa, si adatta sopra

una

una laminetta piana di vetro l' oggetto da ingrandirsi e contro di lui si dirige un gran raggio Eφ di luce viva, che attraversando la laminetta e la lente, porterà l'immagine perfettamente distinta e smisuratamente ingrandita sopra una carta bianca verticalmente innalzata alla distanza focale pR. In fatti se sia al solito F$p = y$, e $\varphi p = f$, sarà $p\mathrm{R} = x = \frac{fy}{y-f}$ ed $i = \frac{ax}{y} = \frac{af}{y-f}$ (585). Così se $f = 6^{lin.}$, $y = 6{,}001$, si avrà $a : i :: 0{,}001 : 6 :: 1 : 6000$.

Per altro con questo metodo non si hanno immagini che dai corpi diafani, e queste anche imperfette: poichè i raggi che li attraversano ancorchè non vi si refrangano sensibilmente, contraggon però i differenti colori delle parti e interne ed esterne degli oggetti, e forman sotto un istesso contorno una pittura confusa di tutte insieme, e perciò molto inesatta: quindi seppur non si debba necessariamente osservarne l' interno, sarà molto meglio diriger con qualche specchio o con qualche lente, la luce sulla faccia anteriore di ciò che ha da osservarsi: la pittura ne è allora e più decisa e più viva.

Alla teorìa del microscopio solare facilmente riduconsi gli effetti di varie altre macchine ottiche, come della *Camera oscura*, della *Lanterna magica*, del *Polemoscopio* ec.; la descrizione che potremmo darne riuscirebbe troppo oscura per chi non le ha mai vedute, e affatto superflua per chi se ne è già formata un'idea: basti dunque di avere stabiliti i fondamenti per intenderne e calcolarne la forza.

604. Molto più utile giudichiamo di propor quì alcuni metodi *pratici* per conoscer la qualità e bontà delle Macchine ottiche finor descritte, tutti dipendenti dalle teorìe già spiegate.

I. Si cerchi il *fuoco* d' una lente convessa o concava. Coperta una delle sue faccie con un poco di carta sottilmente traforata, si esponga al Sole, e i raggi che l' attraversano, si ricevano sopra una superficie piana, parallela alla stessa lente. Il luogo ove questi raggi concorrono in un sol punto, o dove si veggono allontanati ad una

distanza doppia di quella dei fori, sarà quello del fuoco *reale* della lente convessa, e del *virtuale* della concava; e la distanza di quel piano dalla lente, è la respettiva distanza focale.

II. Voglia esaminarsi se l' objettivo di un canocchiale sia ben *centrato*, cioè se il centro di refrazione e quel di figura coincidano nello stesso punto. Ricevuta sopra di un piano l' immagine degli oggetti opposti, formata da un tale objettivo, si giri il tubo che lo contiene; e se l' immagine cangierà di luogo, descrivendo i punti di essa altrettanti circoli, non sarà centrata la lente e dovrà mutarsi di situazione per quanto indica la metà dell' errore notato, finchè si ottenga la ricercata immobilità; indi si toglierà la porzion del vetro superflua che vi cagionava l'eccentricità, e sarà tolto alla macchina uno dei suoi più gravi difetti.

III. Misurar la *forza* dei Canocchiali senza esaminarne separatamente le lenti. Ramsden inventò un istrumento assai semplice ed ingegnoso per questo oggetto, da lui chiamato *dinametro*. Tre piccoli tubi d' ottone scorrono l' uno dentro l' altro. Il più interno è munito di una lente microscopica; il secondo è chiuso da una sottilissima laminetta d' avorio assai trasparente, divisa in decimi di linea; il terzo è del tutto aperto. Il primo e secondo tubo si accomodano in maniera che la lente serva a distinguere ed ingrandire le divisioni della laminetta; e il terzo si adatta al secondo in modo che sulla laminetta medesima cada ben distinta l' immagine dell' *objettivo*. Si osserva allora quante di quelle divisioni ella occupi: si misura poi la vera apertura dell' objettivo in parti della stessa specie, e il quoziente di queste, divise per le prime, darà l' ingrandimento cercato. In fatti posta VV l' apertura dell' objettivo, la linea obliqua Vuf' segnerà il semidiametro $f'h'$ della sua immagine; e fatto $up\ (=f+f')=y'$, si avrà (538) $pf'=x'=\frac{f'y'}{y'-f'}=\frac{f'(f+f')}{f+f'-f'}=\frac{f'(f+f')}{f}$; quindi $Vu : f'h' :: up : pf' :: f : f'$ cioè (574) come la grandezza dell' oggetto veduto coll' occhio armato, a quella con cui si vede coll' occhio inerme.

70

IV. Il modo più spedito per ottener la misura del *campo* di un canocchiale, lo somministra l' Astronomìa, e noi ne parleremo a suo luogo.

605. Aggiungeremo alcuni Problemi ottici per esercizio degli Studiosi ed applicazione delle teorìe.

I. Data la distanza a, di due corpi lucidi di egual chiarezza, determinare il luogo ove essi producono il massimo o minimo lume. *Ris.* Il minimo lume sarà alla distanza $x = \frac{a}{2}$.

II. Sciogliere lo stesso problema; supposta $a = 8$ e le chiarezze $l = 1$, $\lambda = \frac{1}{8}$. *Ris.* Il minimo è $x = 5\frac{1}{3}$.

III. Dovendosi illuminare una lunga strada in modo che la chiarezza dei lumi nella metà del loro intervallo non sia minore di l, cercasi se sarà più economico il collocar dei lampioni di una forza di luce f agl' intervalli $2d$, oppure degli altri di una maggior forza a maggiori intervalli. *Ris.* Posto l' aumento delle forze di luce :: $n : m$ e chiamando x la metà del maggiore intervallo ed s, s' le spese occorrenti, si troverà $x = d\sqrt{\frac{m}{n}}$, ed $s : s' :: 1 : \sqrt{\frac{m}{n}}$, onde il secondo genere di lampioni è a scapito se anche le spese crescono :: $n : m$.

IV. Un piccolo oggetto è fissato orizzontalmente ad una distanza b dal muro a cui dee sospendersi un lume. Si cerca l'altezza del lume più vantaggiosa per illuminar l' oggetto il più che si può. *Ris.* Chiamata x l' altezza perpendicolare del lume sul piano ove è l' oggetto, e z l' altezza angolare presa dal centro dell' oggetto, sarà $x = \frac{b}{\sqrt{2}}$ e $z = 35° \ 15' \ 52''$.

V. Supposto che una sfera lucida CVD del raggio l illumini un piano assai piccolo HF, e che i raggi emanati sopra HF dai punti C, V, D ec. abbiano la stessa forza, qualunque sia la direzione colla quale parton dal corpo lucido, nè s' indeboliscano se non in ragion dei co- 54

54 seni degli angoli d' incidenza CHG, DHG ec., e in ragione inversa dei quadrati delle distanze CH, VH ec., si cerca la quantità dell' illuminazion perpendicolare prodotta sul punto H dal segmento lucido CVD, posto che HF sia normale a GH. *Ris.* Chiamata b la distanza GH, y l' illuminazione cercata, ed $1:\pi$ la ragion del diametro alla circonferenza, si troverà $y = \frac{2\pi l^2}{b^2}$.

VI. Determinare la stessa cosa in supposizione che la luce debba considerarsi come vibrata dal circolo steso per CD, e che la sua forza dipenda non solamente dall' angolo d' incidenza e dal quadrato della distanza, ma ancora dall' angolo di *emersione* fatto dal raggio vibrato col piano raggiante. *Ris.* $y = \frac{\pi l^2}{b^2}$.

VII. A un certo grado di luce un occhio anche sano perde la visione distinta di un corpo isolato il cui diametro è di 18 pollici, nella distanza di 350 tese. Può egli dedursi da una tale esperienza il valore della chiarezza o densità della luce in cui è immerso l' oggetto? *Ris.* La chiarezza cercata sarà alla chiarezza ordinaria del giorno :: 0,00007225 : 1.

53 VIII. Da una stessa parte dell' asse ottico IH son collocati tre oggetti L, B', Z di differenti larghezze a, b, c con gli intervalli m tra il primo e il secondo, ed n tra il primo e il terzo. Cerco un punto I ove collocato l'occhio gli vegga tutti di egual grandezza. *Ris.* Chiamata φ la distanza HL tra il primo oggetto e la normale condotta dal punto cercato I sulla linea degli oggetti, ed ω la distanza HI, si troverà 1°. $\varphi = -\frac{a}{2} + \ldots\ldots$

$$\frac{(b+m)(c+n)(n-m)-(a+n)(a+m)(c+n-b-m)}{2(a+m)(c+n)-2(a+n)(b+m)}$$

ed $\omega = \sqrt{\left(\frac{a(a+m)(a+n)(c+n-b-m)}{(a+m)(c+n)-(a+n)(b+m)} - \varphi^2\right)}$.

IX. Mosso un corpo per una retta qualunque uniformemente, e conosciuti i tempi t, t' in cui passa dal primo

punto di essa a un secondo e a un terzo con gli angoli visuali corrispondenti a, b determinar l' angolo x fatto dalla direzione del moto coll' asse ottico che passa per il primo dei tre punti osservati. *Ris.* $\tan x = \dots\dots \dfrac{(t'-t)\tan a \tan b}{t' \tan a - t \tan b}$.

X. Data l' altezza g di una statua da collocarsi nella facciata di un edifizio, si cerca 1°. a quale altezza x debba situarsi, perchè uno Spettatore in terra alla distanza orizzontale b dalla facciata vegga la statua della grandezza ordinaria c o sotto un angolo dato a; 2°. e in caso che sia data l' altezza x, determinar la distanza a cui dee porsi lo Spettatore per ottener quest' apparenza c o a. *Ris.* 1°. $x = -\frac{g}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(g^2 + 4b^2\left(\frac{g-c}{c}\right)\right)}$, ovvero $x = -\frac{g}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(g^2 + 4b\left(\frac{g - b \tan a}{\tan a}\right)\right)}$: 2°. $b = \sqrt{\left(cx\left(\frac{g+x}{g-c}\right)\right)}$, ovvero $b = \frac{g + \sqrt{(g^2 - 4\tan^2 a(gx + x^2))}}{2 \tan a}$.

XI. Uniti sulla medesima linea LK due oggetti LF, FK di eguali o ineguali grandezze a, b, si domanda un punto o una serie di punti I da cui compariscano eguali. *Ris.* Condotta $D'I = y$ normale alla linea data e fatta $LD' = x = z + \frac{a^2}{a-b}$, si avrà $y^2 = \left(\frac{ab}{a-b}\right)^2 - z^2$, equazione al circolo del raggio $r = \frac{ab}{a-b}$, ove se $a = b$, sarà $r = \infty$, e il luogo cercato una retta indeterminata che passa per F normale ad LK. 53

XII. Collocati sul piano AB'C'E due oggetti B, C, trattasi di disporne altri infiniti di quà e di là in modo che l' occhio P situato alla distanza $PI = a$ dal piano, li vegga in due ordini paralleli tra loro ed alla retta $DI = b$ normale a BC. *Ris.* Gli oggetti debbono collocarsi nei perimetri di due iperbole.

XIII. Dato sull' orizzonte ENC l' angolo $RNC = i$ in faccia ad un corpo lucido sublime, suppongo che l' om- 75

75 bra EN $= d$ di un corpo verticale GE $= a$ si pieghi in NR per una lunghezza g, e cerco l' altezza x del corpo lucido sull' orizzonte. *Ris.* $tang\ x = \frac{a - g\ sen\ i}{d + g\ cos\ i}$.

56 XIV. Data la lunghezza MO $= l$ di uno specchio piano e dato il punto Φ dell' occhio colle distanze ΦG, GO, si cerca di collocare un oggetto CD $= g$ in una situazion parallela allo specchio, tale che colla sua immagine lo occupi esattamente da parte a parte. *Ris.* Supposta ΦG $= b$ e chiamata y la distanza dell' oggetto dal piano dello specchio, si troverà $y = \frac{b(g - l)}{l}$, e di quì tutto il resto.

XV. In faccia a uno specchio concavo di un raggio $r = 8$ *pollici* dee collocarsi un oggetto la cui superficie è 144 *pollici quadri*, in modo che la sua immagine acquisti un' ampiezza 16 volte maggiore. Cercasi la distanza x a cui l' oggetto dee collocarsi. *Ris.* $x = 5$ *poll.*

64 XVI. Dato in un mezzo diafano parallelepipedo come QIΦ, un punto μ, e dato fuori di esso un punto lucido f, trovare il raggio fQ che refratto passi per μ. *Ris.* Condotto per f l' asse $f\Phi$ e date $fN = 5$, NC $= \sqrt{\frac{15}{2}}$ e $C\mu = 2$, si avrà NQ $= x = 3$ e l' incidenza del raggio cercato $= NfQ = 30° 57' 50''$.

XVII. Dato un corpo sferico opaco cinto da un' atmosfera concentrica di trasparenza uniforme, il cui raggio è a quello del corpo opaco $:: n : m :: 40605 : 19500$; determinar quei due raggi che cadendo paralleli e con eguale incidenza sull' atmosfera, forman tra loro dopo le due refrazioni il minimo angolo z, supposta l' incidenza alla refrazione $:: n : 1 :: 250 : 187$. *Ris.* I due raggi son tangenti al corpo opaco e $z = 45°$.

66 XVIII. Sopra una sfera diafana cade un raggio BM parallelo all' asse che forma l' angolo d' incidenza i. Determinare per mezzo di i l' arco QR $= z$ intercetto fra l' asse e il raggio refratto, supposta al solito $n : 1$ la ragion dei seni d' incidenza e di refrazione. *Ris.* $sen\ z =$

$$\frac{sen\,2i\sqrt{(n^2 - sen^2 i)} - sen\,i\,(n^2 - 2sen^2 i)}{n^2}.$$

XIX. Data un' ellissoide di vetro, tale che gli assi dell' ellisse generatrice stiano tra loro in ragion di $3 : \sqrt{5}$, trovare il fuoco dei raggi che vengono paralleli all' asse, determinar l' ampiezza di questo fuoco, e nel caso che egli cada dentro l' ellisse, assegnare il metodo di tagliarne una tal parte, onde il fuoco rimanga nell' aria libera senza alterazione. *Ris.* Il fuoco cercato è il fuoco medesimo dell' ellisse, quello che è più lontano dall' origine dei raggi; l' ampiezza del fuoco è nulla; e se dalla parte opposta all' incidenza si formi una cavità sferica che abbia il centro nel fuoco stesso, potrà tagliarsi il rimanente dell' ellissoide, e il menisco residuo darà il fuoco senza alterazione nell' aria libera.

XX. Si ha da costruire una lente di vetro piano-convessa iperbolica, colla quale i raggi paralleli all' asse si riuniscano esattamente nel fuoco dell' iperboloide opposta: cerco la ragione dei semi-assi a, b dell' iperbola generatrice. *Ris.* $a^2 : b^2 :: 4 : 5$.

XXI. Un miope distingue bene un oggetto alla distanza di quattro pollici e mezzo. Cerco per esso una lente concavo-concava o piano-concava, onde distingua perfettamente anche gli oggetti lontani. *Ris.* Chiamato r il raggio di curvatura della lente cercata, si avrà, se è piano-concava, $r = 27^{lin.}$, se concavo-concava isoscele, $r = 54^{lin.}$.

XXII. Un presbita vede distintamente un oggetto piccolo allorchè è lontano dall' occhio due piedi e mezzo. Vi chiede una lente adattata a legger senza fatica alla distanza ordinaria di 7 pollici e mezzo. *Ris.* Il raggio r di curvatura sarà per la lente cercata $= 5^{poll.}$ se è piano-convessa, ovvero $= 10^{poll.}$ se è convesso-covessa isoscele.

XXIII. Posto che l' apparente grandezza della Luna sia $= 32'$ in circa, qual grandezza avrà in un canocchiale astronomico che porta un objettivo piano-convesso di un raggio $r = 50\,piedi$, ed un oculare isoscele del raggio $r' = 1$

pollice e mezzo. *Ris.* La grandezza dell' immagine sarà 800 volte più grande.

XXIV. Determinar l' aberrazione di sfericità in una lente piano-convessa di flint il cui arco massimo è 8° con un raggio di 60 *piedi*. *Ris.* Chiamato $2x$ il diametro dell' aberrazione cercata, si ha $2x = \frac{1}{14925}$ di linea.

72 XXV. Supposto l' angolo rifrangente CBG di un prisma di flint $= 27° 30'$, determinare un tal angolo rifrangente ACB di un prisma di vetro, che il raggio normale sopra CA esca da BG parallelo, dopo le due refrazioni. *Ris.* L' angolo ACB è di $29° 8' 51''$.

70 XXVI. Date le distanze focali principali f, f' di due lenti convesse VV, C'C' e data la distanza $Eu = a$ di un piccolo oggetto dalla prima lente, cerco la distanza $up = d$ delle due lenti, tale che l' immagine si dipinga in una parete alla distanza $pR = h$. *Ris.* $d = x + y' = \frac{af}{a-f} + \frac{hf'}{h-f'}$.

Fine dell' Ottica.

ELEMENTI

D' ASTRONOMÌA.

606. L' Astronomìa si divide in due parti: la prima, poichè ha per oggetto la cognizione degli *Astri* o Corpi luminosi sparsi nel Cielo, e dei loro moti e rapporti, cioè del *Sistema dell' Universo*, può dirsi *Teoria dei Corpi Celesti*: l' altra, poichè coll' uso di varie macchine e colle pratiche applicazioni estende le teorìe ai differenti bisogni e comodi della Società, può chiamarsi *Teoria delle Macchine e delle Applicazioni Astronomiche*.

607. Finchè si è giudicato immediatamente della natura dei moti celesti dalle loro apparenze, e si è creduto che bastasse il richiamare i fenomeni da spiegarsi a qualche ipotesi già adottata, il sistema del Cielo è rimasto quasi inintelligibile, ed è convenuto perpetuamente moltiplicar le supposizioni, estenderle, limitarle o cangiarle affatto a misura delle scoperte che si facevano e delle ineguaglianze, che si osservavano nel moto degli Astri, creduto prima uniforme.

608. E questa infatti era la conseguenza a cui guidava il fissare come un principio assoluto l' immobilità della Terra. Perciò reca stupore come con ipotesi tanto informe, Tolomeo e Ticone potessero divenir sì benemeriti dell' Astronomìa, e i loro sistemi essere accolti per tanto tempo, finchè argomenti palpabili non ne dimostrarono pienamente l' insufficienza.

609. E' vero che vi fu anche nella più remota Antichità chi trionfò delle volgari opinioni, e che non meno di 24 secoli addietro, cioè fin dai tempi di Anassimandro, fu preso il Sole per centro dei movimenti celesti e la Terra per un pianeta. Pure il difetto degli strumenti e dei metodi necessarj, trovati o perfezionati dopo, non permise di approfondar quest' idea quanto bisognava e quasi lasciò nella spiegazion dei fenomeni la medesima incertezza ed oscurità.

Copernico potè dare a questa Ipotesi un apparato più degno di un Filosofo; e gli studj di Galileo, di Keplero, e di Newton la condusser tant' oltre, che in veco di temer come l' altre il confronto delle osservazioni più recenti, all' opposto le prevenne col raziocinio il più delle volte; e queste osservazioni poi dimostrarono in essa una perfetta uniformità colle leggi più note della Natura. Gli Astronomi successori han seguite le stesse tracce, e per i continui progressi della Meccanica, dell' Ottica e delle Matematiche tutte, l'hanno confermata talmente, che per quanto si perfezionino i metodi di osservare e di calcolare, la Teorìa non avrà mai bisogno di alcun sensibile cangiamento.

610. Noi partiremo pertanto da questa Ipotesi; e colle notizie che il solo lungo tratto dei secoli e la fatica instancabile di tanti Astronomi insigni potea finalmente somministrarci con sicurezza, rintraccieremo il maraviglioso accordo dei fenomeni celesti colle proprietà universali da Dio impresse nella Materia.

PARTE PRIMA

TEORÌA DE' CORPI CELESTI

Idea generale del Cielo.

611. Il Cielo è un' immensa Sfera (454) seminata di corpi lucidi, nominati *Astri*. Gli uni si chiamano *Stelle fisse* perchè conservan sempre sensibilmente la loro respettiva situazione; gli altri, *Pianeti* o Corpi erranti, perchè successivamente cangian di luogo; e quelli la cui comparsa è più rara, meno diuturna e apparentemente men regolare, *Comete*. I primi si manifestan per *luminosi* colla vivezza dei loro raggi, mentre la quieta luce degli altri, e molto più le lor diverse apparenze o *fasi* e l' ombra che gettano dietro a se, gli fanno conoscere *illuminati* d' altronde (435).

612. Il moto diurno di tutto il Cielo intorno a noi è il primo e il più cospicuo fenomeno che si osservi e che cagioni la più gagliarda illusione nei sensi. Ma o il Cie-

lo giri uniformemente intorno alla Terra da *oriente* in *occidente*, o la Terra che sensibilmente n' occupa il centro (454) giri d' intorno al proprio asse da occidente in oriento, la sensazione dei moti è precisamente la stessa (459); ed è la medesima cosa o che un dato punto del Cielo descriva in un giorno 360° d' intorno a noi, o che ogni punto della Terra ne scorra altrettanti in senso contrario. Intanto è certo 1°. che l' *Asse* del Cielo PP' non è se non un prolungamento di quello della Terra: 2°. che l' *Equatore* Q'Q dell' uno, non è se non l' equatore *q'q* dell' altra (L. 673. 674) esteso fino alle fisse, del quale perciò si dicon *poli* due punti P, P' del Cielo, che compariscono immobili, corrispondenti ai poli terrestri: l' uno di essi è chiamato *artico* o *boreale* o *settentrionale* o del *nord*, che è per noi il solo visibile; l' altro si chiama *antartico* o *australe* o *meridionale* o del *sud*: ed essendosi osservato che andando dal Sud al Nord, il polo si alza sull' orizzonte (tale altezza, che è sempre eguale alla distanza dello zenit dall' equatore, ha il nome di *latitudine Geografica*) e si scoprono nuove stelle al Nord mentre sparisce dal Sud una porzione di Cielo prima visibile (succedendo tutto al contrario se si cammini all' opposto), se ne è dedotta con evidenza la curvatura della superficie terrestre.

74

613. Il giro di tutte le Stelle fisse è contemporaneo; nè alcuna di esse ha mai raggiunte quelle che erano avanti a lei, nè si è lasciata raggiungere dalle seguenti, benchè sien tutte isolate, e per l' enormi distanze che le separano, debbano giudicarsi affatto indipendenti l' una dall' altra. Ognuna di esse descrive nello stesso intervallo di tempo o l' *equatore* Q'Q o un *parallelo* HR, IA', la cui distanza QR, QA' dall' equatore stesso, si chiama *declinazione*, e questa determina la velocità respettiva del loro moto apparente. In fatti supposta la stella in A' e la sua declinazione $QA' = \delta$, se si conduca l' ordinata A'G sull' asse PP', sarà $A'G = sen\ A'P = cos\ \delta$ il raggio del parallelo da lei descritto quotidianamente, e quindi la misura della sua celerità (18), determinata dall' intervallo del tempo scorso tra due successivi *appulsi* della medesima stella agli stessi punti del Cielo.

614. Per ben distinguere e questi punti e le stelle tutte, divisero in primo luogo gli Astronomi il Cielo in

parti arbitrarie, abbozzandovi delle capricciose figure suggerite loro o dalla Storia o dalla Mitologia o dal sistema dei lavori campestri, e le chiamaron *Costellazioni*; indi notando con segni particolari tutte le stelle comprese in ogni costellazione (le quali furon classate in sei, sette o più ordini di grandezze secondo le loro apparenze) si posero in grado di riconoscerle ad una ad una. Dipoi per determinarne più precisamente la situazione rispetto all'*Orizzonte* (circolo massimo ove si limita l'emisfero visibile e superiore), condotti per lo *zenit* che n'è il polo, dei circoli *verticali* (L. 675), due ne distinsero specialmente tra tutti gli altri. Il primo è il *meridiano* PZP' che passa per i poli dell'equatore o del mondo, divide il cielo nelle due parti orientale ed occidentale, taglia in mezzo tutti gli archi dei paralleli che restano sopra l'orizzonte e che si chiamano *archi diurni*, indica il punto della massima loro altezza sull'orizzonte medesimo, cioè la *culminazione* degli Astri che gli descrivono, segna colla sua intersezione coll'orizzonte, una linea importantissima detta *meridiana*, e fissa i due punti di *Tramontana* e di *Mezzogiorno*. Il secondo circolo dicesi *primo verticale* che tagliando l'orizzonte a 90° di distanza dai due punti suddetti, ne segna due altri principali d'*Oriente* e di *Occidente*, detti anche *Est* o *Levante*, ed *Ovest* o *Ponente*. Vedremo altrove come si trovi la posizione del meridiano da cui dipende quella di tutti gli altri verticali, l'uso dei quali non è solamente di segnar l'altezza AV degli Astri sull'orizzonte o la lor distanza AZ dal *zenit* che ne è il complemento (L. 399), ma anche di determinare il loro *Azimut*, cioè l'angolo MZV fatto dal meridiano con quel verticale in cui sono, ovvero l'arco MV dell'orizzonte, intercetto tra l'uno e l'altro (L. 677).

74

615. Questi circoli son diversi nei diversi punti della superficie terrestre; ma per un dato paese sono immutabili o almeno non cangiano se non insensibilmente dopo un gran lasso di tempo. A questi principalmente e all'equatore si riferisce tutto ciò che riguarda il moto diurno.

616 Pertanto poichè la misura di questo moto, cioè l'intervallo tra due successivi appulsi di una stella al meridiano (613) non è che il tempo di una rivoluzion della Terra sul proprio asse (610), che è necessariamente uniforme (199), la durata di questo tempo, chiamata *gior-*

no sidereo si dedurrà dal passaggio dei 360° dell' equatore per il meridiano, come dal passaggio di 15°, di 15', di 15" si deduce l' *ora*, il *minuto primo*, il *secondo* ec. (L. 96). Di quì deriva la riduzione delle *parti dell' equatore in tempo* e del *tempo in parti dell' equatore*, e la doppia Tavola costruita per tale oggetto, che è posta sul fine di questo Libro. Il suo uso si manifesta da se medesimo; e solo deesi avvertire che dividendosi e suddividendosi in sessagesimi tanto l' ore che i gradi, una stessa riduzione serve per ordini differenti di parti, e che perciò il titolo della data quantità da ridursi, notato in alto della colonna, richiama quei titoli delle parti ridotte che sono scritti di fianco nello stesso verso: così volendo ridurre in tempo 22° 22' 48" dell' equatore, poichè nella Tavola relativa di fianco, al titolo *gradi* si ha *ore e minuti*, e al numero 22 corrisponde 1.28, per 22° si avrà 1ᵒʳ 28'; parimente perchè di fianco, al titolo *minuti* è segnato *minuti e secondi*, 22' daranno 0ᵒʳ 1' 28", e nello stesso modo 48" daranno 0ᵒʳ 0' 3" 12'"; onde sommando, si avrà per la riduzione cercata, 1ᵒʳ 29' 31" 12'", ovvero 1ᵒʳ 29' 31",2, o anche 1ᵒʳ 29',52, o piuttosto 1ᵒʳ,492, usandosi frequentemente la riduzione delle parti inferiori in decimali delle superiori; perciò si è posta sul fine del Libro anche una Tavola per ridurre i minuti e secondi in decimali di ore o di grado; e anche i minuti, i secondi e l' ore in decimali di giorno. E poichè talora è più comodo di dividere i circoli in 1000 parti, abbiamo pure una Tavola per convertire esse in gradi, e i gradi in esse. Per evitar poi ogni equivoco tra parti di arco e di tempo, queste d' ora in là si noteranno coi segni ᵒʳ ' "; onde 3ᵒʳ 29' significherà tre ore e 29 minuti, 0ᵒʳ 17' significherà 17' di tempo, e 17' senza altro segno indicherà minuti di *grado*.

Segue anche di quì che i circoli di declinazione PgBP', Pg', PΔ si chiamano pure *circoli orarj* o anche *meridiani*, perchè ciascuno lo è per qualche paese; e gli angoli QPB, QPg', QPΔ ec. fatti da essi col meridiano del luogo, *angoli orarj*.   74

617. Ma poichè tutte le osservazioni e le ricerche astronomiche hanno un necessario rapporto al Sole, che oltre ad essere il Corpo più luminoso del Cielo e il regolatore dei giorni e delle stagioni, è anche il centro co-

mune dei movimenti di tutti quanti i Pianeti; è convenuto non solo di riferire all' orbita solare, del pari che all' equatore, la situazione di tutti gli Astri, ma anche di far dipendere dai moti o apparenti o veri di esso la misura del tempo; e ad onta delle loro reali disuguaglianze, cercare i mezzi di richiamarli in qualche maniera a una dimensione uniforme: quindi la necessità di conoscer con precisione questi movimenti.

618. Fu pertanto primieramente osservato che quelle stelle che essendo prossime al Sole, tramontano poco dopo di lui, si perdono molto presto nella sua luce, e dopo un tempo determinato ricompariscono dalla parte opposta e lo precedono nell' alzarsi. Di quì si dedusse, potersi segnare in Cielo la situazion giornaliera del Sole. Si ricorse al metodo di notare i punti o le fisse che quando il Sole è nel meridiano inferiore si trovano nel superiore alla stessa altezza da lui precedentemente segnata, (cioè *che sono nel suo* medesimo *parallelo*), e con successivi confronti si giunse a determinare 1°. la strada o orbita solare nel cielo cioè l' *eclittica* EoC il cui piano passa al solito per il centro terrestre (612): 2°. l' *inclinazione* di quest' orbita coll' equatore, cioè l' angolo CEQ, detto l' *obliquità dell' eclittica* che è di circa 23° 28′, e il loro punto d' intersezione E, che è uno dei punti più principali del cielo. In questo modo si sono anche riconosciute l' *orbite* dei Pianeti, la loro *inclinazione all' eclittica*, i loro *nodi* o punti d' intersezione (uno cioè per cui dalla parte australe dell' eclittica passano i Pianeti alla boreale, il quale è detto *ascendente* e si segna ☊, l' altro opposto al primo che si chiama *discendente* e segnasi ☋), e i tempi del loro *periodo*, cioè della loro intera rivoluzione.

74

619. L' eclittica si divide in dodici parti, ciascuna di 30°, chiamate *Segni*, che prendono il loro nome da altrettante costellazioni vicine, e che si contano andando dall' occidente in oriente e cominciando dal punto ove l' eclittica tagliando l' equatore, si stende verso il polo artico, cioè da E verso *o*. I loro nomi e le loro indicazioni sono: ♈ *Ariete*, ♉ *Toro*, ♊ *Gemini*, ♋ *Cancro*, ♌ *Leone*, ♍ *Vergine*, ♎ *Libra*, ♏ *Scorpione*, ♐ *Sagittario*, ♑ *Capricorno*, ♒ *Aquario*, ♓ *Pesci*; dei quali i primi sei son *settentrionali*, gli altri *meridio-*

FIG.

nali. Che se noi diamo anche il nome di *ascendenti* ai primi ed ultimi tre, perchè il Sole o un Pianeta che vi si trovi, si accosta al nostro *zenit*, e per l'opposto chiamiamo *discendenti* gli altri; ciò non è se non relativo ai nostri climi, come lo è il rapporto dei Segni colle *stagioni*; poichè mentre per noi i segni ♈ ♉ ♊ appartengono alla *Primavera*, ♋ ♌ ♍ all' *Estate*, ♎ ♏ ♐ all' *Autunno* e ♑ ♒ ♓ all' *Inverno*, i nostri *Antipodi* ne fanno una distribuzion totalmente opposta; e quei che vivono nella zona torrida (cioè dove la latitudine, o boreale o australe, è $< 23^\circ\ 28'$) debbon distribuirli anche più diversamente.

620. Ogni punto dunque del Cielo si determina riferendolo o all' equatore o all' eclittica. Sia S un Astro, EQ l' equatore, P il suo polo, EC l' eclittica, Π il polo di essa; se si conducan per S gli archi PSA, ΠSL e sia E il primo punto d' Ariete, l' arco o distanza EL si chiama la *Longitudine* dell' Astro, EA l' *Ascensione retta*, LS la sua *Latitudine*, ed SA la *Declinazione*; quest' ultime due non eccedono 90°, positive se son dalla parte di Π e P, e negative se son da quella di Π′ e P′; l'altre si contano da E verso *o* e da E verso Δ, da 0° fino a 360°. La longitudine suol contarsi anche per segni, e quindi $126^\circ = 4^s\ 6^\circ$, cioè eguagliano un arco di 4 segni con 6 gradi più, ovvero l' astro si trova a 6 gradi del quinto segno, cioè di ♌. L' ascensione retta si conta più d' ordinario in tempo, e in vece di dir 97° si dice $6^{h}\ 28'$ (616). Tutto ciò può dirsi anche del Sole, se non che la sua latitudine (che non eccede mai $1''$) si trascura quasi sempre. 73 74

621. Di quì già si vede che l' obliquità dell' eclittica dee cagionar delle ineguaglianze nel *giorno solare*; poichè supposto ancora che la longitudine del Sole aumentasse uniformemente, è facile il dimostrare che agli uguali aumenti di questa, non corrispondono eguali aumenti d' ascensione retta, cioè che supposto $ot = tr = rn$ ec., non si ha per questo $\Delta g' = g'g = gi$ ec., e che perciò il giorno solare (eguale al giorno sidereo, più il tempo dovuto all' aumento d' ascensione retta) non può esser costante. Ma vi è di più: la parallasse del Sole (455) soggetta a dei cangiamenti (610), ci fa conoscer che cangia la sua distanza da noi (455. 2°.) o piuttosto la nostra da

lui, e quindi che variatone il raggio vettore (130), anchè la sua celerità dee variare (186), cioè che nella sua massima lontananza o *apogeo*, il moto dee esser necessariamente più lento, e più rapido nella massima vicinanza o nel *perigeo*, punti che riferiti al moto della Terra, chiamansi *afelio* e *perielio*; quindi per una seconda ragione, l'ascensione retta del Sole non cresce uniformemente, e il giorno solare dev' esser vario.

622. A tutto ciò deve aggiungersi un' altra causa di alterazione nella misura del tempo. Sia in E il primo punto di ♈ (questo ed il suo opposto chiamansi *punti equinoziali*) e si supponga in esso una fissa, allorchè il Sole partendo di là, avanzasi per l' eclittica ELC. Si è trovato per mezzo di osservazioni accurate, che nel decorso del suo periodo il *nodo* o punto d'intersezione E, *retrocede* in *e*, e che perciò il Sole nel suo ritorno raggiunge prima l' equatore in *e*, che la Stella in E. Un tal fenomeno, dipendente come vedremo, dall' universale reciproca gravitazione, distingue l' *anno tropico* dal *sidereo*, e fa che laddove il secondo è di giorni $365^g, 2564236 = 365^g\ 6^{or}\ 9'\ 15'' = 31558155''$, il primo è solamente di $365^g, 242292 = 365^g\ 5^{or}\ 48'\ 54'' = 31556934''$, prescindendo da alcune piccole cause perturbatrici di cui per ora non parleremo. Questa differenza dei due periodi chiamasi *precessione degli Equinozj* o *retrogradazione del nodo* dell' eclittica, il cui medio valore annuo è fissato inoggi a $50'', 054$. Quindi il nodo non può trascorrer l' intera eclittica se non nello spazio di anni 25800 e più.

623. Deriva da tutto ciò 1°. che nell' intervallo di un giorno solare medio, passano per il meridiano $360°\ 59'\ 8'', 33$, poichè si trova $31556934'' : 360° :: 86400''\ (= 24^{or}) : 0°, 985647 = 59'\ 8'', 33$: e che ogni ora solare media si misurerà dal passaggio di $15°, 041$ dell' equatore $= 15°\ 2'\ 27'', 8$: così ogni minuto darà $15'\ 2''\ 27''', 8$ ec. (616): 2°. che regolandosi un orologio sul tempo sidereo, il giorno solare è di $24^{or}\ 3'\ 56'', 56$, mentre se si regoli sul tempo medio solare, il giorno sidereo è di $23^{or}\ 56'\ 4'', 09$; e le fisse sembrano anticipare di $236''$ per giorno, cioè di $9'', 83$ per ora.

624. Frattanto nell' incostanza dei movimenti solari o piuttosto terrestri (610), ecco il compenso a cui son ri-

corsi

corsi gli Astronomi. Suppongasi in E l' *afelio della Terra* (giacchè dall' afelio si desume comunemente il principio dell' orbita di un Pianeta) o per servir più all' uso, l' *apogeo solare;* e fingasi che mentre il Sole parte da E per trascorrere col suo solito moto l' eclittica EoC, un altro Sole *ideale* scorra con moto uniforme l' equatore EΔQ avanzandosi quotidianamente di $59' 8'', 33$ (623). E' chiaro 1°. che rare volte i due Soli saranno insieme nel meridiano; 2°. che l' ore del primo cangieranno sempre misura; 3°. che il secondo darà il tempo *medio* o uniforme, e correggerà le ineguaglianze del tempo *apparente*, detto anche *vero*. Cerchisi dunque la lor differenza, cioè l' *equazione del tempo* per il meridiano PoΔ. Suppongo giunto in *o* il Sole vero, mentre l' ideale è in g'; e quindi $E\Delta = A$ l' ascensione retta vera, $Eg' = A'$ la media, e $\Delta g' = A' - A$. Osservo che mentre g' viene in Δ (poichè il moto diurno si fa da g' verso Δ, laddove l' ascensione retta cresce da Δ verso g'), la sua ascensione retta si aumenta (per il suo moto proprio) di un piccol arco $g'g = q$, onde non si ha mezzogiorno medio, finchè non passa per il meridiano l' intero arco Δg. Sia perciò $\Delta g = x = A' - A + q$, e sia $h = 59' 8'', 33$ (623) l' avanzamento medio del Sole in un giorno, e perciò $360° + h$ la misura dell' arco dell' equatore scorso per il meridiano in un giorno solare. Si avrà pertanto $360° + h . h :: x : q$, e quindi $360° : 360° + h :: x - q : x :: A' - A : x$, ed $x = \frac{(360° + h)(A' - A)}{360°}$; onde riducendo tutto in tempo, $x'' = T = \frac{24''(A' - A)}{360°} = \frac{1''(A' - A)}{15°}$. Supponendosi in Δ il Sole ideale e in *t* il vero, sarà $Eg' = A$, $E\Delta = A'$; il Sole vero prima di giunger da *t* in O per cagion del moto diurno, passerà per cagion del proprio da *t* in *r*, e la sua ascensione retta diverrà Eg; perciò il solito arco Δg determinerà l' equazion del tempo, e col raziocinio medesimo si troverà $T' = \frac{1''(A - A')}{15°}$, onde infine generalmente $T = \frac{\pm 1''(A' - A)}{15°} = A''' \backsim A''$, cioè *l' equazion del tempo è la differenza tra l' ascensione retta*

vera e la media (che è eguale alla longitudine media) *del Sole, convertita in tempo a ragion di* 15° *per ora*. Lo stesso si ha, riferendo il Sole alle fisse; ma paragonando queste tra loro, la differenza in ascensione retta calcolata in tempo solare è in ragion di 15° per $0'' 59' 50'',17$ e di 1° per $0'' 3' 59'',34$ ec. (616). Nel primo caso quando $A' > A$, il mezzo giorno vero precede le ore 12 e nel secondo allorchè $A' < A$ le segue, cioè si ha $12'' - T$, ovvero $12'' + T'$ o piuttosto $0'' + T'$; e questo dicesi il *tempo medio a mezzo giorno vero*. Parleremo altrove del modo di determinarne giorno per giorno la quantità o di dedurla con facilità dalle Tavole che daremo sul fine di questo Libro.

625. Segue da tutti questi principj 1°. che due Paesi i cui meridiani faccian tra loro un angolo di $15^\circ, 30^\circ$ ec. conterranno sempre sui loro orologj regolati col moto medio solare $1'', 2''$ ec. di differenza o in $+$ o in $-$, secondo che la posizione dell' uno è orientale o occidentale all' altro: questi angoli orarj (616) si riferiscono per lo più a un *primo meridiano* scelto ad arbitrio, da cui si conta la *longitudine geografica* cioè la distanza angolare o oraria d' ogni Paese: per esempio, se prendasi per primo meridiano quello dell' Osservatorio di Parigi, la longitudine di Firenze all' Osservatorio delle Scuole Pie si trova essere $8^\circ 55' 30''$. Chiamando h° i gradi di quest' angolo, h'' il tempo corrispondente, si avrà $h'' = \frac{h^\circ}{15} = 0'' 35' 42''$, cioè mentre noi abbiam $12''$, Parigi ha solamente $11'' 24' 18''$; e all' opposto mentre sono là $12''$, noi avremo $12'' 35' 42''$.

Nell' ipotesi stessa l' Osservatorio di Brera in Milano ha $6^\circ 51' 0''$ di longitudine, che espressa in tempo è di $0'' 27' 24''$; onde la differenza tra questi due Osservatorj si trova $2^\circ 4' 30''$ cioè in tempo $0'' 8' 18''$ che noi contiamo di più. Sul fine di questo Libro si troverà la Tavola delle Longitudini e Latitudini degli Osservatorj e Luoghi più rimarchevoli della Terra.

626. 2°. Che essendo noto il momento in cui accade qualche celeste fenomeno a vista di due Paesi, la differenza dell' ora che contano l' uno e l' altro darà la differenza delle lor longitudini.

627. 3°. Che conosciuta tal differenza h'', è facile di dedurre da un' osservazione fatta in un meridiano, quella che si sarebbe fatta in un altro, purchè si sappia il cangiamento diurno d del corpo celeste osservato; poichè essendo tali cangiamenti nel breve corso di un giorno piccoli assai, se se ne eccettui la Luna, posson trattarsi come uniformi; e la quarta proporzionale dopo $24''$, h'' e d sarà respettivamente ciò che deve aggiungersi o togliersi per la riduzione desiderata.

628. 4°. Poichè il giorno astronomico *vero* principia e termina con due successivi appulsi del centro solare al meridiano (cosicchè supposto E♈MQ l' equatore, P il polo, EPM la sezione del meridiano, e il Sole in S o S', l'arco orario $h°$ sarà MS o M♈ES'), tosto che sia nota l' ascensione retta A del Sole, si saprà il *mezzo del Cielo*, cioè qual punto dell' equatore attualmente si trovi nel meridiano. In fatti sommando $h°$ con A, e detraendone se occorra 360°, si avrà ♈M = ♈S + SM se il Sole è in S, ed = ♈MS' (= A) + M♈ES' (= $h°$) — 360° se è in S': quindi conosciuto l'arco ME♈ *distanza* D *dell' equinozio al meridiano*, si avrà il momento in cui vi arriverà, convertendo l' arco ME♈ in tempo solare (624). Lo stesso è per trovar l' istante in cui passerà per il meridiano una fissa F di cui si conosce l' ascensione retta A' = ♈F, riducendo A' + D in tempo solare medio o anche facendo uso della nota Tavola (616) e togliendo poi dal risultato 10'' per ora (613). Per es. avendosi per il dì 27 di Luglio 1810 a mezzogiorno in Firenze D = 15'' 35' 53'', 3, se si cerchi quando passerà per il meridiano la Stella polare, la cui ascensione retta A' = 0'' 54' 39'', 7, avremo A' + D = 16'' 30' 33'', 0 — 165'' = 16'' 27' 48'' = 16'', 4625. Se nelle Tavole si abbia solamente l' ascensione retta del Sole A, basterà aggiunger 24'' all' ascensione retta della Stella, e 24'' + A' — A darà il risultato medesimo. Che se la ricerca sia per un altro Paese, converrà prima di tutto, che A o D data dalle Tavole, si riduca dal meridiano per cui son fatte, al meridiano proposto (627). Per maggior comodo dei giovani sarà posta in fine di questo Libro una *Tavola* (XVI) ove son notate le posizioni di 36 principali Stelle oltre la *polare*, colle lor variazioni ec., e in seguito un' altra Tavola (XVII) o-

76

ve si indica la culminazione di 17 di esse per tutto l'anno, di 7 in 7 giorni, calcolata per gli anni bisestili, colla correzione da farsi per gli intermedj.

E quì è da notarsi, che numerandosi dagli Astronomi 24 ore da un mezzogiorno all'altro, mentre nel giorno civile si contano dalla mezzanotte, di 12 in 12, divise in ore della *mattina* e della *sera*, quelle del primo metodo che oltrepassano questo numero appartengono alla mattina del dì seguente. Così per esempio, $17^{or}\ 54'\ 8''$ del dì 28 di un mese, sono le $5^{or}\ 54'\ 8''$ della *mattina* del dì 29.

74 629. 5°. Finalmente poichè l'eclittica EC nel movimento diurno taglia successivamente l'orizzonte SKM in punti diversi, il punto *n*, medio tralle due sezioni (tale cioè, che $Kon = 90°$, e che chiamasi il *nonagesimo*) oltre ad essere un punto sempre diverso, deve anche trovarsi in posizione sempre diversa nel cielo. È facile per altro il determinar la longitudine di questo punto, e la sua altezza sull'orizzonte: poichè trovata l'ascensione retta del mezzo del cielo Q (628) e dati perciò nel triangolo EQC rettangolo in Q, l'angolo E (618) e il lato EQ, si avranno (L. 684) i lati EC, CQ, longitudine e declinazione del *punto culminante* C, e l'angolo ECQ dell'eclittica col meridiano; quindi nel triangolo CKM rettangolo in M, di cui son noti l'angolo C e il lato CM (somma o differenza della declinazione QC e dell'altezza QM dell'equatore, o sia del complemento della latitudine del paese) $= MQ \pm QC$, si otterranno il lato CK e l'angolo CKM. Dunque 1°. se $CK > 90°$, sarà $Cn = CK - 90°$; e se $CK < 90°$, si avrà $Cn = 90° - CK$; e quindi in ambedue i casi la *longitudine del nonagesimo* $(= EC \mp Cn) = EC + 90° - CK$; ove è evidente, che essendo $QZ > CQ$, saranno MQ ed $MC < 90°$; e perciò se l'ascensione retta di $Q > 90°$ e $< 270°$, il punto E sarà sotto l'orizzonte, e l'eclittica ne taglierà la parte occidentale SKM coi segni settentrionali (619) e sarà $MK > 90°$; onde l'ipotenusa CK sarà $> 90°$ (L. 682) e in ogni altro caso al contrario: 2°. l'angolo CKM è l'*altezza del nonagesimo n* sull'orizzonte; poichè se si supponga condotto per *n* un arco *nf* normale a K*n*, sarà K il suo polo (L. 675) e l'arco dovendo passare anche per Z, polo di SM, sarà un verticale la cui porzione inter-

cetta tra Kn e KM misurata dall'angolo CKM (L. 677) sarà l'altezza cercata. È chiaro che l'arco fnZ dee passare anche per il polo Π dell'eclittica, cui è normale in n.

630. Del resto, riguardo al Sole e a qualunque Astro che muti declinazione, s'intenderà facilmente, che combinandosi il moto diurno col periodico, dee risultarne una trajettoria apparente, simile a una spirale doppiamente curva (L. 802) che imitando sensibilmente dei circoli paralleli all'equatore QQ', si scosterà da questo alternativamente, ora verso il polo artico fino in o ove la declinazion boreale Δo è la massima, ora verso la parte australe alla distanza medesima; e in questi limiti sembrerà che il Pianeta prima si fermi e in seguito retroceda: perciò (parlando del Sole) il punto o e il suo opposto chiamansi i *punti solstiziali* di ♋ e di ♑, e i paralleli condotti per questi punti, come HR, diconsi i *tropici*. Conducendo dal polo P due circoli uno ad E e l'altro per o a Δ, questi soglion dirsi i *coluri*, il primo *degli equinozj*, e il secondo *dei solstizj*.

631. Ma si supponga costante la declinazione δ d'un Astro situato in o, e sia $ZQ = l$ la latitudine del Paese (se $l = 0$, la *sfera* dicesi *retta* perchè tutti i paralleli son normali all'orizzonte; se $l = 90°$ dicesi *parallela*; in ogni altro caso è *obliqua*): il parallelo HoR dell'Astro sarà tagliato dall'orizzonte SM in F, ed FR sarà il suo arco *semidiurno* (614). Per determinarne il valore, cioè l'angolo $h° = QPF$, conduco dal polo P e dallo *zenit* Z gli archi ZF e PF che prolungo in Y; e poichè nel triangolo ZPF si ha $PZ = 90° - l$, $PF = 90° - FY = 90° - \delta$, e $ZF = 90°$, sarà (L. 687. II.) $\cos h° = \frac{0 - \operatorname{sen} l \operatorname{sen} \delta}{\cos l \cos \delta} = -\operatorname{tang} l \operatorname{tang} \delta$; onde a una maggior declinazione settentrionale e a una minore meridionale corrisponderà un arco semidiurno più grande, ed all'opposto nei casi opposti; e se sia $\pm \delta = 90° - l$, si avrà $\cos h° = \mp 1$, ed $h° = 180°$ ovvero $0°$ (L. 611); cioè l'Astro non tramonterà mai se la declinazione è positiva o boreale, e non nascerà mai se è australe o negativa. Tali sono le stelle chiamate *circumpolari*.

632. Dunque 1°. per gli Astri che mutan declinazione, come i Pianeti e il Sole, gli archi semidiurni so-

no in aumento dall' istante della loro massima declinazione australe fino a quello della massima boreale, e viceversa: 2°. perciò gli archi diurni del Sole saranno tagliati inegualmente dal meridiano; e l'arco semidiurno orientale sarà, dal solstizio d'inverno a quello d'estate, minor dell' occidentale; e all' opposto in tutto il resto dell' anno: 3°. ciò che si dice dell' orizzonte, dee dirsi anche di qualsivoglia *almicantarat* o circolo parallelo all' orizzontale; e perciò il Sole dal dì 21 Dicembre al 21 di Giugno scenderà più tardi dal meridiano a una data altezza, di quello che dalla medesima altezza sia precedentemente salito al meridiano: di quì la *correzione* che dicesi *delle altezze corrispondenti*, tanto necessaria per trovar la vera sezione del meridiano coll' orizzonte o sia *la meridiana* del Paese, di che parleremo altrove (739).

633. Fin quì per altro la nostra situazione non si è distinta da quella dei centri o della Terra o dell' Universo: ma se la distanza degli Astri non è infinita, quella che è dal centro alla superficie del nostro globo dee cagionar necessariamente delle illusioni ottiche nella lor posizione ed assoggettarli a una parallasse (455) per cui col solo abbassarsi lungo il verticale (455. 7°.), come da A in *a*, se ne cangia la declinazione *Ag* in *ag'*, l'ascen-

74 sione retta E*g* in E*g'*, come se ne altera pure la longitudine e la latitudine, e se ne diminuisce perfino l'arco diurno (631); inoltre se la Terra non è una sfera, le illusioni debbon moltiplicarsi anche più, e non potrà esattamente conoscersi il vero stato del Cielo senza conoscer con sufficiente esattezza la curvatura della superficie terrestre (612).

634. Ora sembra deciso dall' osservazioni, che le Stelle fisse generalmente o non han parallasse alcuna o l'hanno minore di 2″, poichè da qualunque punto della Terra si osservino, non si trovan sensibilmente o più o meno discoste dall' equatore o dal polo; talchè tutti i raggi visuali condotti a una medesima stella dai punti i più separati, son paralleli tra loro. Non è lo stesso però nè del Sole nè dei Pianeti, la cui parallasse può determinarsi, e quindi anche la distanza (455. 4°). In fatti sia S il Sole o un Pianeta, TET′ un meridiano terrestre in

77 cui concorran due Osservatori T e T′ (627); siano TR,

T'o i loro orizzonti *sensibili* (il vero *orizzonte astronomico* passa per il centro); TC, T'C $= r$, r', i raggi terrestri, non supposta la Terra sferica; Tt, $T'r$ due rette normali ai raggi; u, u' gli angoli tTR, rT'o; a, a' le respettive altezze apparenti RTS, oT'S del Sole; e in fine sia Σ una stella o un punto fisso nel Cielo, visibile da T e da T'. Chiamerò d, d' gli angoli STΣ, ST'Σ; z l'angolo TΣT', ed x l'angolo TST' $= p \pm p'$, cioè eguale alla somma o differenza delle parallassi corrispondenti all'altezze a, a' in T e T' (455) secondochè i due Astronomi son rivolti o verso i due poli opposti o verso lo stesso polo, e sarà ΣMS $= z + d = x + d'$ (L. 425), e quindi x $(= p \pm p') = d - d' + z = d - d'$, perchè $z = \frac{1}{\infty} = 0$: e poichè supposte P, P' le parallassi orizzontali dell'Astro in T e T', si ha (455. 3°) $p = \mathrm{P} \cos(a + u)$, $p' = \mathrm{P}' \cos(a' + u')$ (se lo *zenit* non fosse tra il Sole e il polo corrispondente alla respettiva latitudine, si dovrebbe dire $a - u$, $a' - u'$ come è evidente), e quindi per esser $\mathrm{P} : \mathrm{P}' :: r : r'$ (455. 2°) e perciò $\mathrm{P}' = \frac{\mathrm{P}r'}{r}$, verrà x $= d - d' = \mathrm{P} \cos(a + u) \pm \frac{\mathrm{P}r'}{r} \cos(a' + u')$ e finalmente $\mathrm{P} = \frac{r(d - d')}{r \cos(a + u) \pm r' \cos(a' + u')}$ parallasse orizzontale per il punto T. Di quì si ha la parallasse per ogni altro punto terrestre di raggio noto. Se $r = r'$, si confonderanno tT con TR ed rT' con T'o, e sarà $u = u'$, $= 0$, e $\mathrm{P} = \frac{d - d'}{\cos a \pm \cos a'}$, parallasse orizzontale di tutta la Terra supposta sferica.

77

635. Ma benchè questa si possa prender per tale in parecchi casi, contuttociò nè lo è rigorosamente, nè talora si può supporla senza notabile errore. Quindi la necessità di determinar la figura del meridiano, almeno con una certa approssimazione, giacchè non è fino ad ora sperabile di conoscerla con precisione. In fatti se anche volesse supporsi la Terra un solido di rivoluzione(204), è sì poco determinata la legge di gravità nell' interno della mole terrestre, sì varia la densità e disposizione de suoi strati e delle lor parti solide e fluide, sì irrego-

lari le cavità, sì disuguale la superficie da cui cominciasi a calcolare, finalmente sì lontani da qualunque legge costante i risultati dei Matematici nelle misure dei gradi terrestri e sì poco sicuri da errore (o per l'incerto valor delle refrazioni, o per le frequenti deviazioni del pendolo dalla vera perpendicolare, originate dalle particolari attrazioni, o per le piccole alterazioni prodotte nelle misure dalla temperie del clima e forse anche da certe insensibili differenze e frazioni sfuggite nell'applicarle successivamente), che siamo ancora su questo punto in qualche incertezza, e solamente può stabilirsi 1°. che la Terra è compressa ai poli: 2°. e che i meridiani, se si suppongano di figura sensibilmente uniforme, poco differiscono da un'ellisse di piccola eccentricità. Ciò risulta e dall'applicazione della teorìa dei pendoli e dalle misure dei gradi di latitudine prese in luoghi molto distanti l'uno dall'altro. Diamo un'idea del primo di questi metodi.

636. Poichè il tempo t d'un'oscillazione è $= \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$ (175), se in latitudini differenti sia necessario che un pendolo (affinchè batta i secondi) cangi di lunghezza, ed r divenga r', dovrà anche la gravità g essersi cangiata in g' ed aversi $\sqrt{\frac{r}{g'}} = \sqrt{\frac{r'}{g}}$, e quindi $r : r' :: g : g'$; e perciò essendosi trovato che dall'equatore ai poli deve r aumentarsi, convien concludere che verso i poli g aumenta e che vi si è perciò più vicini al centro. Sappiamo intanto che sotto l'equatore la lunghezza del pendolo $r = 439^{lin},21$ e che perciò lo spazio s descritto dai gravi liberamente cadenti dev'essere (60) $= \frac{r\pi^2}{2} = 2167^{lin}, 41 = 15^p, 0515$, mentre nella nostra latitudine $r' = 440, 378$ e ai poli $r'' = 441, 45$, ci danno $s' = 15^p, 0915$, $s'' = 15^p, 128$ e per conseguenza $g : g' : g'' :: 30, 103 : 30, 183 : 30, 257$ (52).

637. Noteremo quì di passaggio 1°. che dall'osservazioni dei pendoli si è dedotto esser *l'aumento della gravità sensibilmente proporzionale al quadrato del seno della*

della latitudine : 2°. che supposto $PE = r$ il raggio dell'equatore (= 19629348 *piedi* secondo le più recenti teorie), ED l'arco del suo moto in 1″, a la lunghezza del pendolo, ed $\frac{a\pi^2}{2}$ ($= s$) la celerità di rivoluzione in E, sarà $ED^2 = 2r \times \frac{a\pi^2}{2}$ (200) ed $ED = \pi\sqrt{ar}$; onde il tempo x impiegato nell'intera rivoluzione si avrà facendo $\pi\sqrt{ar} : 1'' :: 2r\pi$ (L. 520) : $x = 2''\sqrt{\frac{r}{a}}$, che sostituendo il valor del raggio ridotto in linee, darà 5073″, 74, cioè la rotazione sarebbe 17 volte più celere di quel che non è, se si facesse con una forza eguale a quella dei gravi alla superficie: 3°. chiamando f la forza centrifuga ed $s = 15$, 0515 (636) l'attual valore della gravità in E, sarà DE ($= r \times arc\ 15'', 041$ (623)) la celerità della rotazione, ed $f = \frac{ED^2}{2r}$ (200) $= \frac{r\,(arc\ 15'', 041)^2}{2} = 0{,}052188 = \frac{s}{88}$ cioè non cadendo i corpi se non per la differenza delle due forze, sarà la gravità totale $G = s + f = s + \frac{s}{288} = \frac{289s}{288}$ e perciò $G : f :: 289 : 1$.

FIG. 76

638. Anche le misure dei gradi di latitudine sulla superficie terrestre danno la medesima conseguenza: poichè se la Terra fosse una sfera, è evidente che un *grado* terrestre, cioè *quel tratto* m *di meridiano che è necessario percorrere, affinchè l'antico zenit si discosti un grado dall'attuale verticale*, sarebbe $\frac{1}{360}$ della circonferenza ed una misura costante: ma se m cangia, la convessità della Terra sarà in ragione inversa di m (L. 509) e quindi poichè i gradi aumentano verso i poli, convien dedurne che la Terra è meno convessa e perciò schiacciata da quella parte. Premesso ciò, l'ipotesi della sua *ellitticità*, ancorchè non vogliasi riguardarla qual conseguenza del movimento diurno, pure è adottata ormai universalmente, come la più idonea per conciliar con maggior approssimazione le irregolarità incontrate nel cangiamento o della misura dei pendoli o di quella dei gradi. Suppongo pertanto EPep l'ellisse generatrice della Terra, e date con esattezza alme- 77

FIG. 77

no due misure di gradi Ti, hl (m, m') cerco la compressione k del solido, cioè la differenza tra i semiassi CE $= 1$ e CP $= b$. Condotte da T, i le normali Tq, iq, sarà Tq il raggio osculatore in T (L. 867) $= r = \frac{4n^3}{p^2}$ (L. 871), e nel modo stesso in h si avrebbe $r' = \frac{4n'^3}{p^2}$, onde $r : r' :: n^3 : n'^3$; quindi se sia T$u = y$, C$u = x$, T$n = n$, T$nu = l$ (latitudine del Paese T), si avrà $y = n \, sen \, l$, $n^2 = y^2 + b^4 x^2$ (L. 758) $= n^2 \, sen^2 \, l + b^4 x^2$, e perciò $x^2 = \frac{n^2 \cos^2 l}{b^4} = 1 - \frac{n^2 \, sen^2 \, l}{b^2}$ (L. 755), ed $n = \frac{b^2}{\sqrt{(\cos^2 l + b^2 sen^2 l)}}$: del pari si troverà per il punto h, $n' = \frac{b^2}{\sqrt{(\cos^2 l' + b^2 sen^2 l')}}$ e di quì si ha $n^3 : n'^3 :: \sqrt{(\cos^2 l' + b^2 sen^2 l')^3} : \sqrt{(\cos^2 l + b^2 sen^2 l)^3} :: (1 - (1 - b^2) sen^2 l')^{\frac{3}{2}} : (1 - (1 - b^2) sen^2 l)^{\frac{3}{2}} :: r : r' :: m : m'$ (L. 508); e poichè $k = 1 - b$ dà $b^2 = (1 - k)^2 = 1 - 2k$ (per esser k^2 piccolissimo) ovvero $1 - b^2 = 2k$, sarà $m^{\frac{2}{3}} : m'^{\frac{2}{3}} :: 1 - 2k \times sen^2 l' : 1 - 2k \, sen^2 \, l$ e finalmente $k = \frac{m'^{\frac{2}{3}} - m^{\frac{2}{3}}}{2m'^{\frac{2}{3}} sen^2 l' - 2m^{\frac{2}{3}} sen^2 l}$: cioè se la latitudine si prenda dal punto medio della misura, e sia $l = 0$, cioè sia m il grado dell'equatore, avremo k, ovvero più scrupolosamente se per $1 - b^2$ si prenda esattamente non $2k$ ma $2\left(k - \frac{k^2}{2}\right)$ sarà $k\left(1 - \frac{k}{2}\right) = \frac{1 - \frac{m^{\frac{2}{3}}}{m'^{\frac{2}{3}}}}{2 \, sen^2 \, l'}$.

639. Combinate pertanto col mezzo di queste formule, a due a due, tutte le misure dei gradi fin quì ottenute e preso il medio tra i risultati, si avrà la compression della Terra ai poli con sufficiente approssimazione. Con un tal metodo, rettificato per mezzo delle ossrvazioni celesti, i più moderni e valenti Astronomi ne han fissata la quantità anche con maggior precisione. Noi adotteremo tralle diverse ipotesi, tutte però quasi cospiranti, quel-

la che ci sembra la più sicura che è di $\frac{1}{310}$, e supporremo perciò che i semiassi equatoriale e polare stiano tra loro : : 310 : 309. Intanto se sia e l'eccentricità (L. 746), sarà $e^2 = 1 - b^2 = 2k$, e perciò $\frac{e^2}{2} = k$, o piuttosto $= k\left(1 - \frac{k}{2}\right) = \frac{1}{310}\left(1 - \frac{1}{620}\right) = 0,0032206035$, ed $e = 0,0802571309$.

640. Fissate queste quantità, sarà facile di determinare ciò che più interessa in questa sferoide.

I°. Vogliasi la *misura m' d' un grado di meridiano* alla latitudine l. Fatto $k\left(1 - \frac{k}{2}\right) = h$, sostituendo nella formula di sopra (638) l ad l' e riducendo, si avrà $2hm'^{\frac{2}{3}} sen^2 l = m'^{\frac{2}{3}} - m^{\frac{2}{3}}$ cioè $m'^{\frac{2}{3}}(1 - 2h\, sen^2 l) = m^{\frac{2}{3}}$ e quindi $m' = m(1 - 2h\, sen^2 l)^{-\frac{3}{2}} = m\left(1 + 3h\, sen^2 l + \frac{15}{2} h^2\, sen^4 l\right)$ (L. 156) omettendo i termini seguenti come trascurabili affatto.

II°. Si cerchi *l' angolo al centro* $TCu = C$. Nei triangoli TuC, Tun, preso Tu per raggio, e per tangenti l'ascissa Cu e la sunnormale $nu = b^2 x$ (L. 758), si avrà $Cu\,(x) : nu\,(b^2 x) : : tang\, CTu\,(cot\, C) : tang\, nTu\,(cot\, l)$ cioè $1 : b^2 : : cot\, C : cot\, l : : tang\, l : tang\, C = b^2 tang\, l$.   77

III°. *L' angolo* CTn $(= v)$ *della verticale* è immediatamente $= l - C$.

IV°. Prolungandosi uT in d finchè $uT : ud : : b : 1$, il punto d è nella circonferenza del circolo circoscritto (L. 754) e in conseguenza $Cd = CE = 1$. Perciò chiamandosi φ l'angolo dCu, si avrà $b : 1 : : tang\, C : tang\, \varphi = \frac{tang\, C}{b} = b\, tang\, l$ e $Cu = cos\, \varphi$; ma si ha anche $Cu = CT\, cos\, C$; dunque $CT\, cos\, C = cos\, \varphi$, e quindi sarà il *raggio terrestre* $CT = \frac{cos\, \varphi}{cos\, C}$.

V°. Condotta inoltre Tm parallela a Cu, sarà $Tm = Cu = cos\, \varphi$ il *raggio del parallelo* corrispondente al paese T.

VI°. Quindi il *grado di longitudine* in T sarà $= arc\, 1° \times cos\, \varphi$ (L. 522).

FIG. 77

VII°. Avendosi $TgC = 90° - Cng = 90° - l$, e $TCg = 90° + C$, si troverà nel triangolo CTg, *sen* TgC (*cos l*): CT : : *sen* TCg (*cos* C) : Tg, onde *la verticale prolungata fino all' asse* della Terra $= Tg = \frac{CT \cos C}{\cos l} = \frac{\cos \phi}{\cos l}$.

VIII°. Così pure si avrà *sen* TgC (*cos l*): CT : : *sen* $\times$ CTg (*sen v*) : Cg, cioè *l'intercetta tra il centro e l'intersezione della verticale prolungata coll' asse* sarà $\frac{CT \, sen \, v}{\cos l}$.

IX°. Per ultimo se sia Cs normale a Tg, si avrà la distanza *dal centro alla verticale prolungata* $= CT$ *sen v*, ove convien rammentarsi che tutti questi valori lineari si han quì in parti del raggio $CE = 1$; onde per averne la quantità assoluta convien moltiplicargli per il raggio dell' equatore $r = 3271558$ *tese* $= 10925478$ *braccia* comuni *di Firenze*. Quanto ad m, gli Astronomi più recenti la fanno $= 56729, 18$ *tese* $= 189449$ *br.*, misura che si è adottata come fondamentale, perchè si ottengon da essa dei risultati generalmente più analoghi all' osservazioni. Nel fin del libro daremo una *Tavola* calcolata su questi fondamenti, ove saran riuniti gli angoli della verticale, i logaritmi dei raggi terrestri e le misure medie dei gradi di latitudine e di longitudine per ogni grado di latitudine della Terra.

Astronomia sferica.

641. Tutta la natura dei movimenti celesti dipende o dalla situazione dell' Osservatore rispetto all' asse terrestre, o dalla situazione di quest' asse rispetto all' orbita da lui descritta. Quindi tutto si riduce ai rapporti dell' Equatore o coll' Orizzonte o coll' Eclittica, dei quali i primi posson chiamarsi locali e particolari, gli altri universali. Ciò abbraccia quel che si chiama Astronomia sferica che interamente riducesi alla semplice soluzione di due triangoli.

74

642. I. Sia dunque Q'ELQ l' equatore, P il polo boreale, SKVM l' orizzonte, SPZQM il meridiano ed A un astro di cui si cercano il moto e la posizione. Condotti per A il parallelo A'AI, l' arco di declinazione PAg e il verticale ZAV, sarà $Ag = \delta$ la *declinazione* dell' astro, AV la sua *altezza* a, $AZM = MV$ (L. 677) il suo azi-

FIG. 74

mut z, ZPA = Qg il suo *angolo orario* h (612), e ZQ = l la *latitudine* del paese (612). Date pertanto tre delle quantità δ, a, z, h, l, si troveran l'altre due col solo mezzo del triangolo PZA, in cui si ha ZA $= 90° - a$, PA $= 90° - \delta$, PZ $= 90° - l$, ZPA $= h$, PZA $= 180° - z$. Chiameremo p l'angolo ZAP che suol dirsi *parallattico*, il cui uso è non rare volte assai comodo per il calcolo, e il cui valore è sempre facile a ritrovarsi, essendo (L. 684) $sen\ p = \frac{cos\ l\ sen\ z}{cos\ \delta} = \frac{sen\ h\ cos\ l}{cos\ a}$ ec.; ed avvertiremo che se l'Astro è dalla parte australe dell'equatore come in B, la sua declinazione Bg dee prendersi negativamente (L. 611) ed è perciò B$g = -\delta$.

Non resta dunque che di applicare i consueti Problemi (L. 713 *e seg.*) al triangolo PZA, ponendo in luogo dei valori generali a, a', a'', g, g', g'' delle formule, i valori proprj del nostro caso, o per evitare in alcune di esse le soluzioni indirette sostituire opportunamente i seni ai coseni ec, eliminare i divisori comuni, quadrare, ridurre ec. (L. 727 III. VI. VII. VIII.). In tal modo si son formate le seguenti Tavole destinate a determinare la posizione di qualsivoglia punto del Cielo o in riguardo all'Orizzonte, o relativamente all'Eclittica.

Tavola *della posizione degli Astri dipendentemente dall' orizzonte.*

	Date	Si ha	F O R M U L E
643	$z\,h\,\delta$	a	$\cos\ a = \frac{\text{sen}\,h \cos\delta}{\text{sen}\,z}$
644	$z\,\delta\,l$		$\text{sen}\ a = \frac{\text{sen}\,\delta\ \text{sen}\,l \pm \cos l \cos z \sqrt{(\cos^2\delta - \cos^2 l\ \text{sen}^2 z)}}{1 - \cos^2 l\ \text{sen}^2 z}$
645	$z\,h\,l$		$\text{tang}\,a = \frac{\text{sen}\,z \cot h}{\cos l} - \cos z\ \text{tang}\,l$
646	$h\,\delta\,l$		$\text{sen}\ a = \cos h \cos l \cos\delta + \text{sen}\,l\ \text{sen}\,\delta$
647	$h\,l\,z$	δ	$\text{tang}\,\delta = \cos h\ \text{tang}\,l - \frac{\text{sen}\,h \cot z}{\cos l}$
648	$h\,z\,a$		$\cos\ \delta = \frac{\cos a\ \text{sen}\,z}{\text{sen}\,h}$
649	$h\,l\,a$		$\text{sen}\ \delta = \frac{\text{sen}\,a\ \text{sen}\,l \pm \cos l \cos h \sqrt{(\cos^2 a - \cos^2 l\ \text{sen}^2 h)}}{1 - \cos^2 l\ \text{sen}^2 h}$
650	$l\,z\,a$		$\text{sen}\ \delta = \text{sen}\,a\ \text{sen}\,l - \cos a \cos l \cos z$
651	$a\,h\,\delta$	l	$\text{sen}\ l = \frac{\text{sen}\,a\ \text{sen}\,\delta \pm \cos\delta \cos h \sqrt{(\cos^2 a - \cos^2\delta\ \text{sen}^2 h)}}{1 - \cos^2\delta\ \text{sen}^2 h}$
652	$a\,\delta\,z$		$\text{sen}\ l = \frac{\text{sen}\,a\ \text{sen}\,\delta \pm \cos a \cos z \sqrt{(\cos^2\delta - \cos^2 a\ \text{sen}^2 z)}}{1 - \cos^2 a\ \text{sen}^2 z}$
653	$a\,h\,z$		$\text{sen}\ l = \frac{\cos h \cos a\ \text{sen}\,2z \pm 2\,\text{tang}\,a \sqrt{(\text{sen}^2 h - \cos^2 a\ \text{sen}^2 z)}}{2\,\text{sen}\,h \cos a\,(\cos^2 z + \text{sang}^2 a)}$
654	$h\,\delta\,z$		$\text{sen}\ l = \frac{\cos z \cos\delta\ \text{sen}\,2h \pm 2\,\text{tang}\,\delta \sqrt{(\text{sen}^2 z - \cos^2\delta\ \text{sen}^2 h)}}{2\,\text{sen}\,z \cos\delta\,(\cos^2 h + \text{sang}^2\delta)}$
655	$a\,\delta\,l$	h	$\cos\ h = \frac{\text{sen}\,a}{\cos l \cos\delta} - \text{tang}\,l\ \text{tang}\,\delta$
656	$a\,l\,z$		$\text{tang}\,h = \frac{\text{sen}\,z}{\text{sen}\,l \cos z + \cos l\ \text{tang}\,a}$
657	$a\,\delta\,z$		$\text{sen}\ h = \frac{\cos a\ \text{sen}\,z}{\cos\delta}$
658	$\delta\,l\,z$		$\text{sen}\ h = \frac{-\text{sen}\,\delta \cos l \cos z \pm \text{sen}\,l \sqrt{(\cos^2\delta - \cos^2 l\ \text{sen}^2 z)}}{\text{sen}\,z \cos\delta\,(\text{sen}^2 l + \cot^2 z)}$
659	$a\,\delta\,h$	z	$\text{sen}\ z = \frac{\text{sen}\,h \cos\delta}{\cos a}$
660	$a\,h\,l$		$\text{sen}\ z = \frac{\text{sen}\,a \cos l \cos h \pm \text{sen}\,l \sqrt{(\cos^2 a - \cos^2 l\ \text{sen}^2 h)}}{\text{sen}\,h \cos a\,(\text{sen}^2 l + \cot^2 h)}$
661	$a\,\delta\,l$		$\cos\ z = \frac{\text{sen}\,l\ \text{sen}\,a - \text{sen}\,\delta}{\cos l \cos a}$
662	$\delta\,h\,l$		$\text{tang}\,z = \frac{\text{sen}\,h}{\text{sen}\,l \cos h - \cos l\ \text{tang}\,\delta}$

663. Non è che in luogo di alcuna di queste formule non possa surrogarsene qualche altra più comoda : ma noi abbiamo qui preferite le soluzioni dirette, ed evitate anche quelle che si hanno per archi multipli o summultipli dei cercati, o per mezzo di angoli *sussidiarj* (L. 714. 715.716.717. ec.), non tanto per una certa uniformità, quanto per la facilità delle sostituzioni ed eliminazioni, di cui si ha spesso bisogno nel combinar tra loro diverse di queste equazioni, ciò che è di sommo vantaggio in non pochi casi, come vedremo. Del resto, eccone alcune che posson frequentemente esser preferibili per la maggior brevità del calcolo, e che dipendon per altro dalle loro analoghe nella Tavola.

664. Date a, δ, l, vogliasi h (655). Si troverà (L. 687)

$$sen\,\tfrac{1}{2}h = \sqrt{\left(\frac{sen\,\tfrac{1}{2}(90^\circ + l - a - \delta)\;sen\,\tfrac{1}{2}(90^\circ + \delta - a - l)}{cos\,l\,cos\,\delta}\right)}.$$

665. Date a, z, l, trovar h (656). Chiamato p, come sopra, l'angolo *parallattico* ZAP (642), si avrà (L. 727. III)

$$tang\,\tfrac{1}{2}(h + p) = tang\,\tfrac{1}{2}z \times \frac{cos\,\tfrac{1}{2}(l - a)}{sen\,\tfrac{1}{2}(l + a)} \text{ e } \ldots\ldots$$

$$tang\,\tfrac{1}{2}(h - p) = tang\,\tfrac{1}{2}z \times \frac{sen\,\tfrac{1}{2}(l - a)}{cos\,\tfrac{1}{2}(l + a)}.$$

666. Date a, δ, l, trovare z (661). Si ha (L. 687)

$$sen\,\tfrac{1}{2}z = \sqrt{\left(\frac{sen\,\tfrac{1}{2}(90^\circ + a + \delta + l)\;sen\,\tfrac{1}{2}(90^\circ + \delta - a - l)}{cos\,a\,cos\,l}\right)} \text{ e}$$

$$cos\,\tfrac{1}{2}z = \sqrt{\left(\frac{sen\,\tfrac{1}{2}(90^\circ + l - a - \delta)\;sen\,\tfrac{1}{2}(90^\circ + a - l - \delta)}{cos\,a\,cos\,l}\right)}.$$

667. Date h, l, δ, trovar z (662). Se p è il solito angolo parallattico, si ha (L. 727. III)

$$tang\,\tfrac{1}{2}(z + p) = tang\,\tfrac{1}{2}h \times \frac{cos\,\tfrac{1}{2}(l + \delta)}{sen\,\tfrac{1}{2}(l - \delta)} \text{ e } \ldots\ldots$$

$$tang\,\tfrac{1}{2}(z - p) = tang\,\tfrac{1}{2}h \times \frac{sen\,\tfrac{1}{2}(l + \delta)}{cos\,\tfrac{1}{2}(l - \delta)}.$$

668. Che se $a = 0$, cioè se l'Astro si supponga nell'orizzonte, per esempio in F, l'angolo orario h si cangierà nell'angolo o *arco semidiurno* FPR $=$ YQ $= h'$, e l'azimut z nell'arco MF $= 90^\circ \pm$ LF, ovvero nel complemento LF $= z'$, che gli Astronomi chiamano *amplitudine ortiva* o *occidentale*. Quindi si han dodici formule, per cui   74

date due delle quattro quantità h', z', δ, l, si hanno le altre due come nella Tavola che segue, ove sono in margine i numeri delle formule primitive da cui derivano. Quì δ, l e z' si suppongon boreali. Ove siano australi, debbon cangiarsi i segni secondo le regole (L. 616 e seg.)

	Date	Si ha	FORMULE	
669	$h'\,l$	δ	$\tang \delta = -\frac{\cos h'}{\tang l}$	(646)
670	$l\,z'$		$\sen\ \delta = \cos l \sen z'$	(650)
671	$h'\,z'$		$\cos\ \delta = \frac{\cos z'}{\sen h'}$	(643)
672	$\delta\,h'$	l	$\tang l = -\frac{\cos h'}{\tang \delta}$	(646)
673	$h'\,z'$		$\sen\ l = -\frac{\cot z'}{\tang h'}$	(645)
674	$\delta\,z'$		$\cos\ l = \frac{\sen \delta}{\sen z'}$	(650)
675	$\delta\,z'$	h'	$\sen\ h' = \frac{\cos z'}{\cos \delta}$	(643)
676	$\delta\,l$		$\cos\ h' = -\tang l \tang \delta$	(646)
677	$z'\,l$		$\tang h' = -\frac{\cot z'}{\sen l}$	(645)
678	$\delta\,h'$	z'	$\cos\ z' = \sen h' \cos \delta$	(643)
679	$\delta\,l$		$\sen\ z' = \frac{\sen \delta}{\cos l}$	(650)
680	$h'\,l$		$\cot\ z' = -\tang h' \sen l$	(645)

75 681. Se siano ora C'EC l'eclittica, Q'EQ l'equatore, E la loro intersezione, o il 0° di ♈, i loro poli Π, P, la loro *obliquità* o inclinazione $= CEQ = \Pi P = O$, e sia S una stella, la cui declinazione $SA = \delta$, la latitudine $SL = L$, l'ascensione retta $EA = A$, e finalmente la longitudine $EL = \lambda$, è evidente che col raziocinio già fatto (642), tutto si ridurrà al triangolo ΠPS, e che perciò date due delle cinque quantità δ, L, O, λ, A, potrebbero aversi immediatamente le altre dalla stessa Tavola precedente, sostituendo δ ad a, L a δ, O a $90° - l$, λ a $90° - h$, ed A a $90° - z$: ciò non ostante per maggior comodo, abbiamo aggiunta anche la seguente

TAVOLA *della posizione degli Astri dipendentemente dall' eclittica.*

	Date	Si ha	FORMULE
682	$A\lambda L$		$\cos\ \delta = \frac{\cos L \cos \lambda}{\cos A}$
683	ALO	δ	$\text{sen}\ \delta = \frac{\text{sen}\, L \cos O \pm \text{sen}\, A\, \text{sen}\, O \sqrt{(\cos^2 L - \text{sen}^2 O \cos^2 A)}}{1 - \text{sen}^2 O \cos^2 A}$
684	$A\lambda O$		$\text{tang}\ \delta = \frac{\cos A\, \text{tang}\, \lambda - \text{sen}\, A \cos O}{\text{sen}\, O}$
685	λLO		$\text{sen}\ \delta = \text{sen}\, \lambda\, \text{sen}\, O \cos L + \text{sen}\, L \cos O$
686	λOA		$\text{tang}\, L = \frac{\text{sen}\, \lambda \cos O - \cos \lambda\, \text{tang}\, A}{\text{sen}\, O}$
687	$\lambda A\delta$	L	$\cos\ L = \frac{\cos A \cos \delta}{\cos \lambda}$
688	$\lambda O\delta$		$\text{sen}\ L = \frac{\text{sen}\, \delta \cos O \pm \text{sen}\, O\, \text{sen}\, \lambda \sqrt{(\cos^2 \delta - \text{sen}^2 O \cos^2 \lambda)}}{1 - \text{sen}^2 O \cos^2 \lambda}$
689	$OA\delta$		$\text{sen}\ L = \text{sen}\, \delta \cos O - \text{sen}\, A\, \text{sen}\, O \cos \delta$
690	$\delta\lambda L$		$\text{sen}\ O = \frac{\text{sen}\, \delta\, \text{sen}\, \lambda \cos L \pm \text{sen}\, L \sqrt{(\cos^2 \delta - \cos^2 I \cos^2 \lambda)}}{1 - \cos^2 \lambda \cos^2 L}$
691	δLA		$\text{sen}\ O = \frac{-\text{sen}\, A\, \text{sen}\, L \cos \delta \pm \text{sen}\, \delta \sqrt{(\cos^2 L - \cos^2 \delta \cos^2 A)}}{1 - \cos^2 A \cos^2 \delta}$
692	$\delta\lambda A$	O	$\text{sen}\ O = \frac{\text{sen}\, \lambda\, \text{sen}\, \delta \cos A \pm \text{sen}\, A \sqrt{(\cos^2 \lambda - \cos^2 A \cos^2 \delta)}}{\cos \lambda \cos \delta (\text{sen}^2 A + \text{tang}^2 \delta)}$
693	λLA		$\text{sen}\ O = \frac{-\text{sen}\, A\, \text{sen}\, I \cos \lambda \pm \text{sen}\, \lambda \sqrt{(\cos^2 A - \cos^2 \lambda \cos^2 L)}}{\cos L \cos A (\text{sen}^2 \lambda + \text{tang}^2 L)}$
694	δLO		$\text{sen}\ \lambda = \frac{\text{sen}\, \delta - \text{sen}\, L \cos O}{\cos L\, \text{sen}\, O}$
695	δOA	λ	$\text{tang}\ \lambda = \frac{\text{tang}\, \delta\, \text{sen}\, O + \text{sen}\, A \cos O}{\cos A}$
696	δLA		$\cos\ \lambda = \frac{\cos A \cos \delta}{\cos L}$
697	LOA		$\text{sen}\ \lambda = \frac{\text{sen}\, L \cos A\, \text{sen}\, 2O \pm 2\text{tang}\, A \sqrt{(\cos^2 L - \cos^2 A\, \text{sen}^2 O)}}{2\cos A \cos L (\text{tang}^2 A + \cos^2 O)}$
698	$\delta L\lambda$		$\cos\ A = \frac{\cos L \cos \lambda}{\cos \delta}$
699	$\delta\lambda O$		$\text{sen}\ A = \frac{-\text{sen}\, \delta \cos \lambda\, \text{sen}\, 2O \pm 2\text{tang}\, \lambda \sqrt{(\cos^2 \delta - \text{sen}^2 O \cos^2 \lambda)}}{2\cos \lambda \cos \delta (\cos^2 O + \text{tang}^2 \lambda)}$
700	δLO	A	$\text{sen}\ A = \frac{\text{sen}\, \delta \cos O - \text{sen}\, L}{\text{sen}\, O \cos \delta}$
701	$L\lambda O$		$\text{tang}\, A = \frac{\text{sen}\, \lambda \cos O - \text{sen}\, O\, \text{tang}\, L}{\cos \lambda}$

702. Facendosi le sostituzioni accennate sopra (681), si avrebbero anche quì delle formule con valori d'un solo termine, simili all'altre già date (664. *e seg.*); ma giacchè non son così comode come l'altre, e si è dato il modo di ritrovarle, non le riportiamo. Intanto poichè λ ed A vanno da $0°$ a $360°$ (620) sarà talvolta moltiplice il risultato a motivo dei varj archi cui può appartenere uno stesso seno o coseno (L. 618), tangente o cotangente: ma l'uniformità della specie con cui procedono λ ed A distrugge qualunque dubbio in parecchi casi, e un poco d'attenzione lo toglie affatto in parecchi altri.

703. Se sia $L = 0$, le formule saran riferite al Sole (per l'insensibile sua latitudine (620)) e diverranno dodici, colle quali, date due delle quantità O, λ, A, δ si hanno le altre due come nella seguente Tavola

	Date	Si ha	FORMULE	
704	$A\,O$		$\tang \delta = \tang O \,\sen A$	(700)
705	$A\,\lambda$	δ	$\cos \delta = \frac{\cos \lambda}{\cos A}$	(698)
706	$\lambda\,O$		$\sen \delta = \sen \lambda \,\sen O$	(685)
707	$\lambda\,\delta$		$\sen O = \frac{\sen \delta}{\sen \lambda}$	(685)
708	$\lambda\,A$	O	$\cos O = \tang A \cot \lambda$.	(701)
709	$A\,\delta$		$\tang O = \frac{\tang \delta}{\sen A}$	(700)
710	$A\,O$		$\tang \lambda = \frac{\tang A}{\cos O}$	(701)
711	$A\,\delta$	λ	$\cos \lambda = \cos A \cos \delta$	(698)
712	$\delta\,O$		$\sen \lambda = \frac{\sen \delta}{\sen O}$	(685)
713	$\delta\,O$		$\sen A = \tang \delta \cot O$	(700)
714	$\delta\,\lambda$	A	$\cos A = \frac{\cos \lambda}{\cos \delta}$	(698)
715	$\lambda\,O$		$\tang A = \tang \lambda \cos O$	(701)

716. Con queste formule non vi è forse Problema nella *Astronomia sferica* che non possa risolversi. Non insisteremo sull'uso immediato di esse, che si comprende da se medesimo; solo inculcheremo la necessità indispensabile di non trascurar la dovuta attenzione ai segni (*L*: 611. 618.). L'assuefarvisi non è punto difficile, e

il trascurarla indurrebbe in errori molto considerabili. Quanto ai risultati negativi, è facile di determinarne il valore (L.618.)

Avvertiremo di più, che qualche volta gli angoli *sussidiarj* benchè esclusi per giuste cause da queste Tavole, possono impiegarsi utilmente a tenor delle circostanze. Per darne qualche esempio

Data coll' obliquità O dell' eclittica, la longitudine λ e la latitudine L di un Astro, trovarne l' ascensione retta A e la declinazione δ.

I. Abbiamo (701) $tang\ A = \frac{sen\,\lambda\cos O - sen\,O\,tang\,L}{\cos\lambda}$

cioè (L.610.6°) $= tang\ L\left(\frac{sen\,\lambda\cos O\cot L - sen\,O}{\cos\lambda}\right)$. Faccio $sen\,\lambda\cot L = \cot x$ ed ho $tang\ A = tang\ L\left(\frac{\cos O\cot x - sen\,O}{\cos\lambda}\right)$, cioè riducendo ed eliminando $tang\ L$ col valore dedotto dalla sostituzione medesima, ... :

$sen\,\lambda\ tang\,x\left(\frac{\cos O\cos x - sen\,O\,sen\,x}{\cos\lambda\cos x}\right)$, che dà infine

$$tang\ A = \frac{tang\,\lambda\cos(O+x)}{\cos x}.$$

II. Parimente si troverà (685) $sen\,\delta = sen\,\lambda\,sen\,O\cos L + sen\,L\cos O = sen\,L\,(sen\,\lambda\,sen\,O\cot L + \cos O)$, cioè colla stessa sostituzione di sopra, $= sen\,L\,(sen\,O\cot x +$ $\cos O) = sen\,L\left(\frac{sen\,O\cos x + sen\,x\cos O}{sen\,x}\right)$, e quindi

$$sen\,\delta = \frac{sen\,L\,sen\,(O+x)}{sen\,x}:$$

Collo stesso metodo date A e δ, si troveranno L e λ colle formule (689, 695) da cui (facendo $sen\,A\cot\delta = tang\,y$) si ricaverà

$$tang\,\lambda = \frac{tang\,A\,sen\,(O+y)}{sen\,y},\ e$$

$$sen\ L = \frac{sen\,\delta\cos(O+y)}{\cos y}.$$

Passiamo ad applicazioni più estese

717. I. Data la latitudine di un paese, e date la declinazione e la parallasse orizzontale d' un Astro A

(455), trovarne la parallasse d'ascensione retta e di declinazione (633), supposta la Terra sferica.

74 Ammessi i consueti valori (642 : 681), osservo che trasportandosi per la parallasse l'Astro da A in a (455. 7°.), la differenza Aa di ZA ($= d$ (ZA) $= da$ $= p \cos a$ (455. 3°.)) cangia il triangolo ZPA in ZPa, e quindi si ha d (PA) $=$ Pa $-$ PA $= d\delta$, d (ZPA) $=$ ZPa $-$ ZPA $= dh = d(Qg) = -d(Eg) = -dA$, mentre non cangiano nè il lato ZP ($90° - l$) nè l'angolo PZA ($180° - z$). Differenziandosi dunque una delle formule ove concorrono z, l, a, h, prese costanti l e z, si otterrà dh o dA data per da, cioè per la parallasse già nota; e quindi colle formule espresse o per a, l, z, δ o per l, z, h, δ, si avrà $d\delta$ data per da o per dh. Sia dunque (645) $\tang a = \frac{\sen z \cot h}{\cos l} - \cos z \tang l$; e poichè son costanti l e z, si avrà (L. 849. ec.) $\frac{da}{\cos^2 a} = \frac{dh \sen z}{\cos l \sen^2 h}$ (perchè h cresce scemando a) e perciò $dh = \frac{da \sen^2 h \cos l}{\cos^2 a \sen z}$; ma $da = p \cos a$ e $\frac{\cos a \sen z}{\sen h} = \cos \delta$ (659); dunque $dh = -dA = \frac{p \cos l \sen h}{\cos \delta}$, *parallasse d'ascensione retta*; ove si noti 1°. che benchè δ sia la declinazione vera, ciò non ostante prendendo in luogo suo l'apparente, l'errore sarà insensibile; e che $\sen h$ è positivo da A' ad I ovvero da Q a Q', e negativo per il restante fino a 360° (628); 2°. che differenziando secondo il metodo delle differenze finite (L. 830. ec.) piuttostochè delle infinitesime, si otterranno risultati più rigorosi: ma ciò non è necessario se non in calcoli della più gran precisione: e quando pur questa si desideri, mostreremo più a basso (741) con qualche esempio come si trattin le formule a differenze finite.

718. Presa ora la formula $\sen z \cos a = \sen h \cos \delta$ (659) differenziando e rammentandosi che scema a crescendo h, avremo $da \sen a \sen z = dh \cos h \cos \delta - d\delta \sen \delta \sen h$. Eliminando $\sen z$ (659), sostituito il valor di dh trovato sopra e quello di $da = p \cos a$, eliminando $\sen a$ (646) e riducendo, si avrà $d\delta = -(p \sen l \cos \delta - p \cos l \cos h \sen \delta)$, *parallasse di declinazione*.

719. II. Data come sopra la parallasse attuale A d'un Astro, la sua longitudine λ e la sua latitudine L, trovarne le parallassi $d\lambda$ e dL.

Sia n il nonagesimo (629) e se ne suppongan trovate l'altezza sull'orizzonte $nf = N$ e la longitudine $En = \Lambda$. Conducasi l'arco $\Pi A r$ per il polo Π dell'eclittica e per il punto A, e si consideri sostituito al triangolo PZA (717) il triangolo ΠZA in cui avremo $\Pi A = 90^\circ - L$, $\Pi Z = 90^\circ - Zn$ (629) $= nf = N$, e $Z\Pi A = rn = \Lambda - \lambda = \Delta$, distanza dell'Astro dal nonagesimo. Ripetuto pertanto il raziocinio di sopra (717), basterà sostituire L a δ, N a $90^\circ - l$, e Δ ad h, e si avrà col valor di dh quello di $d\Delta$, cioè $rt = -d\lambda$; onde $d\lambda = -\frac{p \, sen \, N \, sen \, \Delta}{cos \, L}$ *parallasse di longitudine*; come col valor di $d\delta$ si otterrà quello di $dL = -p \, (cos \, N \, cos \, L - sen \, N \, cos \, \Delta \, sen \, L)$ *parallasse di latitudine*.　　74

720. III. Determinar le correzioni da farsi alle parallassi di un Astro (718.719) per la sferoidità della Terra.

Sia l'Astro in L, l'Osservatore in Θ, e siano noti i valori della normale prolungata $\Theta g' = k$ e dell'intercetta $Cg' = g$ (640. VII. VIII.), posto al solito $CE = r = 1$. È certo che la parallasse orizzontale in Θ sarebbe $p' = \frac{k}{d}$ (455. 1°.) da cui tutto il resto dipenderebbe, se l'osservazioni non si dovessero riferire al centro e ridurre dal punto g' al punto C. Ora poichè i due punti appartengon del pari all'asse terrestre CP, l'Astro comparirà nel suo stesso circolo di declinazione o veduto da g' o veduto da C, e perciò l'ascensione retta A non dee restare alterata dalla sferoidità, ma tutto l'effetto dee ricadere sulla declinazione δ. Si avrà dunque sempre $dA = dh = 0$, e quest'equazione avrà luogo anche nelle correzioni delle altre parallassi. Posto ciò, sia p la parallasse orizzontale equatoriale dell'astro L, e si supponga per la gran distanza $Lg' = LC = d = \frac{1}{p}$ (455. 4°): si avrà dunque $Lg' \left(\frac{1}{p}\right) : sen \, LCg' \, (cos \, \delta) :: Cg' \, (g) : sen \, CLg' = d\delta = pg \, cos \, \delta$, *correzion della parallasse in declinazione*, *sottrattiva* per noi se la declinazione sia boreale, e *additiva* se sia australe. Presa ora la formula　　77

77 (695) $tang\,\lambda\cos A = tang\,\delta\,sen\,O + sen\,A\cos O$ e differenziando, prese costanti A ed O, si avrà (sostituito il valor di $d\delta$ trovato sopra) $d\lambda = \frac{pg\,sen\,O\cos^2\lambda}{\cos\lambda\cos\delta} = (698)$ $\frac{pg\,sen\,O\cos\lambda}{\cos L}$, *correzion della parallasse di longitudine*. Nel modo stesso e colle stesse costanti, differenzio la formula (700) ed ho $dL\cos L = d\delta\,(\cos\delta\cos O + sen\,\delta\,sen\,A\,sen\,O)$, ove sostituito il valore di $d\delta$ ed eliminato colla stessa formula $sen\,A$, si ottiene $dL = pg\,(\frac{\cos O}{\cos L} - sen\,\delta\,tang\,L)$; ma la sferoidità della Terra cangiando la verticale (640) altererà anche l' azimut ed introdurrà un errore perfino nella solita parallasse d' altezza. Perciò

74 nel triangolo ZPa suppongo cangiata Za in Za' restando fermi PZ e ZPa; e quindi differenziando la formula 662 con h ed l costanti, trovo $dz\,(tang\,l\cos h - tang\,\delta) = \frac{d\delta\,tang\,z\cos^2 z}{\cos^2\delta}$, d' onde eliminando $tang\,\delta$ (647), sostituendo il valor di $d\delta$ e riducendo, si ha $dz = \frac{gp\,sen^2 z\cos l}{\cos\delta\,sen\,h} =$ (648) $\frac{gp\cos l\,sen\,z}{\cos a}$, *parallasse d' azimut*. Finalmente colla differenziazione della formula 646, prese costanti h ed l ed eliminato $\cos h$ (655), si troverà $da = gp\,(\frac{sen\,l}{\cos a} - sen\,\delta\,tang\,a)$, *correzion della parallasse d' altezza*. Queste correzioni per altro son trascurabili per qualunque Pianeta fuor della Luna, per cui unicamente si cercano.

721. Anzi si può supplire anche per la Luna a tutte le correzioni di sferoidità con un metodo molto facile ed ingegnoso. Poichè se l' Osservatore che è in Θ,

77 supposto il suo raggio ΘC quello di una sfera $k\Theta f$ e base della parallasse orizzontale (455), prenda ΘB per sua verticale, B per suo zenit, l' angolo BCe per sua latitudine; e quindi calcoli tutto, secondo il solito nell' ipotesi della Terra sferica (720), otterrà subito risultati esatti naturalmente. In fatti non alterandosi punto con quelle supposizioni nè la distanza LCP dell' astro L dal polo P, nè LC, distanza dal centro, l' angolo BΘL, distanza apparente di L dal supposto zenit, e l' angolo BCL distanza vera, si determinan l' uno con l' altro, e quin-

di si ha la vera situazione di L. E poichè BCe = Θbe — $b\Theta$C = $l - \epsilon$ (640), tutto si ridurrà *ad impiegare* per latitudine del paese *la latitudine* stessa, *diminuita dell'angolo della verticale*. 77

722. IV. Conoscendosi la retrogradazione media dei punti equinoziali (622) e l'obliquità O dell'eclittica (618), e date la longitudine λ, la latitudine L, l'ascension retta A e la declinazione δ d'un Astro S, determinare la precessione dell'Astro in A e in δ.

Poichè il moto di precessione (622) non è che un moto dell'asse terrestre o del polo equatoriale P (612) intorno al polo Π dell'eclittica (prodotto dall'azion riunita della ☽ e del ⊙ sulla sferoidale convessità dell'equatore terrestre), restando immutabili l'arco PΠ e per conseguenza l'angolo CEQ ovvero Ceq e la latitudine LS, fatto Ee (= 50″, 054 (622)) = — $d\lambda$ perchè la precessione Ee è un cangiamento di longitudine, sarà ca — EA = dA ed Aa = $d\delta$. Presa pertanto la formula (686) $tang\ L\ sen\ O = sen\ \lambda\ cos\ O - cos\ \lambda\ tang\ A$ e differenziandola con O ed L costanti, si avrà $o = d\lambda\ cos\ \lambda\ cos\ O + d\lambda\ sen\ \lambda\ tang\ A - \frac{dA\ cos\ \lambda}{cos^2\ A}$, ove dividendo per $cos\ \lambda$, sostituendo il valor di $tang\ \lambda$ (695) e riducendo, si ha $dA = d\lambda\ (cos\ O + sen\ O\ sen\ A\ tang\ \delta)$, *precessione di tutte le Stelle in ascensione retta*. 75

723. Dunque 1°. se sia $\delta = o$, avremo $dA = d\lambda\ cos\ O$ per la precessione di un punto qualunque dell'equatore e perciò di 0° di ♈, ovvero di tutto il Cielo in comune; 2°. la precessione di ascensione retta, propria di una data Stella e dipendente dalla sua special situazione sarà $d\lambda\ sen\ O\ sen\ A\ tang\ \delta$. Di quì deducesi il seguente Teorema generale: *Se di due circoli massimi* C′C, Q′Q *della sfera, l'uno* C′C *restando immobile, l'altro* Q′Q *gli si volga d'intorno facendo sempre lo stesso angolo* E, cioè il polo P del cerchio mobile descriva intorno al polo Π del primo un circolo PP″ di un raggio ΠP eguale alla loro inclinazione o distanza, *la differenza di posizione di un qualunque punto* S *della sfera, rispetto al circolo mobile* q′q, *eguaglia il prodotto del moto* Ee *del nodo* E *sul cerchio immobile, nei seni della distanza* ΠP *dei due poli e della distanza* EA *del punto dato dal nodo* (*contata sul cerchio mobile* Q′Q) *e nella tangente*

75 *della sua distanza* SA *dallo stesso cerchio*. Il medesimo può dirsi di due orbite planetarie, una delle quali si prenda per fissa.

724. Quanto alla precessione in declinazione, cioè a $d\delta$, differenzio l'equazione $sen\ \delta = sen\ \lambda\ sen\ O\ cos\ L + sen\ L\ cos\ O$ (685) prese costanti al solito L ed O, e trovo $d\delta\ cos\ \delta = d\lambda\ cos\ \lambda\ sen\ O\ cos\ L$, d'onde sostituito il valor di $cos\ \delta$ (682) e dividendo, ricavo $d\delta = d\lambda \times sen\ O\ cos\ A$.

725. V. È dimostrato per le osservazioni prima di Bradley e poi di tutti gli Astronomi, che a motivo dell'attrazion della Luna sopra la Terra, e principalmente sopra la parte convessa dell'equatore, oltre il movimento di già accennato, sene produce un altro sull'intersezione della sua orbita collo stesso equatore, cioè la continua retrogradazion del *nodo* lunare ☊; perciò il polo P non descrive il circolo PP″ (722) direttamente, ma vi si avanza per una serie successiva e perpetua di piccoli cerchi come *nrn′*, il cui diametro è di 18″ e il cui periodo si compie in 18 anni in circa, corrispondendo perfettamente al cangiamento di longitudine cui è soggetto il ☊; di modo che il polo *vero* è in *n* allorchè il ☊ è in ♈, ed è in *n′* quando il ☊ è in ♎. Posto ciò, si cercano i cangiamenti che da un simil moto, detto *nutazione*, derivano nell'obliquità O dell'eclittica, e in δ, in λ ed in A di un Astro qualunque.

Chiamo λ☊ la longitudine del detto nodo *ascendente*, che suppongo in b mentre il polo vero è in r, e chiamo x l'ascensione retta EPr del polo vero. Poichè λ☊ ed x cangiano di egual passo e differiscono di 90°, sarà $x - 90° = \lambda☊$, ovvero (quando il nodo di ♈ è tra il polo e il nodo lunare, come nella figura) $= -$ ♈$b = -(360° - \lambda☊)$ e perciò $x = 90° + \lambda☊$, ovvero $= \lambda☊ - 270°$ ed nP$r = 90° - x = 360° - \lambda☊$. Condotto ora da r il piccolo arco rd normale a Pn, sarà Pd = P$r \times cos\ d$Pr $= 9''\ sen\ x = 9''\ cos\ \lambda☊$ *effetto della nutazione sull'obliquità dell'eclittica* O, il quale è *sottrattivo* finchè λ☊ è tra i 90° e i 270°, ed è *additivo* in ogni altro caso.

726. Quindi 1°. Se $\lambda☊ = 90°$ ovvero 270°, cioè se il nodo è nei solstizj, si ha Pd = o cioè il polo vero è sull'arco PP″ e coincide col medio; 2°. se $\lambda☊ = 0°$ ovvero $= 180°$, P$d = 9''$; 3°. divenendo ΠrKh il coluro dei solstizj,

solstizj, sarà $Ke = CE = 90^\circ$, e perciò $Ec = CK$, e per l'angolo costante $E = e$, $CQ = Kh$.

727. Sia ora S una data Stella per cui si conducano i circoli di declinazione PSa dal polo medio ed iSu dal vero, e sia perciò $EPS = A$, $EPr = x$ (725). Condotto l'arco rz normale a PS, ed essendo per la piccolezza dell'angolo rSz, $Sr = Sz$, sarà $Pz = -d\,(PS) = -d(90^\circ - \delta) = d\delta =$ (preso il triangolo rPz come rettilineo) $Pr \cos rPz = 9'' \cos(x - A) = \pm 9'' \operatorname{sen}(A - \lambda☊)$ (725. L. 618), *nutazione in declinazione*.

728. E poichè nel triangolo sferico Πdr rettangolo in d, si ha (725) $\Pi d = O + 9'' \cos \lambda☊$, $rd = 9'' \operatorname{sen} \lambda☊$ (725), sarà (L. 704) $\cot d\Pi r = \cot rd \times \operatorname{sen} \Pi d$, cioè (L. 610. 3°.) $\tang r\Pi d = \frac{\tang dr}{\operatorname{sen}(O \pm Pd)}$ ovvero (per la piccolezza degli archi rd, Pd ed avvertendo che l'avanzamento del polo da i in r porta il circolo di declinazione iSa in rSu, onde la nutazione si fa negativa) $= -\frac{rd}{\operatorname{sen} O} = -\frac{9'' \operatorname{sen} \lambda☊}{\operatorname{sen} O}$, *nutazione in longitudine* del primo punto di ♈, $= CK = Ee = d\lambda$.

729. Per trovare la *nutazione dA in ascensione retta*, prendo la formula (687) $\cos \lambda \cos L = \cos A \cos \delta$, e differenziandola, presa L costante, eliminando $\cos L$ (687) e riducendo, trovo $dA = \frac{d\lambda \tang \lambda - d\delta \tang \delta}{\tang A}$. Sostituisco i valori di $d\delta = 9'' \operatorname{sen}(A - \lambda☊)$ (727) e di $d\lambda = -\frac{9'' \operatorname{sen} \lambda☊}{\operatorname{sen} O}$ (728), onde viene $-dA = \frac{9'' \operatorname{sen} \lambda☊}{\operatorname{sen} O} \times \frac{\tang \lambda}{\tang A} + \frac{9'' \operatorname{sen}(A - \lambda☊)}{\tang A} \tang \delta$; e quindi eliminando $\tang \lambda$ (695) e riducendo, si trova $-dA = 9'' \operatorname{sen} \lambda☊ \cot O + 9'' \tang \delta \left(\frac{\operatorname{sen} \lambda☊ + \operatorname{sen}(A - \lambda☊) \cos A}{\operatorname{sen} A}\right)$; e sapendosi (L. 614) che $\operatorname{sen} A \cos(A - \lambda☊) - \operatorname{sen}(A - \lambda☊) \cos A = \operatorname{sen} \lambda☊$, cioè $\frac{\operatorname{sen} \lambda☊ + \operatorname{sen}(A - \lambda☊) \cos A}{\operatorname{sen} A} = \cos(A - \lambda☊)$, sarà finalmente $-dA = 9''(\operatorname{sen} \lambda☊ \cot O + \cos(A - \lambda☊) \tang \delta)$. Se $\delta = 0$, $dA = 9'' \operatorname{sen} \lambda☊ \cot O$, nutazione in ascensione retta del primo punto di ♈ comune a tutte le Stelle.

75 730. È però vero che rigorosamente parlando, la piccola orbita *nrn'* non è un circolo, ma piuttosto un'ellisse, i cui assi son fra loro : : 9'' : 6'', 7, e però il calcolo ha qualche bisogno di correzione nelle osservazioni più scrupolose. Noi per altro non vi insisteremo di più.

731. VI. La nutazione di obliquità nell' eclittica (725) fa vedere che l' angolo CEQ non è costante a rigore, e che la posizion del nodo lunare vi cagiona un'alterazione. Se dunque per l' universale attrazione (4) qualche altro Pianeta sia in grado di agire sensibilmente sopra la Terra e specialmente sulla parte elevata dell' equatore (635), anch' egli concorrerà a turbarne la posizione, a produrre un deviamento nella sua orbita cioè nell' eclittica, e a cangiare almen qualche poco l' inclinazione di questa sull' equatore. Questo cangiamento di cui gli Astronomi sono stati convinti e dal confronto delle osservazioni antiche colle moderne, e dalla sicurezza di teorie ormai evidenti, e dalle prove di fatto, deve aver dei limiti dipendenti dalle variate ma periodiche combinazioni dell' orbite dei Pianeti attraenti; e quindi è che dopo un corso di secoli la diminuzione dell' angolo d' inclinazione (che ora vien supposta di 50'' in circa per secolo) si dee poi cangiare in aumento.

732. Posto ciò, e data la situazione del ☊ di un Pianeta, la sua annua retrocessione (618. 622), e l' inclinazione O' dell' orbita, sia da determinarsi la *perturbazion* dell' eclittica o sia la *diminuzione della sua obliquità* O prodotta dal Pianeta.

78 Sia O'O l' orbita del Pianeta, la quale suppongo immobile e di cui il polo sia P: sia CEc l' eclittica, Π il suo polo, N il nodo ascendente del Pianeta, C$'c'$ la nuova situazione presa dall' eclittica per l' azion del Pianeta stesso, l' angolo $On\text{C}' = \text{N}$, ed $\text{N}n = -n$ la retrocessione del ☊. Comincio dal determinare la latitudine SL di una Stella S come se fossero dati gli archi NA che chiamo A' ed AS che chiamo δ'. È evidente che essendo già dato O', questo è il caso medesimo della formula $sen\ L = sen\ \delta\ cos\ O - sen\ A\ sen\ O\ cos\ \delta$ (689) che quì diviene $sen\ \delta'\ cos\ O' - sen\ A'\ sen\ O'\ cos\ \delta'$, e dalla cui differenziazione, prese δ' ed O' costanti, si ottiene $d\text{L} = -\frac{dA'\ cos\ A'\ sen\ O\ cos\ \delta'}{cos\ L}$. Ma poichè attesa la piccolezza

FIG. 78

dell' obliquità O' in quasi tutte l' orbite planetarie, può farsi senza errore sensibile $\cos O' = 1$ ed $L = \delta'$; perciò la differenziale diventerà $dL = - dA' \cos A' \operatorname{sen} O' = - n \cos A' \operatorname{sen} O'$. Potendo ora per la stessa ragione farsi NA (A') = NL, se si chiami λ la longitudine della Stella S e $\lambda'☊$ quella del ☊ del Pianeta, sarà NE la differenza di $\lambda'☊$ da 360° ed $NL = NE + EL = 360° - \lambda'☊ + \lambda$, onde $\cos A' = \cos NL = \cos(\lambda - \lambda'☊)$ e quindi in fine $dL = - n \operatorname{sen} O' \cos(\lambda - \lambda'☊)$ *cangiamento cercato di latitudine*. Quanto a quello di *longitudine*, si troverà (applicando il teorema già stabilito di sopra (723)) $d\lambda = - n \operatorname{sen} O' \operatorname{sen}(\lambda - \lambda'☊) \operatorname{tang} L$.

733. Se dunque, essendo Π il polo dell' eclittica Cc, suppongasi S quello dell' equatore Q'Q, sarà ΠSL il coluro dei solstizj, che cangiandosi Π in Π' diventerà $\Pi'Sl$; e $d(\Pi S) = dL$ sarà il cangiamento cercato di obliquità; se non che, essendo allora $\lambda = 90°$, si avrà $dL (= dO) = - n \operatorname{sen} O' \operatorname{sen} \lambda'☊$ *diminuzione richiesta*.

734. Dopo ciò nel triangolo EtN, in cui $tEN = O$, $tNE = O'$, facciasi $EtN = a$, $tE = z$, $tN = x$. Avremo (L. 690) $\operatorname{tang} O' = \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} x \cot z - \cos x \cos a}$ ovvero $\operatorname{sen} a \cot O' = \operatorname{sen} x \cot z - \cos x \cos a$; e differenziando quest' equazione, prese a ed O' costanti, si troverà $0 = dx \cos x \times \cot z - \frac{dz \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 z} + dx \operatorname{sen} x \cos a = dx \cos x \cos z + \frac{dz \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} z} + dx \operatorname{sen} x \cos a \operatorname{sen} z$, cioè $dx (\cos x \cos z + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} z \times \cos a) = \frac{dz \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} z}$; ma $dx = Nn = - n$ (732); $\cos x \cos z + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} z \cos a = \cos NE$ (L. 687. II.) $= \cos(360° - \lambda'☊) = \cos \lambda'☊$; e $\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} z} = \frac{\operatorname{sen} O}{\operatorname{sen} O'}$ (L. 684); dunque $- n \cos \lambda'☊ = \frac{dz \operatorname{sen} O}{\operatorname{sen} O'}$ e $dz = Ee = - \frac{n \operatorname{sen} O' \cos \lambda'☊}{\operatorname{sen} O}$, quantità del moto di ♈ sull' equatore, originata dall' attrazion del Pianeta. E se si conduca da e il piccol arco er normale ad EN, sarà $Er = Ee \times \cos eEr = - n \operatorname{sen} O' \cos \lambda'☊ \times \cot O$, quantità di precessione di ♈ sull' eclittica in conseguenza della cagione medesima.

735. VII. Essendosi ritrovato per osservazioni, di cui parleremo altrove, che la luce impiega $0^{or}\ 8'\ 7''$ in attraversar l' orbita terrestre di cui è dato il diametro,

come vedremo, e il tempo periodico (618), è stato facile di decidere che in 8′ 7″ di tempo la Terra percorre un arco di 20″ dell'orbita, e che in sequela di questi due movimenti, dee nascere nelle Stelle un' *aberrazione* di cui fissammo già i fondamenti (462). Se dunque sia ETC l' eclittica, il Sole in S, la Terra in T, un astro in A nel piano verticale ADES, il punto di ♈ in R, e si chiami $\star$ la longitudine dell' astro, T quella della Terra, $\odot$ quella del Sole, sarà $RT = 360° - T$, $RE = 360° - \star$, e $TE = T - \star$; ma $\odot = T - 180°$ (459); dunque $sen\ TE = sen\ EST = sen\ e = sen\ (180° - (\star - \odot)) = sen\ (\star - \odot)$ (L. 618) e per la stessa ragione $cos\ e = cos\ (180° - (\star - \odot)) = - cos\ (\star - \odot)$. Quindi poichè $m = 20''$ (462), chiamata L la latitudine dell' astro, sarà $20''\ sen\ (\star - \odot)\ sen\ L = dL$, *aberrazione di latitudine*, e $- \frac{20''\ cos(\star - \odot)}{cos\ L} = d\lambda$, *aberrazione di longitudine*.

54. 2ª.

736. Per trovar quella di declinazione e di ascensione retta, comincio dal determinar l' angolo $P S \Pi = S$ che chiamo di *posizione*; e poichè $P \Pi S = 90° - \lambda$, $\Pi P S = 90° + A$, $PS = 90° - \delta$, $\Pi S = 90° - L$, ΠP al solito $= O$, si avrà (L. 684.) $sen\ S = \frac{cos\ \lambda\ sen\ O}{cos\ \delta}$, e $cos\ S$ (L. 687. II.) $= \frac{cos\ O - sen\ L\ sen\ \delta}{cos\ L\ cos\ \delta} =$ (*ivi*) $cos\ \lambda\ cos\ A\ cos\ O + sen\ \lambda\ sen\ A$. Premesso ciò, prendo la formula $sen\ \lambda\ cos\ L \times sen\ O = sen\ \delta - sen\ L\ cos\ O$ (694), e poichè in essa variano a un tempo λ, L e δ, ed è solamente costante O, la differenzio una volta col suppor costanti O ed L, ed un' altra volta col suppor costanti O e λ, e quindi ottengo dai due parziali valori di $d\delta$ il valor totale. Si ha dunque I°. $d\delta = d\lambda\ cos\ L \times \frac{sen\ O\ cos\ \lambda}{cos\ \delta} = d\lambda\ cos\ L\ sen\ S = - 20''\ cos\ (\star - \odot)\ sen\ S$ (735): II°. $d\delta = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $dL \left(\frac{cos\ L\ cos\ O - sen\ L\ sen\ O\ sen\ \lambda}{cos\ \delta} \right)$ che eliminando $sen\ \lambda$ (694), diviene $dL \left(\frac{cos^2 L\ cos\ O + sen^2 L\ cos\ O - sen\ L\ sen\ \delta}{cos\ L\ cos\ \delta} \right) = \ldots$ $dL \left(\frac{cos\ O - sen\ L\ sen\ \delta}{cos\ L\ cos\ \delta} \right) = dL\ cos\ S = 20''\ sen\ (\star - \odot) \times sen\ L\ cos\ S$ (735); onde infine il valore intero di $d\delta =$

75.

20″(sen (☆ — ⊚) sen L cos S — cos (☆ — ⊚) sen S), *aberrazione di declinazione*.

737. Presa ora la formula (686) $tang\, L\, sen\, O = sen\, \lambda \times cos\, O - cos\, \lambda\, tang\, A$, e differenziandola come sopra, col prender costanti O ed L, trovo I[a]. $0 = d\lambda\, cos\, \lambda\, cos\, O + d\lambda\, sen\, \lambda\, tang\, A - \frac{dA\, cos\, \lambda}{cos^2 A}$, e quindi $dA = \frac{d\lambda\, cos\, A}{cos\, \lambda}(cos\, \lambda \times cos\, A\, cos\, O + sen\, \lambda\, sen\, A)$; ma $\frac{cos\, A}{cos\, \lambda} = \frac{cos\, L}{cos\, \delta}$ (698) e $cos\, \lambda \times cos\, A\, cos\, O + sen\, \lambda\, sen\, A = cos\, S$ (736); dunque $dA = \frac{d\lambda\, cos\, L\, cos\, S}{cos\, \delta}$: II[a]. prese poi costanti O e λ, si ha $\frac{dL\, sen\, O}{cos^2 L} = \frac{-dA\, cos\, \lambda}{cos^2 A}$, cioè $dA = \frac{-dL\, sen\, O\, cos^2 A}{cos\, \lambda\, cos^2 L} =$ (698) . . . . . . $\frac{-dL\, sen\, O\, cos\, \lambda}{cos^2 \delta} = \frac{-dL\, sen\, S}{cos\, \delta}$ (736), onde sommando i due valori parziali di dA e sostituendo i valori di $d\lambda$ e di dL (735), si ha infine il valor totale di $dA =$ . . . . $-20''\left(\frac{cos(\ast - ⊚)\, cos\, S + sen(\ast - ⊚)\, sen\, L\, sen\, S}{cos\, \delta}\right)$, *aberrazione di ascensione retta*.

738. Osservazioni. 1[a]. L ed A si son sempre supposte $< 90°$, ed L e δ settentrionali come nelle Figure. Negli altri casi si sa come regolarsi per il cangiamento dei segni (L. 618.): 2[a]. l' aberrazione ha luogo anche per i Pianeti, benchè la lor massima vicinanza in paragon delle fisse, renda brevissimo il tempo in cui la luce trascorre da essi a noi: inoltre, essendo in quasi tutti l' inclinazione dell' orbite molto piccola, la loro aberrazione sensibile è quella sola di longitudine: quindi supposta $= 1$ la distanza media della Terra dal Sole, d quella del Pianeta da noi, m il moto diurno del Pianeta, qual comparisce alla Terra, espresso in minuti primi, sarà (462) $d\lambda = \frac{487''.\, d.\, m}{1440'}$, *aberrazion planetaria* espressa in secondi: 3[a]. oltre i movimenti comuni a tutte le fisse e fin quì accennati, i più moderni Astronomi ne hanno scoperti in diverse Stelle dei proprj e straordinarj, le cui cagioni finora son molto oscure ed incerte. *Arturo*, *Sirio*, *Aldebaran* ed alcune altre soffron dei cangiamenti di posizione assai irregolari quantunque piccoli. Vi son delle Stelle, la cui chiarezza ha un periodico accrescimento e una di-

minuzione che dà loro il nome di *cangianti*, e che può dipendere o da macchie enormi aderenti alla lor superficie che gira sul proprio asse, o da pianeti immensi che girano intorno ad esse. Altre sono apparse istantaneamente e dopo aver conservata una costante situazione nel Cielo per lungo tratto di tempo, ed una luce molto brillante, han poi mutato colore, si sono alquanto oscurate e si son perdute in breve di vista: tal fu la Stella che apparve nel 1572 nella *Cassiopea*, e che senza cangiar di luogo per 16 interi mesi, svanì quasi ad un tratto: per cui i Fisici immaginarono degli sterminati Vulcani e degl' incendj incredibili. Quanto ad alcune piccolissime macchie biancastre che vedonsi quà e là nel Cielo e diconsi *nebulose*, esse non sono per quel che scuoprono i telescopj, altro che gruppi o piuttosto combinazioni di innumerabili Stelle a una inconcepibil distanza, ovvero, secondo il sospetto di qualche recente Astronomo, atmosfere di Stelle languide assai e di una luce dubbiosa: e tale è pure quella specie di vasta fascia irregolare che cinge il Cielo e che si conosce col nome di *via lattea*.

739. VIII. Poichè la metà di quell' intervallo di tempo che spende il Sole tra il sollevarsi e il discendere a una stessa altezza sull' orizzonte, non è il vero mezzogiorno (632); ma ora questo precede quella metà, ora ne è preceduto; si cerca la *correzione* da farsi, o sia l' *equazione delle altezze corrispondenti*, e il momento più favorevole per le osservazioni di questo genere.

Sia t' l' ora della prima delle due osservazioni corrispondenti, h'' la metà del loro intervallo, T l' ora vera del mezzogiorno, dh'' la correzione cercata, onde sia $t' + h'' \mp dh'' = T$. Chiamo $d\Delta = 2d\delta$ il cangiamento della declinazione solare nell' intervallo $2h''$, e presa la formula $sen\, a = cos\, h\, cos\, l\, cos\, \delta + sen\, l\, sen\, \delta$ (646) ove son costanti a ed l, si troverà differenziandola, $dh = d\delta \left(\frac{tang\, l}{sen\, h} - \frac{tang\, \delta}{tang\, h}\right)$, e quindi per esser $dh'' = \frac{dh^{\circ}}{15}$ (625) e $d\delta = \frac{d\Delta}{2}$, sarà $T = t' + h'' \mp \frac{d\Delta}{30}\left(\frac{tang\, l}{sen\, h} - \frac{tang\, \delta}{tang\, h}\right)$; ove si osservi 1°. che per i paesi di latitudine settentrionale ha luogo nel doppio segno il — dal dì 21 di Dicembre al 21 di Giugno, e il + nel resto dell' anno: 2°. che il segno di $tang\, \delta$ dovrà cangiarsi quando la declinazione

è australe, cioè dal 22 di Settembre al 20 di Marzo.

Esempio. Cerco il vero istante del mezzogiorno in Firenze all'Osservatorio Ximeniano delle Scuole Pie (la cui latitudine è $l = 43° 46' 41''$) per il 6 Marzo 1810, avendo osservate l'altezze corrispondenti del Sole alle $8'' 30' = t'$ della mattina e alle $3'' 32'$ della sera. Ho dunque $2h'' = 7'' 2'$ ed $h'' = 3'' 31' = 52° 45'$ (625); e poichè le Tavole davano in questo giorno $\delta = 5° 48' 20''$ e nel seguente, $\delta' = 5° 25' 4''$, si ebbe $\delta' - \delta = 23' 16'' = 1396''$, cangiamento in $24''$. Dico dunque $1440' (= 24'') : 1396'' :: 422' (= 7'' 2') : d\Delta = 409'', 1$. Quindi poichè il Sole si avvicinava al polo e la declinazione era australe, dovè esser $dh'' = -\frac{400'', 9}{30}\left(\frac{tang\, 43° 46' 41''}{sen\, 52° 45'} + \ldots\ldots\right.$ $\left.\frac{tang\, 5° 48' 20''}{tang\, 52° 45'}\right) = -17'', 47$; e poichè $t' + h'' = 12'' 1' = 0'' 1'$ (628), l'ora precisa del mezzogiorno era $T = 0'' 1' - 17'', 47 = 0'' 0' 42'', 53$, cioè l'orologio avanzava sul mezzogiorno *vero* $42'', 53$.

Se per altro l'intervallo $2h''$ fosse assai grande, come sarebbe se si volesse impiegar la formula per le altezze corrispondenti da un giorno all'altro, per determinare il momento della mezzanotte, il metodo non sarebbe esatto, e converrebbe ricorrere alle differenze *finite*. Basti qui l'averlo accennato.

740. Quanto all'ora più propria per l'osservazioni, è evidentemente quella in cui il Sole impiega il minor tempo in una data variazione da d'altezza, essendo allora meno equivoco il momento del suo appulso al proposto almicantarat (632). Prendo la stessa formula di sopra, cioè $sen\, a = cos\, h\, cos\, l\, cos\, \delta + sen\, l\, sen\, \delta$, e differenziandola prese l e δ costanti, riflettendo (L. 821) che h scema quando cresce a, si trova $dh = \frac{da\, cos\, a}{cos\, l\, sen\, h\, cos\, \delta} = \frac{da}{cos\, l\, sen\, z}$ (659); onde essendo *data* e perciò costante da, e per esser anche costante $cos\, l$, sarà dh proporzionale ad $\frac{1}{sen\, z}$, quantità minima quando $sen\, z = 1 = sen\, 90°$, cioè quando il Sole è nel primo verticale (614). Di qui si trova (658) $sen\, h = \pm \frac{sen\, l \sqrt{(cos^2 \delta - cos^2 l)}}{sen^2\, l\, cos\, \delta} =$ (L. 620. 621, 26²) $= \ldots\ldots$

FIG.

$\frac{\sqrt{(sen\,(l+\delta)\,sen\,(l-\delta))}}{sen\,l\,cos\,\delta}$, ove se $\delta = 0$, $sen\ h = \pm 1$, $h^\circ = 90^\circ$ di quà e di là dal meridiano ed $h'' = 6''$; se δ è negativa, *sen h* dee prendersi negativamente, cioè ha luogo il segno inferiore, e il valor di h che in apparenza è lo stesso, dà realmente $180^\circ - h$ (L. 618) per il vero valore. Del resto, l'osservazion delle altezze corrispondenti è una delle più utili e interessanti, perchè serve principalmente a determinar la posizione del meridiano, cioè a condurre in un piano (per lo più orizzontale o verticale) *la meridiana* (614) o a rettificarla già condotta: inoltre serve a conoscere l'ora precisa in cui si fa qualche osservazione nel Cielo o vi accade qualche fenomeno. Parleremo altrove del metodo di ottener l'uno e l'altro fine.

741. IX. Vogliasi ora il tempo che spende un Astro di cui si conosca il diametro D e la declinazione δ per traversare un dato almicantarat o un verticale, in un paese la cui latitudine l sia determinata.

79 Sia P il polo, Z lo zenit, COM l'almicantarat, A il punto in cui si ritrova il centro dell'Astro quando il lembo superiore O tocca CM. Sarà dunque $AO = \frac{1}{2}D$, $VA = h$ l'arco descritto dall'Astro, durante la metà del passaggio, e VPA l'angolo orario corrispondente alla metà del tempo cercato. Condotto il verticale ZV, osservo che il triangolo ZPV cangiandosi in ZPA, conserva costante il lato ZP, e che quantunque fosse mutabile la declinazione dell'Astro, può in un sì breve intervallo considerarsi la stessa; e perciò PV = PA; onde sono invariabili l e δ (642), ed inoltre l'angolo ZPV è sempre noto poichè son date δ, l, a (655). Presa dunque la formula $sen\ a = cos\ h\ cos\ l\ cos\ \delta + sen\ l\ sen\ \delta$ (646) e differenziata colle costanti suddette, osservando che h cresce scemando a, e che $da = \frac{1}{2}D = r$, avremo $dh = \frac{da\ cos\ a}{sen\ h\ cos\ l\ cos\ \delta} =$ (657) $\frac{da}{sen\ z\ cos\ l}$, e la metà del tempo cercato $dh^\circ = \frac{dh}{15}$ (625) $= t = \frac{r}{15\ sen\ z\ cos\ l}$ ovvero (chiamando P l'angolo parallattico ZVP (642) che è eguale all'inclinazione TVM del parallelo TA coll'almicantarat o coll'orizzonte) $t = \frac{r}{15\ sen\ P\ cos\ \delta}$. Fatto a nelle formule $= 0$, sarà t il tempo in

in cui l' Astro attraversa l' orizzonte; e se sia $D =$ alla refrazione orizzontale $= 33'$, sarà t il tempo dell' anticipazion della nascita d' un Pianeta, o del ritardo del suo tramontare. Ma se AO si facesse $= 18°$, e si cercasse perciò la durata di quella luce o nascente o mancante che suol chiamarsi *crepuscolo*, la differenziale di sopra sarebbe allora inesatta, per esser da troppo grande, mentre si valutava per molto piccola. Usando pertanto la stessa formula, ricorreremo alle *differenze finite* ed avremo (L. 830) colle stesse costanti $sen\,\frac{1}{2}\,da\,cos\,(a + \frac{1}{2}\,da) = sen\,\frac{1}{2}\,dh\,sen\,(h + \frac{1}{2}\,dh)\,cos\,l\,cos\,\delta$, cioè (per esser $a = 0$ e perciò $sen\,\frac{1}{2}\,da\,cos\,(a + \frac{1}{2}\,da) = sen\,\frac{1}{2}\,da\,cos\,\frac{1}{2}\,da = \frac{1}{2}\,sen\,da$ (L. 621. 26°.)) sarà $sen\,\frac{1}{2}\,dh = \frac{sen\,da}{2\,sen\,(h + \frac{1}{2}\,dh)\,cos\,l\,cos\,\delta}$, ove si osservi che per calcolar la formula senza il penoso metodo della doppia falsa posizione, può prima prendersi nel divisore del secondo membro $sen\,h$ in vece di $sen\,(h + \frac{1}{2}\,dh)$; quindi ottenuto un valore approssimato di $sen\,\frac{1}{2}\,dh$, si sostituirà il risultato in $sen\,(h + \frac{1}{2}\,dh)$ con cui rinnovandosi il breve calcolo, si otterrà per lo più immediatamente, il valore esatto che si ricerca. 79

742. Quanto al tempo in cui l' Astro attraverserà un verticale, suppongo tale il suo moto che almeno nell' intervallo del suo passaggio si possa prender per uniforme. Posto ciò, sia AH $=$ Ta $= r$ il suo semidiametro, e VA $= \frac{1}{2}$ TA l' arco descritto nella metà del tempo cercato: e poichè AVH $= 90° -$ CVA $= 90° -$ PVZ $= 90° - p$ (642), si avrà (L. 705) sen VA $= \frac{sen\,r}{cos\,p}$; onde per esser retto l' angolo PVA, e PA $= 90° - \delta$, troveremo (L. 698) sen VPA $= sen\,\frac{1}{2}\,h = \frac{sen\,r}{cos\,p\,cos\,\delta}$, ove se facciasi $p = 0$, il verticale si cangerà nel meridiano e si avrà $sen\,\frac{1}{2}\,h = \frac{sen\,r}{cos\,\delta}$ e quindi il tempo cercato.

743. X. Osservandosi a una data ora o in un medesimo verticale due Stelle fisse, di cui son note tanto l' ascensioni rette A, A' che le declinazioni δ, δ', e sapendosi l' ascensione retta H del Sole, cerchisi di determinare la latitudine l del paese.

Sia ESME l' equatore, P il polo, EPM la sezione 76

del meridiano, ♈ il punto equinoziale, S, Q, Q' l'intersezioni dell'equatore coi circoli di declinazione del Sole e delle due Stelle; sarà $♈S = H$, $SM = o$, $♈Q = A$, $♈Q' = A'$ e perciò $MQ = A - H - o = h$ ed $MQ' = A' - H - o = h' = h + A' - A$. Ciò premesso, poichè l'azimut per ambedue le Stelle è lo stesso, sarà (662) $tang\, z = \frac{sen\, h}{sen\, l \cos h - \cos l\, tang\, \delta} = \frac{sen\, h'}{sen\, l \cos h' - \cos l\, tang\, \delta'}$, onde $sen\, h \times sen\, l \cos h' - sen\, h \cos l\, tang\, \delta' = sen\, h'\, sen\, l \cos h - sen\, h' \cos l\, tang\, \delta$, e dividendo per $\cos l$ e trasportando, $tang\, l\, (sen\, h \cos h' - sen\, h' \cos h) = sen\, h\, tang\, \delta' - sen\, h'\, tang\, \delta$ cioè $tang\, l = \frac{sen\, h'\, tang\, \delta - sen\, h\, tang\, \delta'}{sen\, (h' - h)}$ (L. 614.)

744. XI. Ma vogliasi la latitudine l, non avendosi altro che la declinazione δ di una fissa e due sue altezze a', a'' col tempo speso in alzarsi o scender dall' una all' altra. Supposta A la Stella che è scesa nel tempo h'' da

79 V in A, avremo $PA = PV = 90° - \delta$, $ZV = 90° - a'$, $ZA = 90° - a''$ e $VPA = h\, (= 15''\, (625))$. Quindi I°. nel triangolo isoscele VPA, condotto un arco di cerchio massimo per i punti V, A, e l'arco Pr normale a VA, sarà (L. 700) $sen \frac{1}{2} VA = sen \frac{1}{2} h \cos \delta$, e $\cot PVA = sen\, \delta\, tang \frac{1}{2} h$ (L. 701). II°. nel triangolo VZA, essendo noto oltre ZV e ZA anche VA, che chiamerò M, si avrà (L. 687) $sen \frac{1}{2} ZVA = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\sqrt{\left(\frac{sen \frac{1}{2}(M + a' - a'') \cos \frac{1}{2}(M + a' + a'')}{sen\, M \cos a}\right)}$. III°. chiamando Q l'angolo ZVP, verrà $\frac{1}{2} ZVA - \frac{1}{2} PVA = \frac{1}{2} ZVP = \frac{1}{2} Q$. IV°. finalmente nel triangolo ZPV ove si ha ZV, PV e ZVP $(= Q)$, troveremo (L. 687. II) $\cos PZ = sen\, l = \cos a' \cos \delta \cos Q + sen\, a'\, sen\, \delta$; ovvero, cercando l'angolo ZAV e quindi determinando $PAZ = PAV - ZAV = Q'$, $sen\, l = \cos a'' \cos \delta \cos Q' + sen\, a''\, sen\, \delta$.

Quanto all' altezze a', a'', è chiara la necessità d'impiegar le altezze *vere* e non le apparenti: ma oltre il sapersi già il metodo di cangiar le apparenti in vere (535), non è difficile il comprendere che fissato il piano del meridiano (ciò che può farsi prima di essersi assicurati della vera altezza del polo), possono prepararsi delle Tavole locali di refrazione, cercando le altezze a, a', a'' ec. colla formula semplicissima $\cos a = \frac{\cos h \cos \delta}{\cos z}$

(643) ove divengon note h e z, e paragonando i valori trovati colle altezze osservate: la differenza è appunto la refrazione cercata.

745. Molte altre applicazioni potrebbero farsi delle formule precedenti, combinando, sostituendo, differenziando ec.: ma per ora basteranno quelle che abbiamo date, e solamente ne aggiungeremo una per il metodo di ridurre al solstizio ogni altezza meridiana del Sole osservata ne' giorni prossimi, avanti e dopo.

XII. Trattandosi del Sole per cui $L = 0$ (620) prendo la formula $sen\, \delta = sen\, \lambda\, sen\, O$ (706) e differenziandola a differenze finite, essendo costante O, trovo $sen \frac{1}{2} d\delta \cos(\delta + \frac{1}{2} d\delta) = sen \frac{1}{2} d\lambda \cos(\lambda + \frac{1}{2} d\lambda)\, sen\, O$; ma poichè λ si riferisce al solstizio e perciò $\lambda + d\lambda = 90°$, sarà $\lambda + \frac{1}{2} d\lambda = 90° - \frac{1}{2} d\lambda$ e $\cos(\lambda + \frac{1}{2} d\lambda) = sen \frac{1}{2} d\lambda$ (L. 618); onde $sen \frac{1}{2} d\delta = \frac{sen^2 \frac{1}{2} d\lambda\, sen\, O}{\cos(\delta + \frac{1}{2} d\delta)} = \frac{sen^2 \frac{1}{2} d\lambda\, sen\, \delta}{sen\, \lambda \cos(\delta + \frac{1}{2} d\delta)}$, equazione che può risolversi come abbiamo insegnato sopra (741): passato il solstizio, si farà negativa $d\delta$.

746. Si cerchi ora di determinar la distanza vera d dei centri di due Astri, per esempio del Sole e della Luna, data la loro apparente distanza D, le loro altezze apparenti A, B, e le vere a, b.

Sia S il luogo apparente del Sole, s il vero; sia L il luogo apparente ed L' il vero della Luna. E quì avvertiremo di passaggio, che la Luna apparisce sempre più bassa di quel che è, perchè la sua parallasse supera costantemente l' effetto della refrazione (535): in fatti la massima refrazione che è l' orizzontale, non eccede 33', mentre la parallasse lunare è di 57' in circa e si conserva maggior dell' altra a qualunque altezza. Chiamando Z l' angolo SZL e preso il valor di esso prima nel triangolo SZL e poi nel triangolo sZL', si troverà (L. 687) $sen^2 \frac{1}{2} Z$ $= \frac{sen \frac{1}{2}(D + A - B)\, sen \frac{1}{2}(D + B - A)}{\cos A \cos B} = \ldots\ldots\ldots$ $\frac{sen \frac{1}{2}(d + a - b)\, sen \frac{1}{2}(d + b - a)}{\cos a \cos b}$ onde $\ldots\ldots\ldots$ $\frac{sen \frac{1}{2}(D + A - B)\, sen \frac{1}{2}(D + B - A) \cos a \cos b}{\cos A \cos B} = \ldots\ldots$ $sen \frac{1}{2}(d + a - b)\, sen \frac{1}{2}(d + b - a)$, cioè (fatto $d = p$, $a - b = q$) $= sen \frac{1}{2}(p + q)\, sen \frac{1}{2}(p - q) =$ (L. 620) $\frac{1}{2} \cos q -$

79

FIG. 79

$\frac{1}{2} \cos p = \frac{1}{2} \cos (a - b) - \frac{1}{2} \cos d$, e finalmente $\cos d = \cos (a - b) - \frac{2 \,sen \frac{1}{2} (D + A - B) \,sen \frac{1}{2} (D + B - A) \cos a \cos b}{\cos A \cos B}$; che se dalla distanza vera d si volesse inferir l'apparente, troveremmo $\cos D = \cos (A - B) - \ldots \frac{2 \,sen \frac{1}{2} (d + a - b) \,sen \frac{1}{2} (d + b - a) \cos A \cos B}{\cos a \cos b}$. Se d fosse molto piccola ed il suo coseno perciò devenisse incerto (L. 641), ricorrendo alla formula $sen \frac{1}{2} c = \sqrt{\frac{1 - \cos c}{2}}$ (L. 622), si avrà $sen \frac{1}{2} d = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos (a - b)}{2} + \ldots \frac{sen \frac{1}{2} (D + A - B) \,sen \frac{1}{2} (D + B - A) \cos a \cos b}{\cos A \cos B} \right)} = \sqrt{\left(sen^2 \frac{1}{2} (a - b) + \frac{sen \frac{1}{2} (D + A - B) \,sen \frac{1}{2} (D + B - A) \cos a \cos b}{\cos A \cos B} \right)}$ e nel modo stesso si troverà, data d, $sen \frac{1}{2} D$.

747. Che se si voglia determinare la distanza D di due Astri in genere, di cui sian date soltanto le longitudini e le latitudini, suppongasi Z il polo dell'eclittica, S il luogo vero dell'uno ed L' quello dell'altro, la cui parallasse sia la più forte. Si cerchino le parallassi di longitudine e di latitudine del secondo (719), presa per parallasse orizzontale di esso la differenza delle parallassi orizzontali di ambedue, onde l'effetto si rifonda in quest'Astro solo, ed il suo luogo apparente divenga L. Considerando il triangolo ZSL, saranno ZS, ZL i complementi l, l' delle latitudini, vera dell'uno e apparente dell'altro, l'angolo SZL = A la differenza delle longitudini corrispondenti, e quindi si avrà (L. 715) SL distanza apparente tra l'uno e l'altro. E sebbene la matematica precisione esigerebbe le riduzioni separate di ciascun dei due Astri al luogo apparente: contuttociò quell'inesattezza a cui può condurre il metodo prescritto, non è quasi mai tanto sensibile, che possa ritirare gli Astronomi dall'usarlo.

748. Finalmente se si volesse determinar la situazione di un nuovo oggetto V nel Cielo, del quale non si conoscesse se non la distanza VZ, VA da due date *fisse* Z, A di cui si abbiano dalle Tavole le ascensioni rette e le declinazioni 90° — PA, 90° — PZ, allora I. nel

triangolo PZA essendo note PZ, PA e l'angolo ZPA (differenza delle ascensioni rette), si cercherebbe il lato ZA (L. 715) e l'angolo PAZ (L. 713): II. nel triangolo ZAV, divenuti noti tutti i tre lati, si avrebbe l'angolo ZAV (L. 713), e quindi PAZ + ZAV = PAV: III. infine nel triangolo APV, ove son noti PA, AV e PAV, si avrebbe PV distanza dal polo, ed APV differenza dell'ascensione retta di V da quella di A. Trovatesi così la declinazione e l'ascensione retta di V, ne è data la posizione; e se V è tra i limiti delle parallassi sensibili, se ne ha ancor la distanza; e tutto è determinato.

Sistema Planetario.

749. Il numero, l'ordine, i movimenti e il rapporto scambievole dei Pianeti e del Sole, son tutto ciò che comprendesi nell'idea di *Sistema Planetario*. Noi non ci tratterremo sulle diverse opinioni che n'ebbero un tempo i Popoli ed i Filosofi, e che dipoi in faccia ad osservazioni più certe e coi progressi grandiosi dell'Astronomia, si videro dileguarsi, e furono trascurate affatto: questo sarebbe un dar della scienza piuttosto la Storia che gli Elementi. Intanto nulla vi è che non ci richiami all'ipotesi già adottata (610), alla quale ormai e l'aberrazione (462. 735) e la nutazione (725) ed altri fenomeni han potuto finora in gran parte servir di prova, e di cui anche in seguito siam per incontrar passo passo nuovi argomenti.

750. Il *Sole* dunque è nel centro dell'universal tendenza o gravitazione (185) di tutti i corpi appartenenti al Sistema, non escludendone le Comete (611). Dei *Pianeti* gli uni girano intorno a lui immediatamente e diconsi perciò *primarj*; gli altri chiamati *Satelliti* o *secondarj* girano intorno ai primi, tratti con essi e colle proprie orbite intorno al Sole. Il loro ordine, i loro nomi e i loro segni sono i seguenti: il *Sole* ☉, *Mercurio* ☿, *Venere* ♀, la *Terra* ♁, *Marte* ♂, Vesta ⚶, Giunone ⚵, Cerere ⚳, Pallade ⚴, *Giove* ♃, *Saturno* ♄, *Urano* ♅. L'ultimo di questi è detto anche *Herschel* dal nome del famoso Astronomo che lo scoprì nel 1781. Gli altri quattro, che sono tra ♂ e ♃ (ove appunto una certa legge di progressione aveva fatto assai prima creder necessario un qualche Pianeta intermedio) furono scoperti più re-

centemente, cioè ⚳ dal celebre P. Piazzi in Palermo nel primo giorno del 1801; ⚴ e ⚶ dall' illustre Olbers in Brema negli anni 1802 e 1807. e ⚵ dal rinomato Harding a Lilienthal nel 1804. La lor vicinanza, l' intralciamento delle loro orbite e il reciproco superarsi dei loro raggi vettori han fatto credere a qualche Astronomo che siano quattro porzioni di un antico Pianeta. Noi non discuteremo una tale ipotesi. Dei Satelliti *uno*, cioè la *Luna* ☽, appartiene alla Terra, *quattro* a Giove, *sette* a Saturno a cui va unito con un fenomeno unico in tutto il Cielo, un *anello* o zona isolata che lo circonda nel suo equatore, osservata prima in confuso dal Galileo, determinata poi distintamente da Ugenio, e che infine Herschel ha riconosciuto esser distinta in due, concentriche ed isolate, tratte da un moto assai rapido da occidente in oriente intorno al Pianeta. *Sei* altri Satelliti sono stati da lui scoperti intorno ad Urano. Vi è stato chi avea concessi ad ♅ due anelli, simili a quel di ♄ e normali tra loro, come vi fu chi annunziò in Germania un altro Pianeta chiamato Ercole, il maggiore e il più lontano di tutti dal ☉. Il tempo anzichè confermarle, ha smentite queste supposizioni.

751. Tutti i Pianeti si muovono nello stesso senso, cioè da occidente in oriente, non tanto per la loro orbita, quanto sul loro asse, essendosi ravvisata fin dove la forza dei telescopj è stata efficace, in ciascun di essi una rotazione, non escluso lo stesso Sole: di modo che non si attribuiscono alla Terra se non quei moti che son comuni a tutti i Pianeti; e di quì è, che i fenomeni del moto diurno ed annuo del ☉ appartengono solamente alla ♁: bensì poco interessando il rigor della frase ove non può temersi di equivoco, non è necessario d'abbandonare il consueto linguaggio, a cui gli Astronomi stessi sono assuefatti. Quindi l'apogeo del ☉ o l'afelio della ♁ (621), il perigeo di quello e il perielio di questa, sono il medesimo, e la situazione apparente dell'uno è sempre l'opposta della situazione vera dell'altra (459) cioè ne differisce di 180° ovvero di 6ˢ (620).

752. Frattanto il posto che ha tra i Pianeti la ♁ deve produr necessariamente varie illusioni ottiche, le quali non avrebber luogo se l'Osservatore fosse nel centro universale del sistema: e perciò la posizione *geocentrica* dei

Pianeti, tale cioè qual comparisce alla Terra, è quasi sempre diversa dall'*eliocentrica*, cioè da quella che si vedrebbe dal Sole, e che in sostanza è la vera, di cui abbiamo principalmente bisogno. Inoltre l'orbite dei Pianeti son tutte in piani diversi, i quali non hanno se non un comune punto nel ☉; e quindi la necessità e l'uso di ridurne i moti e la situazione ad un piano stesso cioè all'eclittica.

753. Sia dunque S il Sole, T la Terra ed ETC$\gamma\Gamma$S il piano dell'eclittica, a cui si conduca dal punto elevato G che suppongo un Pianeta, la normale GΓ. Sarà Γ il luogo di G nell'eclittica; e poichè SG è il *raggio vettore* del Pianeta (130) e TG la sua distanza dalla ♁, SΓ si chiamerà il *raggio accorciato*, e TΓ la distanza accorciata: l'angolo GTΓ sarà la *latitudine geocentrica* e GSΓ l'*eliocentrica* o vera; e quanto al triangolo TSΓ, l'angolo STΓ, che chiamasi *elongazione o digressione*, misurerà la distanza angolare del Pianeta dal ☉ rispetto alla ♁; l'angolo TSΓ, detto di *commutazione*, esprimerà la differenza delle longitudini del Pianeta e della ♁; e l'angolo SΓT che si nomina *parallasse annua*, indicherà la differenza tra le longitudini eliocentrica λ' e geocentrica λ del Pianeta. In fatti se si supponga Θ un punto di longitudine conosciuta A, e tale che comparisca nel luogo stesso, così veduto dalla ♁ come dal ☉, sarà $\Gamma S\Theta = \lambda' - A$, $\Gamma T\Theta = \lambda - A$, e quindi $\Gamma S\Theta - \Gamma T\Theta$ cioè $S\Gamma T$ (L. 425) $= \lambda' - \lambda$: finalmente se si supponga in E il nodo ☊ dell'orbita, l'angolo ESG sarà la distanza angolare vera del Pianeta dal nodo ☊, e l'angolo ESΓ la stessa distanza presa sull'eclittica, la differenza dei quali, cioè ESG — ESΓ, chiamasi *riduzione*.

754 Se sia pertanto E l'angolo di elongazione, C quello di commutazione, ♁ la longitudine della Terra, ☉ quella del Sole, avremo $E = \lambda \backsim$ ☉, $C =$ ♁ $\backsim \lambda'$ e chimando L' la latitudine eliocentrica, L la geocentrica, R il raggio vettore accorciato, D la distanza accorciata, avremo (L. 646) SΓ (R): GΓ : : 1 : *tang* L', e TΓ (D): GΓ : : 1 : *tang* L, onde R *tang* $L' = D$ *tang* L cioè *tang* L': *tang* L : : D : R : : *sen* C : *sen* E (L. 636) : : *sen* (♁ $\backsim \lambda'$): *sen* ($\lambda \backsim$ ☉), ovvero sostituendo ☉ $\pm$ 180° a ♁ (751) : : *sen* ($\lambda' \backsim$ ☉) : *sen* ($\lambda \backsim$ ☉); e perciò

8.

$$tang\ L' = \frac{D\ tang\ L}{R} = tang\ L \times \frac{sen\ (\lambda' \backsim ☉)}{sen\ (\lambda \backsim ☉)}.$$

755. Osservazioni. 1ª. le comuni sezioni dell' orbite e dell' eclittica, cioè le *linee dei nodi*, passano per il ☉, e quindi ogni ☊ è discosto 180° (preso il ☉ per centro) dal suo relativo ☋. 2ª. le più dell' orbite dei Pianeti fan coll' eclittica un angolo molto piccolo, cosicchè questi sembrano in certo modo scorrer per essa: in fatti se se ne eccettuino ⚳ ⚴ e ⚵ le cui orbite hanno 10°, 13°, e 34° in circa di obliquità, quella dell' orbite di ☿ e di ⚶ son di 7°; quella di ♀ 3° 23′ 35″; quella di ♂ 1° 51′; quella di ♃ 1° 18′ 56″; quella di ♄ 2° 29′ 50″; e quella di ♅ 0° 46′ 20″: la lor latitudine geocentrica ha limiti assai più estesi, trovandosi che in ♀ oltrepassa i 9°; quindi lo spazio destinato a segnare i limiti di tutte l' orbite planetarie fu circoscritto in una fascia nel Cielo detta *zodiaco* della larghezza di circa 18° di cui l' eclittica tiene il mezzo. 3°. condotte da tutti i punti dell' orbita le normali all' eclittica, la serie di tutte le loro estremità Γ dà la *projezione dell' orbita* o sia l' *orbita ridotta*.

80 756. L' orbita ETC della ♁ abbraccia l' orbite *mabd* ed *vn* di ☿ e di ♀ ed è abbracciata da G*g* ec., cioè da quelle di ♂, di ⚶, di ⚴ di ⚳ di ⚵ di ♃, di ♄ e di ♅; quindi ☿ e ♀ son chiamiati *Pianeti inferiori* e gli altri *superiori*. I primi si manifestano dall' avere un' elongazion limitata, perchè quantunque discosti dal ☉ quanto porta il massimo raggio della lor orbita come in *m*, l' angolo *m*ST non può eccedere una misura determinata: e in fatti nè ☿ si osserva mai lontano dal ☉ più di 28° 20′, nè ♀ più di 47° 48′; laddove tutti gli altri se ne discostano fino a 180° e tornano ad avvicinarsegli dalla parte opposta. Il Pianeta la cui elongazione è zero, dicesi in *congiunzione* che suol indicarsi con ☌, e quello la cui elongazione è 180° in *opposizione* significata da ☍; quindi ☿ e ♀ non son mai in opposizione, ma in quella vece hanno col ☉ due congiunzioni, l' una al di là in μ' che dicesi *congiunzion superiore*, l' altra al di quà in μ che è propria soltanto di ♀ e di ☿ e chamasi *congiunzione inferiore*. Se la linea visuale che stendesi dalla Terra T per il Pianeta μ, incontri prolungata il *disco solare* S, cioè se la latitudine del Pianeta sia zero (703), questa congiunzione inferiore

feriore si nomina *passaggio*: allora il Pianeta si manifesta come un corpo opaco aderente al ☉, di cui intercetta una porzione dei raggi. Questo fenomeno si potrebbe chiamare *ecclisse solare* cioè difetto di luce (benchè apparente), se la piccolezza del corpo frapposto non rendesse affatto insensibile tal diminuzione: si usa bensì questo nome allorchè la ☽ girando intorno alla ♁ (750) toglie talvolta a questa, ove tutta, ove qualche parte della vista del ☉, che essa nasconde *successivamente* ai diversi punti terrestri i quali le son sottoposti: diverso però è il caso della ☽ allorchè entrando nel cono ombroso che getta la ♁ verso la parte opposta al ☉ (463.467) resta realmente priva del lume solare, e quindi l'*ecclisse lunare* è vera. Se ♂, ⚶, ⚴, ⚳ ec. benchè si trovino qualche volta sulla linea SΓ non si ecclissano, ciò deriva dal non estendersi il cono ombroso terrestre molto al di là della distanza lunare (471). Deve quì anche osservarsi che ☿ e ♀ son soggetti a delle fasi (611) simili a quelle della ☽, mentre gli altri Pianeti conservano sempre, almeno sensibilmente, la stessa luce, perchè in sequela della respettiva loro situazione, l'emisfero illuminato di questi ultimi resta sempre in vista alla ♁, laddove quelli di ♀ e di ☿ ora son fuori di vista affatto, ora si mostrano solamente in parte, ora lascian vedersi interamente e poi tornano a disparire, volgendo allora verso la Terra la parte non illuminata e perciò invisibile: tale è anche la causa delle fasi lunari.

757. Nè resta ora difficoltà per comprendere come tutti i Pianeti, ad eccezion della ☽ che gira realmente intorno alla ♁, siano or *diretti* avanzandosi in longitudine, ora *stazionarj* restando nel luogo stesso per qualche tempo, ora *retrogradi* ripigliando il moto in contraria parte: questa illusione ottica non è che un effetto e insieme una prova assai convincente del moto e della situazion della ♁ fuor del centro della comune tendenza, ove se fosse l'Osservatore, nissun Pianeta primario potrebbe mai comparirgli immobile se non perdendo la sua forza tangenziale e piombando verso di lui (130). Sia al solito ETC l'orbita della ♁ cioè l'eclittica, S il ☉, *m* un Pianeta inferiore, per es. ☿, G un superiore, per es. ♃. Poichè si sa che i Pianeti meno lontani dal centro son più veloci, è

80

80 certo 1°. che posta la ♁ in T e ☿ in b, mentre quella percorre un piccol arco Ti, questo trascorre da b in d ed il suo moto apparisce non solamente diretto ma anche più rapido, perchè T si muove in senso contrario rispetto a lui (458. 459); ma se ☿ sia in m e trascorra per ma, la sua direzione apparirà opposta e sembrerà retrocedere: laddove trovandosi verso dm o ab, la Terra non distinguendovi verun cangiamento angolare, lo giudicherà immobile. Presso a poco lo stesso è per G. La Terra che essendo in E riferisce G alla Stella q, avanzandolo col suo moto arriva a vederlo presso la Stella p mentre appena si è mosso per breve spazio, e quindi lo crede tornato indietro: così da ⊖ lo vedrebbe diretto, e nelle combinazioni di una determinata obliquità, stazionario.

758. È dunque fuor d'ogni dubbio che l'orbite dei Pianeti son trajettorie da essi descritte per l'attività di due forze diversamente dirette (130), l'una delle quali, che può chiamarsi gravità o anche attrazione, gli spinge verso del ☉, lasciando in essi per altro una scambievol tendenza; l'altra che può chiamarsi projettile o tangenziale, gli spinge sempre per l'attual tangente della trajettoria. Questa seconda, impressa loro coll'altra fin dal principio del Mondo, non mai incontrando ostacoli che la indeboliscano (3), opera sempre nel modo stesso e perpetua il corso di ogni Pianeta: e poichè l'impulso comunicato a ciascuno, non era diretto al centro; oltre il movimento di traslazione fu impresso in ogni Pianeta anche quello di rotazione (751) che di sua natura è uniforme (216). Frattanto non influendo nè queste forze nè questi moti in maniera alcuna sulla posizion dell'asse del Pianeta riguardo al piano dell'orbita, quest'asse dee mantenersi di natura sua parallelo sempre a se stesso, e solamente soffrir quei piccoli cangiamenti cui lo assoggettano le attrazioni scambievoli (725. 731): perciò il parallelismo non è già un moto come taluno lo ha chiamato, ma la mancanza di un movimento o di una forza di più.

759. Non è per altro che questi moti non sien soggetti a delle *perturbazioni* o cangiamenti sensibili, benchè piccoli; poichè la forza da noi supposta (4. 750) essendo costante (5) ed universale, non può non esser reciproca, e quindi 1°. i Pianeti non solamente debbon esser tratti dal ☉, ma trarlo anche a se ed attrarsi

scambievolmente, cagionando gli uni sugli altri or qualche aumento or qualche diminuzione nella velocità, nel raggio vettore ec.: 2°. il ☉ stesso in cui si conosce un moto di rotazione (751), dee soggiacere alle conseguenze del primo impulso, d'onde questo moto deriva (216) e dell'universale equilibrio, ed avere un moto di traslazione: vedremo per altro in breve che riguardo al Sistema planetario di cui si tratta, può e deve prendersi come immobile: 3°. variata per quanto poco si voglia la velocità dei Pianeti e la lor distanza dal ☉, l'orbite loro debbon soffrir dei cangiamenti e dei moti; e perciò, non supponendole circolari, i loro afelj e i lor perielj, o con nome generico i loro *apsidi*, non meno che i loro nodi, si debbon muovere anch'essi.

760. Nasce da tutto ciò la necessità di considerare in varie maniere le rivoluzioni dei Pianeti, e il diverso nome onde si distinguono: poichè si chiamano *periodiche* o *siderali*, se il giro è determinato dal ritorno alle medesime fisse; *tropiche* se lo è dal ritorno al primo punto di ♈; *sinodiche* se si riferisce al tempo che passa tra una congiunzione, un'opposizione ec. fino alla congiunzione, opposizione ec. seguente; finalmente *anomalistiche* se si riferisce al ritorno nel punto dell'afelio; perciò l'angolo contenuto dal raggio vettore e dalla linea degli apsidi, presa comunemente verso l'afelio, chiamasi *anomalia*: onde supposto per esempio *c* l'afelio della ♄, ed essa in T, l'angolo *c*ST ne sarebbe l'anomalia: trasferendo il moto nel ☉ (751), l'anomalia di questo si conta dall'apogeo ed è maggiore dell'altra di 180°. 80

761. Sono incredibili le diligenze che han poste in uso gli Astronomi per determinar questi differenti *periodi*; e poichè i Pianeti superiori nelle opposizioni e gli altri nelle congiunzioni inferiori si veggono dalla ♁ o nel luogo stesso in cui si vedrebbero dal Sole, o precisamente a 180° di differenza; perciò le osservazioni accurate delle opposizioni e delle congiunzioni, eseguite a grandi intervalli l'une dall'altre per fare sparire le piccole ineguaglianze, hanno servito di base a determinar la durata di queste rivoluzioni. E quantunque una tal determinazione dia solamente le rivoluzioni *medie* cioè ragguagliate come uniformi; pure non è stato dipoi difficile di fissar le correzioni da farsi alle quantità *medie*, o in

frase astronomica, l'*equazioni* per ottener le quantità *vere*: cosicchè in oggi, conoscendosi gli *elementi dell'orbita* di un Pianeta, cioè il suo afelio, la sua *eccentricità* (giacchè in breve dimostreremo che le trajettorie dei Pianeti son vere *elissi*), la longitudine, la situazion del suo ☊ ec. calcolate per un dato istante qualunque, che chiamasi *epoca*, e date le quantità dei respettivi movimenti e perturbazioni, cioè l'*equazioni* necessarie, si può trovar per ogni altro istante la vera sua posizione. A questo oggetto saranno poste sul fine di questo Libro le Tavole che contengono, oltre l'epoche delle situazioni così del ☉ (o sia della ♁ (751)) come della ☽ e dei Pianeti primarj, anche gli *elementi* sopraccennati e i relativi *argomenti*, che sono i *dati* col mezzo dei quali si trovano l'equazioni suddette. Le celebri Tavole di De-Lambre e di Burg pubblicate dal Bureau delle longitudini di Parigi; quelle egualmente preziose del Sig. Barone di Zach, e i metodi compendiosi da questo famoso Astronomo usati nelle ricerche astronomiche, ci han servito di base e di regola, e ci hanno di più fortunatamente guidati a ridurre alcune di esse Tavole ad un comodo anche maggiore e ad una maggior brevità. Quanto al loro pratico uso, ne parleremo nella seconda parte, e tanto ivi che sulle Tavole stesse, quando possa esser più comodo, riporteremo diverse formule molto utili, i cui fondamenti e dimostrazioni non potrebbero aver luogo in queste Lezioni senza eccedere i limiti elementari da noi fissati, ed aumentare eccessivamente la mole di questo Libro (535).

762. Presa pertanto per unità di confronto la distanza media della ♁ dal ☉, e determinandone i cangiamenti per mezzo di quelli o della parallasse (455, o del diametro solare (452), si è potuto conoscere con sufficiente esattezza il raggio vettore SE, ST per ogni punto dell'orbita; quindi osservato il Pianeta G nello stesso punto del Cielo, cioè riguardo all'eclittica nello stesso punto Γ e da E e da T, se ne è dedotto il raggio accorciato SΓ e dipoi il vero SG. In fatti poichè dee conoscersi la differenza delle due longitudini in E e in T, si conoscerà oltre le rette ES, ST, anche l'angolo contenuto EST, e saranno noti così gli angoli ETS, TES come la corda ET. Ora essendo ΓTS la differenza tralle longitudini

80

apparenti del ☉ e di Γ, si avrà ΓTE e per la stessa ragione ΓET; quindi trovati nel triangolo TΓE i lati ΓT, ΓE (L. 656), si troverà o col triangolo ΓES o col triangolo ΓTS il raggio accorciato SΓ; e finalmente avendosi nel triangolo TΓG la latitudine geocentrica ΓTG (754) e il lato TΓ, si otterrà ΓG (L. 648) e quindi l' ipotenusa SG che è il raggio vettore cercato. 80

763. Con tali metodi ed altri simili si arrivò a determinare oltre i tempi periodici dei Pianeti, anche la loro distanza media dal ☉; e questa fu una delle cognizioni più utili e più feconde in Astronomia, da cui finalmente Keplero dopo lunghe e reiterate investigazioni dedusse l' importantissimo teorema, che *nel moto di due Pianeti qualunque, i quadrati dei tempi periodici son come i cubi delle distanze medie dal Sole*, il qual teorema si nominò in seguito la 3ª *Legge di Keplero* non meno che l' altra della proporzione costante tra l' *aree* e i *tempi* (185) la quale si dee parimente a lui, e si chiamò la 2ª Legge.

764. Ciò premesso, cerchisi qual sia la forza onde sono attratti i Pianeti dal comun centro. Siano Ss, Gg due archi assai piccoli di due orbite (che perciò si posson quì supporre e circolari e concentriche) compresi dagli stessi raggi vettori CS, CG che chiamo z e z'; e sia t il tempo speso da S per Ss, τ quello che impiega G per Gg. Essendo il pianeta G il più lento (763) e perciò $\tau > t$, prendasi l' arco Gb trascorso nel tempo t; indi conducansi a CG le normali su, gd, bh e sia Su = F, Gd = φ, Gh = F'. È chiaro che F, F' saran le forze centrali di S e di G (200) e che essendo gli archi piccolissimi, si ha (32) $\tau : t :: Gg : Gb :: \sqrt{\varphi} : \sqrt{F'}$ (198. 200) e perciò $\tau^2 : t^2 :: \varphi : F' = \frac{\varphi t^2}{\tau^2}$; ma inoltre S$u$ (F) : Gd (φ) :: CS (z) : CG (z') (L. 508) e perciò $\varphi = \frac{Fz'}{z}$; dunque, poichè la ragione di $t : \tau$ è quella dei tempi periodici e si ha (763) $t^2 : \tau^2 :: z^1 : z'^3$, sarà finalmente $F' = \frac{Fz'}{z} \times \frac{z^3}{z'^3} = \frac{Fz^2}{z'^2}$, onde $F : F' :: z'^2 : z^2 :: \frac{1}{z^2} : \frac{1}{z'^2}$ cioè *le forze con cui sono attratti i Pianeti stanno in ragione inversa dei quadrati delle distanze o raggi vettori* come già si era accennato. 81

765. Non è ora punto difficile, stabilito questo teorema, di trovar la massa solare S. Chiamo T la massa terrestre, d la sua media distanza dal ☉, t il suo tempo periodico $= 31558155''$ (622), L la massa della ☽, d' la sua media distanza dalla ♁, e τ il suo tempo periodico $= 2360591'', 5$ (761). Se T fosse un punto solo, la forza attiva di S verso T, cioè lo sforzo di T per cadere in S sarebbe $\frac{S}{d^2}$ (764); dunque poichè $1 : \frac{S}{d^2} :: T : \frac{T.S}{d^2}$, sarà $\frac{T.S}{d^2}$ la somma totale della gravità o il peso (9) o la forza che spinge T verso S. Nel modo stesso sarà $\frac{T.L}{d'^2}$ la forza che spinge L verso T. Ma le forze centrali (203) esprimono anch'esse le respettive tendenze F, F dei corpi verso il centro delle loro forze; dunque $\frac{S.T}{d^2} : \frac{T.L}{d'^2} ::$ $F : F :: \frac{d.T}{t^2} : \frac{d'.L}{\tau^2}$ (202) e perciò $S = \frac{Td^3\tau^2}{d'^3t^2}$. Ora sappiamo per la teoria delle parallassi (455) che se si chiami p la parallasse orizzontale del ☉ $= 8'', 6$ (634), p' quella della ☽ $= 57'$ (prendendo tra i limiti dentro i quali si varia, il valore più conveniente alla distanza media e al medio raggio terrestre), si ha (455) $p : p'$ o piuttosto $sen\ p : sen\ p' :: d' : d$ e perciò $\frac{d^3}{d'^3} = \frac{sen^3\ p'}{sen^3\ p} = \frac{sen^3\ 57'}{sen^3 8'', 6}$. Preso pertanto $sen\ 8'', 6 = 0, 00004169205$ (L. 605), si avrà $log\ \frac{d^3}{d'^3} = 3 \times 8, 2195811 - 3 \times 5, 6200532 = 7, 7985837$; ma $l\ \frac{\tau^2}{t^2} = 2 \times 6, 3730209 - 2 \times 7, 4991116 = 7, 7478186$; dunque facendo $T = 1$, si ha $lS = l\ \frac{d^3}{d'^3} + l\ \frac{\tau^2}{t^2} = 7, 7985837 + 7, 7478186 = 5, 5464023 = log\ 351886$, onde S, cioè la massa del ☉, è 351886 maggior di quella della ♁. Collo stesso metodo si troverà la proporzione della massa Solare a quelle di ♃, di ♄ e di ♅, e si avrà ♃ $= 330, 6$; ♄ $\doteq 103, 7$; ♅ $= 17, 7$; ma non potrà aversi quella di ♂, di ♀ e di ☿ e degli altri che non hanno satelliti; onde le masse di questi Pianeti restan dubbiose. Quanto alla massa della ☽, vedremo altrove come si deduca $= 0, 015$ dalla sua azione sull'acque terrestri, cioè

dall' *Esto marino*, fenomeno assai notabile e di una decisa corrispondenza coi moti lunari, sensibilissimo sotto la *zona torrida*, vale a dir nei paesi che stendonsi tra 0° e 23° 28′ di latitudine australe e setteotrionale. Per ora basti averlo accennato; e solamente si osservi che la massa del ☉ supera più di 800 volte la somma di tutti questi Pianeti insieme.

766. Facendosi il raggio medio dell' orbita della ♄ $= d = 1$, $d' = md$ quello dell' orbita di un Pianeta P, ed r il semidiametro del ☉, poichè si trova che r sottende 16′ in circa, sarà $d = r \cot 16' (451) = 215r$ e di quì $d : d'$ ovvero $1 : m :: 215r : 215mr$, lunghezza del raggio vettore d' in semidiametri solari. Che se la distanza d si voglia in raggi terrestri, posto MI il raggio della Terra $= 1$, ed essendo MCI l'angolo che i due raggi visuali MC, IC fanno nello stesso punto solare C cioè la parallasse solare $= 8'', 6$, nel triangolo MCI sarà CM $(= MG = d) : MI (= 1) :: 1 : sen\, 8'', 6$; e quindi $d = \frac{1}{sen\, 8'', 6} = 23984$ in circa. Tale in fatti gli Astronomi la stabiliscono; poichè quel poco di più che darebbe il calcolo, dee rifondersi sull' incertezza di 0″, 2 che rimane tuttora nella parallasse solare. Chiamisi pertanto x la distanza sC del centro del ☉ S da quello del suo equilibrio con un Pianeta P situato in T; sarà (111) $d' - x : x :: S : P$ cioè $d' : x :: S + P : P$, onde $x = \frac{d'P}{S+P} = \frac{215P \cdot mr}{351886 + P}$. Suppongasi $P = 103, 7$; $d' = 9, 54 = m$, sarà $x = \frac{215 \times 103, 7 \times 9, 54 \cdot r}{351989, 7} = 0, 604r$, onde il centro comune tra P e il ☉ è nei $\frac{3}{5}$ in circa del raggio di quest' ultimo. Sostituendo nella formula il valor delle masse e delle medie distanze di ogni Pianeta, si troverà la situazione del comun centro di ciascuno, e quindi con molta approssimazione il *Centro universale del Sistema Planetario*, che assolutamente è *nel Sole o vicinissimo al Sole*.

54 1ª.

81

767. Pongasi dunque in C, e sia sS lo spazio che scorre il Sole s in un istante dt, e Tt quello che scorre il Pianeta T nello stesso tempo (110, 111). Condotta st' parallela ed eguale ad St, e le normali su, Tr sarà $TCt = Tst'$, ed $Su + tr = t'r'$, cioè il moto angolare e il *rag-*

81 *gio vettore* di T rispetto ad s saran gli stessi o s rimanga immobile o muovasi per sS, e la somma delle due forze di s e di T eguaglierà la forza che avrebbe T essendo solo a muoversi. Dunque 1°. *i Pianeti descrivono intorno al Sole orbite affatto simili a quelle che descrivono intorno al centro della comun gravità :* dunque 2°. *calcolando l' orbite dei Pianeti intorno al Sole, questo dee prendersi come immobile*, poichè il piccolo moto che può supporsi nel Sole non solamente non turba l' orbite dei pianeti, ma diminuisce all' opposto le loro scambievoli *perturbazioni*; così per es. ♃ disturba meno ☿ attraendo insieme (16) ☿ e il ☉, che se attraesse soltanto il primo.

768. Convien per altro osservare che posto immobile il Sole, dee trasferirsi ai Pianeti la somma delle tendenze di questi in esso e di esso in loro, avendosi sempre $tr + Su = t'r'$. Dunque se la forza con cui T è spinto verso s nella distanza d è $F = tr$ (200), e quella con cui s è attratto da T è $- F' = - Su$, sarà la forza che ritiene T nella propria orbita intorno al Sole $= t'r' = tr + Su = F + F'$, cioè *la forza che ritiene un Pianeta nella sua orbita intorno al Sole, eguaglia la somma delle forze che agiscono sul Pianeta immediatamente, e di quelle che agiscono sul Sole, trasportate al Pianeta, mutando i segni.*

769. Dunque se T s' incontri coi Pianeti M, V nelle distanze TV, TM, la forza che ritiene T nell' orbita TP e nel punto T del raggio vettore $CT = z$, sarà composta 1°. della quantità $F + F'$; 2°. della forza dei Pianeti M, V sopra T; 3°. e delle forze di M, V verso C trasportate in T come sopra (768); poichè tanto le forze espresse per MT e VT, quanto le espresse per MC e VC si risolvono al solito (99) ciascuna in due, l' una perpendicolare a TC (come MD e VE) e l' altra parallela ad essa; e quest' ultima deve aggiungersi alle forze le quali spingono T verso C; per altro i risultati che se ne ottengono, son sempre piccoli estremamente.

770. Può cercarsi ora qual debba esser la trajettoria d' un Pianeta, trascurando quì la sua massa come nulla riguardo al ☉ (765); e ciò sarà facile essendosi conosciuta la legge con cui è attratto (764). Sia essa dunque TP; sia $CP = z$ il raggio vettore, $PN = n$ la

normale

FIG. 81

normale alla curva, r il raggio osculatore, $CQ = q$ la perpendicolare condotta dal fuoco C alla tangente PQ; siano u', r', q' i valori omologhi per un altro raggio vettore z', e siano infine F, F' le forze centrali in z, z'; avremo (764) $F : F' :: \frac{1}{z^2} : \frac{1}{z'^2}$; e poichè in qualsisia trajettoria, $F : F' :: \frac{z}{q^3 r} : \frac{z'}{q'^3 r'}$ (189), perciò $r : r' :: \frac{z^3}{q^3} : \frac{z'^3}{q'^3} :: \frac{pz^3}{2q^3} : \frac{pz'^3}{2q'^3}$ come nelle sezioni coniche (*L.* 871), e la trajettoria cercata sarà conseguentemente una sezione conica. In fine, poichè le osservazioni concordi di tutti i secoli ci attestano che l'orbite planetarie son rientrati, e che i raggi vettori non son costanti; quest'orbite necessariamente *sono ellissi, in uno dei cui fuochi, comune a tutte, si trova il Sole*: e questo teorema dicesi la 1 Legge di Keplero.

771. Ora è evidente che per determinar l'asse trasverso $2r$ d'un'ellisse basta conoscerne il raggio vettore z e trasportare il fuoco nel vertice dell'asse stesso; poichè allora la curva svanisce, l'eccentricità e si confonde col semiasse r, l'ascissa x (presa dal vertice opposto) diventa zero, e il raggio vettore che quì si trova $r + e - \frac{ex}{r}$ (*L.* 756), si cangia in $2r = z$. Trasporto dunque nel vertice a il fuoco S dell'ellisse planetaria, e giacchè in tal caso ella svanisce, svaniranno con lei la velocità c di rivoluzione e l'altezza dovutale $f = \frac{c^2}{2g}$ (191); quindi chiamata a la distanza AS del fuoco S dal vertice opposto A (185), b la distanza ove la forza centrale eguaglia quella di gravità (190), ed h l'altezza dovuta alla velocità di projezione (191), si avrà $2r = z = \frac{ab^2}{b^2 - ah}$ (191), asse trasverso della curva: onde essendo l'asse conjugato $2k = 2\sqrt{(r^2 - e^2)}$ (*L.* 756) ed $e\ (= AS - AC) = a - r$, verrà $2h = 2\sqrt{(2ar - a^2)} = \frac{2a\sqrt{ah}}{\sqrt{(b^2 - ah)}}$, ed il parametro $P\ (= \frac{2k^2}{r}$ (L. 742)$) = \frac{4a^2h}{b^2}$, d'onde si ricava

FIG. 82

82 anche $k = \frac{a}{b}\sqrt{2rh}$. Ma si noti che l'eccentricità dei Pianeti in paragone dei loro lunghissimi raggi vettori, è sì piccola, se al più se ne eccettui ☿, ♂ è ♀, che molte volte gli Astronomi prendon quest' orbite come circolari; all' opposto quelle delle Comete hanno un' eccentricità così enorme, che nel loro arco perielio, quale è quello in cui si rendon visibili a noi, la loro curva può prendersi per una parabola ($L.$ 871).

772. Nulla è più facile che determinare i valori di queste formule: e cominciando da b, cioè dalla distanza a cui il Sole eserciterebbe sui corpi una forza F eguale all' ordinaria forza di gravità sulla superficie terrestre, supposta $S = 351886$ la mole solare (765), 1 la terrestre, ed F parimente $= 1$, si avrà $\frac{S}{b^2} = F(764) = 1$ e $b = \sqrt{S} = 593, 2$. Determinato b e sapendosi che la distanza apogea del ⊕ $= a = 24387, 2$ raggi terrestri; e la perigea $= 2r - a = 23581, 3$ onde $2r = 47968, 5$, si avrà riducendo la formula superiore (771) e sostituendo i valori, $h = \frac{b^2(2r-a)}{2ar} = 7, 0934$: di quì il valor di $k = 23981$, quello di $\sqrt{rk}$, cioè del raggio di un circolo la cui superficie eguagli l' ellittica ($L.$ 947. I. II.) $= 23986$, quello di $P = 47955$: infine essendo $f\,(191) = h - \frac{b^2}{a} + \frac{b^2}{z} = b^2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2r}\right) = \frac{b^2}{z} - 7, 3358$, fatto $z = a, = \sqrt{rk}, = 2r - a$, avremo $f = 7, 0934, = 7, 3362, = 7, 5865$ nelle distanze afelia, media-proporzional geometrica e perielia.

773. Con questo metodo si determineranno i valori stessi per qualunque altro Pianeta, ed avremo $h' = b^2 \left(\frac{2r' - a'}{2a' r'}\right)$ ed $f' = h' - \frac{b^2}{a'} + \frac{b^2}{z'}$, subito che dalle osservazioni e dal calcolo sian determinate r' ed a'. Solo si osservi che in qualunque orbita, supposto successivamente il raggio vettore $z = a$, $z' = 2r - a$ e chiamando f, f' le altezze solite corrispondenti alle celerità di rivoluzione c, c', si ha $f' = b^2\left(\frac{1}{2r-a} - \frac{1}{2r}\right) = b^2\left(\frac{a^2}{2ar(2r-a)}\right)$ ed $f = b^2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2r}\right) = b^2\left(\frac{(2r-a)^2}{2ar(2r-a)}\right)$, onde $f : f' :: (2r - a)^2$;

FIG.

a^2, e quindi (191) $c : c' :: 2r - a : a$, cioè *la celerità perielia sta alla celerità afelia in ragione inversa delle distanze perielia ed afelia del Pianeta* come è noto per altra parte (187).

Intanto osserveremo di passaggio che essendo SC $= e = a - r$, e avendosi dalla proporzione di sopra, $c' - c : c' :: 2a - 2r : a :: 2e : a$, sara $c = \frac{a(c'-c)}{2c'}$.

82

774. Da questo principio nasce una spiegazione assai naturale del moto ellittico e dell' allontanamento dei Pianeti dal Sole dopo il loro passaggio per il perielio. In fatti, essendo $c^2 : c'^2 :: \frac{1}{q^2} : \frac{1}{q'^2}$ (187), preso costante dt, se si concepiscan due circoli dei raggi q, q', le *forze centrifughe* in essi saranno (202) $:: \frac{c^2}{q} : \frac{c'^2}{q'} :: \frac{1}{q^3} : \frac{1}{q'^3}$ trascurando la tenuissima differenza delle lor masse μ, μ'. Dunque nei casi ove $q = z = r \pm e$, cioè negli apsidi A, a, le forze centrifughe K, K' del Pianeta saranno $:: \frac{1}{q^3} : \frac{1}{q'^3} :: \frac{1}{(r+e)^3} : \frac{1}{(r-e)^3}$; ma le centripete F, F' (preso p per il parametro della curva) sono (764) $:: \frac{1}{\frac{1}{2}pz^2} : \frac{1}{\frac{1}{2}pz'^2} :: \frac{1}{\frac{1}{2}p(r+e)^2} : \frac{1}{\frac{1}{2}p(r-e)^2}$; dunque poichè 1°. $r^2 - k^2 = e^2$ (*L.* 756) onde $\frac{1}{2}p = \frac{k^2}{r} = r - \frac{e^2}{r}$ (*L.* 742); 2°. $r - e < r - \frac{e^2}{r}$ (per esser $e > \frac{e^2}{r}$ (*L.* 64)); 3°. $r + e > r - \frac{e^2}{r}$; perciò $r - e < \frac{1}{2}p$ ed $r + e > \frac{1}{2}p$, e quindi $\frac{1}{(r-e)^3} > \frac{1}{\frac{1}{2}p(r-e)^2}$ ed $\frac{1}{(r+e)^3} < \frac{1}{\frac{1}{2}p(r+e)^2}$, cioè la forza centrifuga nel perielio a supererà la centripeta, e ne sarà superata nell' afelio A. Da ciò si manifesta evidentemente il perchè i Pianeti arrivando al perielio comincino ad allontanarsi dal ☉, e senza pena s' intende che quantunque la differenza delle due forze $F - K = \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}p} - \frac{1}{z}\right)$ divenga zero quando $z = \frac{1}{2}p$, cioè quando le due forze si trovano in equilibrio, il Pianeta non intraprenderà per questo a descrivere un

circolo (200), perchè il raggio vettore non è in quel caso normale alla tangente.

775 Cerchisi ora la celerità effettiva del Pianeta; e giacchè si trovò (187) $\frac{ds}{dt} = c = \frac{B}{q}$, chiamata E l'area totale della trajettoria $= \pi rk$ (*L.* 947), T il tempo periodico, $\frac{B}{2}$ (185) l'area descritta nel tempo t, avremo (185) $T : t :: E : \frac{B}{2} = \frac{Et}{T}$, e $B = \frac{2Et}{T} = \frac{2t\pi rk}{\sqrt{r^3}}$ (763) $= t\pi \sqrt{\frac{4k^2}{r}} = t\pi\sqrt{2p}$ (*L.* 742); onde $c = \frac{B}{q}$ (187) $= \frac{t\pi\sqrt{2p}}{q}$. Presa quindi un'altra trajettoria dello stesso nome, e paragonando i valori omogenei E', T', t', B', c', si avrà 1°. $B : B' :: \frac{Et}{T} : \frac{E't'}{T'} :: t\sqrt{p} : t'\sqrt{p'}$; 2°. $E : E' :: T\sqrt{p} : T'\sqrt{p'}$. 3°. $t : t' :: \frac{B}{\sqrt{p}} : \frac{B'}{\sqrt{p'}}$, e quindi $c : c' :: \frac{t\sqrt{p}}{q} : \frac{t'\sqrt{p'}}{q'}$. Fatto $t = t'$, si avrebbe $B : B' :: \sqrt{p} : \sqrt{p'}$ e $c : c' :: \frac{\sqrt{p}}{q} : \frac{\sqrt{p'}}{q'}$.

82 776. Segue da ciò 1°. che se il Pianeta sia in Giove $q = k$, fatto $t = 1''$ sarà $c = \frac{B}{k} = \frac{2E}{Tk} = \frac{2\pi r}{T}$ cioè (202) *all'estremità del semiasse conjugato la celerità del Pianeta nell' elisse è quella stessa che avrebbe in un circolo di un raggio r eguale al semiasse trasverso.*

777. 2°. Che $T : T' :: \frac{E}{\sqrt{p}} : \frac{E'}{\sqrt{p'}} :: \frac{\pi rk}{k\sqrt{\frac{2}{r}}} : \frac{\pi r'k'}{k'\sqrt{\frac{2}{r'}}} :: \sqrt{r^3} : \sqrt{r'^3}$; onde se $r = r'$ sarà, $T = T'$, cioè in due ellissi dello stesso asse trasverso, i tempi periodici sono eguali, quantunque sia l'asse conjugato; e perciò *i Pianeti scorrono le loro ellissi nel tempo stesso in cui scorrerebbero i circoli descritti sull'asse trasverso come diametro.*

83 778. 3°. Che se collo stesso vertice a e col medesimo fuoco e centro S si descrivano (oltre l'ellisse) la parabola e il circolo, e nel punto a siano c, c', c'' le celerità che avrebbe un Pianeta per queste tre curve nel principio del moto, essendo i lor parametri $p = \frac{2(r^2 - e^2)}{r}$ (*L.* 742), $p' = 4Sa$ (*L.* 883) $= 4(r \mp e)$, $p'' = 2Sa$ (*L.* 871) $= 2(r \mp e)$, e $q = q' = q'' = r \mp e$, si avrà $c : c' : c'' ::$

$\sqrt{(1 \pm \frac{e}{r})}:\sqrt{2}:1$, valori di cui altrove dovremo far uso.

779. Quanto alle *celerità angolari* dei Pianeti, già si sa (186) che stanno in ragione inversa dei quadrati dei raggi vettori, e basta quì solamente determinare il punto dell' orbita in cui la celerità angolare *vera* eguaglia la *media*. Sia T il tempo periodico, $d\beta'$ l' angolo descritto con moto uniforme (32) nel tempo dt, e facciasi $2\pi = 360°$. Avremo $T : dt :: 2\pi : d\beta'$ e quindi $\frac{d\beta'}{dt} = \frac{2\pi}{T} = \frac{d\beta}{dt}$ (186) $= \frac{B}{z^2}$ e $z = \sqrt{\frac{B . T}{2\pi}} = \sqrt{rk}$ (775); perciò descritto col centro S e col raggio $SI = \sqrt{rk}$ il circolo IDI', saranno I, I' i punti cercati. 82

780. Osservazioni. I^a. Poichè negli apsidi la forza di projezione è normale all' asse trasverso dell' orbita e al raggio vettore, è evidente che *le celerità angolari del Pianeta verso gli apsidi sono uniformi* (199). II^a. Se siano $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\beta'}{dt'}$ le velocità angolari in due orbite differenti e facciasi $d\beta = d\beta'$, si avrà $\frac{d\beta}{dt} : \frac{d\beta'}{dt'} :: dt' : dt$, cioè *i tempi impiegati da due Pianeti per descrivere angoli eguali in orbite differenti, stanno in ragione inversa delle velocità angolari*. III^a. Poichè $\frac{d\beta}{dt} = \frac{2\pi}{T}$ (779) e $\frac{d\beta'}{dt'} = \frac{2\pi}{T'}$, fatto $dt = dt'$, sarà $\frac{d\beta}{dt} : \frac{d\beta'}{dt'} :: T' : T$, cioè *gli angoli descritti in due orbite differenti nello stesso tempo* dt, *sono in ragione inversa dei tempi periodici*.

781. Per altro alla Terra non è sensibile la velocità di un Pianeta se non in quanto se ne aumenta la longitudine geocentrica λ; onde la differenza $d\lambda = d☉ \pm dE$ (754) esprimerà la *velocità angolare apparente* in $1'' = dt$. Cerchisi pertanto il valor di E allorchè $d\lambda = 0$, cioè allorchè il Pianeta dee comparire *stazionario*: e supponendo per ora prossimamente concentriche e circolari l' orbite della Terra e di lui, siano z, z' (ST, SΓ) i raggi vettore dell' una ed accorciato dell' altro, t e τ i loro tempi periodici, e p l' angolo parallattico SΓT $= \lambda \backsim \lambda$ (753). Nel triangolo STΓ avremo ($L. 636$) $z : z' :: sen\ p : sen$ E e perciò $z\ sen\ E = z'\ sen\ p$; onde differenziando, $z dE\ cos\ E =$ 84

$z' \, dp \cos p$ (perchè z e z' si suppongon costanti) e quindi $dp \cos p : dE \cos E :: z : z' :: sen\, p : sen\, E$, il che dà $dp : dE :: tang\, p : tang\, E$. Quindi poichè col differenziar l'equazioni $\lambda = ☉ \pm E$ (754) e $p = \lambda' - \lambda$ (753) facendo $d\lambda = 0$, si troverà $d☉ = \pm dE$ e $dp = d\lambda'$, e poichè gli aumenti contemporanei di longitudine del Sole e del Pianeta, cioè $d☉$ e $d\lambda'$, sono in ragione inversa dei tempi periodici (78c. III.), si avrà $t : \tau :: d\lambda' : d☉ :: dp : dE :: tang\, p : tang\, E$; ma $t^2 : \tau^2 :: z^3 : z'^3$ (763): dunque $z^3 : z'^3 :: tang^2 p : tang^2 E$. Avendosi pertanto dalla proporzione di sopra $z^2 : z'^2 :: sen^2 p : sen^2 E$, se si divida per questa la precedente a termine per termine, si ha (*L.* 211. 3°) $z : z' :: \frac{1}{\cos^2 p} : \frac{1}{\cos^2 E} :: \cos^2 E : \cos^2 p$, onde $\cos^2 p = \frac{z' \cos^2 E}{z}$; ma si ricava di sopra $sen^2 p = \frac{z^2\, sen^2 E}{z'^2}$; dunque $sen^2 p + \cos^2 p\, (= sen^2 E + \cos^2 E) = \frac{z^2\, sen^2 E}{z'^2} + \frac{z' \cos^2 E}{z}$ cioè (dividendo per $\cos^2 E$) $tang^2 E + 1 = \frac{z^2\, tang^2 E}{z'^2} + \frac{z'}{z}$ e di quì $(zz'^2 - z^3)\, tang^2 E = z'^3 - zz'^2 = z'^2 (z' - z)$, d'onde infine $tang^2 E = \frac{z'^2}{zz' + z^2}$ ovvero facendo $z = 1$, $tang\, E = \frac{z'}{\sqrt{(1 + z')}}$.

Fatto anche $\sqrt{\frac{z'}{z}} = tang\, y$, si avrebbe $tang\, E = \frac{z'}{z} \times \frac{1}{\sqrt{(1 + \frac{z'}{z})}} = tang^2 y \times \frac{1}{\sqrt{(1 + tang^2 y)}} = \frac{tang^2 y}{sec\, y} = tang\, y \times sen\, y$. Perciò trovato prima coi raggi *medj* il richiesto angolo *approssimato* di elongazione, e impiegati in seguito con nuovo calcolo i raggi *veri* corrispondenti al primo valor di E, si avrà E con una precisione assai più notabile. Sostituendo a z, z' i valori di $t^{\frac{2}{3}}$, $\tau^{\frac{2}{3}}$ (763) si avrebbe un valor di E dato per mezzo dei tempi periodici.

83 782. Dopo tutto ciò sia AP*a*B l'orbita ellittica d'un Pianeta P, AC = C*a* = r = 1 il suo semiasse maggiore, SC = e l'eccentricità, ASP = β la sua anomalia; sarà SP il raggio vettore $= z = \frac{k^2}{r - e \cos \beta}$ (*L.* 756) $= \frac{r^2 - e^2}{r - e \cos \beta}$

$= \frac{1-e^2}{1-e\cos\beta} = (1-e^2)(1-e\cos\beta)^{-1}$ cioè riducendo in serie (*L.* 161) $(1-e^2)(1+e\cos\beta+e^2\cos^2\beta+e^3\cos^3\beta+$ ec.), ovvero (per esser $\cos^2\beta = \frac{1}{2}+\frac{\cos 2\beta}{2}$ (*L.* 622. 33'), $\cos^3\beta = \frac{3\cos\beta+\cos 3\beta}{4}$ (*L.* 633. 65'.)),

$z = 1-\frac{e^2}{2}+(e-\frac{1}{4}e^3)\cos\beta+\frac{e^2}{2}\cos 2\beta+\frac{e^3}{4}\cos 3\beta+$ ec., ove si osservi che in questo e in ogni altro simil caso sogliono omettersi tutti i termini nei quali e eccede la terza potenza, come trascurabili anche nelle orbite le più eccentriche.

783. La posizione però di un Pianeta, la traccia della sua orbita, il suo raggio vettore ec. non si posson determinare senza suppor conosciuta prima la situazione degli apsidi. Debba dunque trovarsene il luogo, e siano a', A' due punti opposti dell' orbita APaBA osservati mentre il Pianeta trovandosi in congiunzione o in opposizione, cioè veduto nel suo luogo vero anche dalla Terra, dimostra una celerità uniforme ed è perciò presso gli apsidi (780); sia T il suo tempo periodico, t il tempo impiegato a scorrere per a'BA', $T-t$ quello che deve impiegare per A'Pa'; e supposta Aa la linea cercata, chiedasi il tempo t' occorrente per giungere dall' afelio supposto A', al vero A. È chiaro che di tutte le linee condotte per S, la sola SC che passa dal centro, divide in due parti eguali l' area totale E dell' ellisse, onde non vi è se non il tempo impiegato da A in a e da a in A che eguagli esattamente la metà del tempo periodico. Poichè dunque l' aree son proporzionali ai tempi (185) e si ha l' area A'SA > a'Sa onde l' area a'BA'S$a' < \frac{1}{2}E$, avremo ancora $t < \frac{T}{2}$, e $T-t > \frac{T}{2}$. Chamando ora c, c' le celerità angolari verso il perielio e verso l' afelio, e t'' il tempo speso per l' arco aa', avremo 1°. $t' : t'' ::$ ASA' : aSa' :: AS^2 : aS^2 (*L.* 527); 2°. $c : c' ::$ AS^2 : aS^2 (186); onde $c : c' :: t' : t'' = \frac{c' t'}{c}$; e poichè la differenza della semiellisse aBACa dall' area a'BA'Sa' eguaglia quella dei

settori ASA′, aSa′, sarà $\frac{T}{2} - t = t' - \frac{c' t'}{c}$ e il tempo cercato $t' = \frac{c(T-2t)}{2(c-c')}$; onde si conosceranno tanto il momento in cui giunge il Pianeta all'afelio, quanto la parte del Cielo a cui corrisponde. Fissata un' epoca (761) dell'afelio, e paragonando colle più recenti le più antiche osservazioni si trova il moto annuo o secolare di questo punto, e ne è perciò nota sempre la posizione.

784. Di quì si passa naturalmente a determinare il luogo di un Pianeta nella sua orbita, o che è lo stesso, la sua *anomalia vera* β per un dato tempo qualunque t. Se mentre egli parte dal suo afelio A per l'ellisse AP, 82 un altro Pianeta *medio* partisse da D per il circolo DQI eguale all'ellisse (*L.* 947. I e II) collo stesso tempo periodico T e con moto uniforme (199), e si trovasse in Q mentre il primo si trova in P, sarebbero eguali l'aree APS, QSD, e l'arco QD o l'angolo QSD $= \mu$ sarebbe l'*anomalia media*, proporzionale al tempo trascorso t e perciò sempre nota: quindi supposti nel circolo e nell'ellisse due raggi vettori infinitamente vicini, e chiamando $d\mu$, $d\beta$ gli angoli che essi comprendono, descritti in un tempo eguale dt, si avrebbero l'aree eguali $\frac{kd\mu}{2}$, $\frac{z^2 d\beta}{2}$ ovvero (782) $\sqrt{(1-e^2)}\, d\mu = (1-e^2)^2 (1 - e \cos \beta)^{-2} d\beta$. Riducendo in serie questo valore (*L.* 161), sostituendovi alle potenze dei coseni i coseni degli archi multipli (*L.* 633), moltiplicando insieme i fattori del secondo membro con trascurar le potenze maggiori di e^4 e integrando, si avrebbe $\mu = \beta + 2e \operatorname{sen} \beta + (\frac{3}{4} e^2 + \frac{1}{8} e^4) \operatorname{sen} 2\beta + \frac{1}{3} e^3 \operatorname{sen} 3\beta +$ ec. equazione cui non è applicabile il metodo inverso delle serie (*L.* 292) e dalla quale perciò non si può ottener con facilità il valor di β dato per μ. Impiegando però o il metodo delle ripetute sostituzioni o altro simile, troverebbesi $\beta = \mu - (2e - \frac{1}{4} e^3) \operatorname{sen} \mu + (\frac{5}{4} e^2 - \frac{11}{24} e^4) \operatorname{sen} 2\mu - \frac{13}{12} e^3 \operatorname{sen} 3\mu +$ ec. Vedasi l'eccellente Trigonometria dell'egregio Sig. Cagnoli, cui appartengono

partengono molte eleganti e comodissime regole di calcolo delle quali facciamo uso. Talora l'anomalìa prendesi dal perielio, non che per le Comete, anche per i Pianeti.

785. Gli Astronomi sciolgono anche più comunemente questo problema con un metodo men diretto, ma non meno utile e comodo. Sull'asse Aa come diametro si descriva un circolo $ABaB'$ che si chiama *l'eccentrico*, e supponendo che il Pianeta vero e il medio partano unitamente da A, questo per l'eccentrico ARB, quello per l'ellisse API, posta al solito $1 : \pi$ la ragione del diametro alla circonferenza, ed $AC = Ca = CR = 1$, si avrà $T : t :: 2\pi : \mu = \frac{2t\pi}{T}$. Ciò premesso, sia l'angolo ASP $= \beta$ l'anomalìa ricercata, $SC = e$ l'eccentricità, ACR $= \varphi$ il valor dell'arco RA o dell'angolo RCA detto *anomalìa dell'eccentrico*, k il semiasse conjugato dell'orbita, E l'area totale di essa, C quella del circolo, a il settore ellittico ASP, ed a' il settor circolare RSA. Poichè $E : C :: k : 1$ ($L.$947) :: PH : RH :: SPA : SRA :: $a : a'$ e perciò $E : a :: C : a'$, sarà anche (185) $T : t :: C\ (= \pi$ ($L.$520)) : RSA $= \frac{\pi t}{T} = \text{AR} \times \frac{\text{AC}}{2} + \text{CS} \times \frac{\text{RH}}{2} = \frac{\varphi}{2} + \frac{e\ sen\ \varphi}{2}$, onde $\varphi + e\ sen\ \varphi$, ovvero per l'omogeneità dei termini ($L.$ 522) $\varphi + r^\circ$ e $sen\ \varphi = \frac{t}{T} \times 2\pi = \mu$ (presa e in parti del semiasse trasverso $= 1$), equazione che non può risolversi se non col metodo delle doppie false posizioni. Per altro se facciasi $\varphi = \mu - z$, e per esser sempre z un arco assai piccolo si supponga $r^\circ\ sen\ z = z$, si avrà $er^\circ\ sen\ (\mu - z) = \mu - \varphi = z = er^\circ\ sen\ \mu\ cos\ z - er^\circ \times sen\ z\ cos\ \mu = er^\circ\ sen\ \mu \sqrt{(1 - sen^2 z)} - ez\ cos\ \mu$, cioè ordinando e quadrando, $(z + ez\ cos\ \mu)^2 = e^2 r^{2\circ}\ sen^2 \mu - e^2 r^{2\circ}\ sen^2 \mu\ sen^2 z = e^2 r^{2\circ}\ sen^2 \mu - e^2 z^2\ sen^2 \mu$ ovvero $z^2 + 2e\ z^2\ cos\ \mu + e^2 z^2\ cos^2 \mu = e^2 r^{2\circ}\ sen^2 \mu - e^2 z^2\ sen^2 \mu$, cioè trasportando ($L.$610.9ª.) $z^2 + 2e\ z^2\ cos\ \mu + e^2 z^2 = e^2 r^{2\circ} \times sen^2 \mu$, onde $z^2 = \frac{e^2 r^{2\circ}\ sen^2 \mu}{1 + 2e\ cos\ \mu + e^2}$, cioè . . . .
$z = \frac{er^\circ\ sen\ \mu}{\sqrt{(1 + 2e\ cos\ \mu + e^2)}}$ e infine . . . .

82 $\phi = \mu - z = \mu - \frac{er^\circ sen\,\mu}{\sqrt{(1 + 2e\cos\mu + e^2)}}$ formula che darà con somma approssimazione direttamente il valor di ϕ.

786. Trovato ϕ, saranno note HC $= x = \cos\phi$ ed RH $= sen\,\phi$. Di più per la nota proporzione $k\,(=\sqrt{(1-e^2)})$: $1 :: \text{HP}\,(=y) : \text{HR}$, abbiamo HR $= sen\,\phi = \frac{y}{\sqrt{(1-e^2)}}$; e poichè nel triangolo SPH si ha (*L.* 622. 34ª) $tang\,\frac{1}{2}\,\text{PSH} = tang\,\frac{1}{2}\beta = \frac{\text{SP} - \text{SH}}{\text{PH}}$, SP $= 1 + ex\,(= 1 + e\cos\phi = z)$ ed SH $= e + x$, sostituendo questi valori, troveremo $tang\,\frac{1}{2}\beta = \frac{(1-e)(1-x)}{y}$; nel modo stesso $tang\,\frac{1}{2}\text{RCH} = tang\,\frac{1}{2}\phi = \frac{1-\cos\phi}{sen\,\phi}$ (*L.* 622. 34ª) $= \frac{(1-x)\sqrt{(1-e^2)}}{y}$; dunque $tang\,\frac{1}{2}\phi : tang\,\frac{1}{2}\beta :: \sqrt{(1-e^2)} : 1-e :: \sqrt{[(1-e)(1+e)]} : \sqrt{[(1-e)(1-e)]} :: \sqrt{(1+e)} : \sqrt{(1-e)}$ e perciò finalmente risulterà che *la radice quadra della distanza afelia sta alla radice quadra della distanza perielia come la tangente della semianomalia dell' eccentrico, alla tangente della semianomalìa vera* che si cercava. Frattanto potrà osservarsi 1°. che prendendo le anomalìe dal perielio, come *a*SP si sarebbe trovato $tang\,\frac{1}{2}\phi : tang\,\frac{1}{2}\beta :: \sqrt{(1-e)} : \sqrt{(1+e)}$; 2°. che avendosi nel triangolo SPH (*L.* 642) $z : y :: 1 : sen\,\beta$ e inoltre (come si è trovato poco sopra) essendo $y = sen\,\phi\sqrt{(1-e^2)} = k\,sen\,\phi$, sarà $z : k\,sen\,\phi :: 1 : sen\,\beta$, e quindi $z = \frac{k\,sen\,\phi}{sen\,\beta}$, altra espression del raggio vettore, assai comoda quando son date le anomalìe eccentrica e vera.

787. Intanto poichè può sempre ridursi all' eccentrico l' anomalìa vera, si troverà per qualunque grado di β il tempo t corrispondente, col mezzo dell' equazione $\phi + r^\circ e\,sen\,\phi = \frac{2t\pi}{T}$ (785) che dà $t = \frac{T}{2\pi}(\phi + r^\circ e\,sen\,\phi)$.

788. La differenza tra l' anomalìa vera e la media è ciò che chiamasi *equazion del centro o dell' orbita*. Ora abbiam veduto di sopra (779) che descrivendo col centro S e col raggio SI $= \sqrt{rk}$ un circolo, la velocità vera angolare del Pianeta è eguale alla media nei punti I, I'. È dunque certo che partito il Pianeta da A, per tutto l' arco AI la velocità media supera la vera, e all' op-

posto ne è superata per tutto il rimanente arco Ia; ed è certo inoltre che la somma delle differenze istantanee tra l'una e l'altra si accumulerà da A fino a I, d'onde cominciando la vera a crescere sulla media, le quantità accumulate diminuiranno, e l'equazione dell'orbita impiccolirà anch'essa, finchè in a diventerà zero come era in A. Dunque 1°. *la massima equazione sarà* nei punti I, I' *dove il raggio vettore è medio proporzionale tra i due semiassi dell'orbita*.   82

Essendo pertanto in questo caso $z = \sqrt{rk} = \ldots \frac{k^2}{r - e\cos\beta}$ (782), avremo $e\cos\beta = r - \frac{k^2}{\sqrt{rk}} = r - k\sqrt{\frac{k}{r}}$, cioè $\cos\beta = \frac{r^2 - k\sqrt{rk}}{re}$, d'onde può ricavarsi (*L.* 622. 32ª.) $sen\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\left(\frac{k\sqrt{rk} + re - r^2}{2re}\right)}$; dunque 2°. *l'equazion dell'orbita è additiva dal perielio all'afelio, e sottrattiva dall'afelio al perielio*.

789. Data dunque la situazion dell'afelio e l'*epoca* in cui vi era il Pianeta, e date l'anomalìa media (che sempre è nota) e l'equazione del centro, si conoscerà l'anomalìa vera, e quindi 1°. sommata questa colla longitudine dell'afelio (788) (detratti se occorra 360°) si avrà la longitudine vera o eliocentrica del Pianeta: 2°. e perciò essendo nota la longitudine della ♁ (751), sarà noto (753) anche l'angolo di commutazione T$S\Upsilon = C$: 3°. e inoltre, trovato l'angolo E (754), si avranno pure TΥS, TΥ, SΥ (*L.* 656) ed infine la latitudine geocentrica L o l'eliocentrica L' (753).   80

790. Ove si trovi $L = 0$, sarà anche $L' = 0$, cioè il Pianeta sarà nei *nodi*; e di quì la determinazione di questi punti, sì interessante nel calcolo astronomico; poichè determinata per quell'istante coi metodi già accennati la longitudine eliocentrica del Pianeta, sarà questa stessa la longitudine del ☊ o del ☋ secondochè il Pianeta passa alla parte boreale ovvero all'australe dell'eclittica; finalmente, se egli si osservi allorchè la sua longitudine $\lambda' = ☊ + 90°$, la sua latitudine eliocentrica che si dedurrà dall'osservazione sarà la misura dell'*inclnazion dell'orbita planetaria*.

791. Null'altro resterebbe a determinarsi circa i Pianeti primarj, se tutto conservasse sempre e la dimensione

medesima e la medesima situazione. Ma sebbene gli assi trasversi dell'orbite, i moti medj e le medie distanze dal Sole si sian trovati invariabili, come anche han dimostrato i celebri Signori de la Grange e de la Place, nondimeno l'afelio, i nodi, l'eccentricità e l'asse conjugato cangiano respettivamente luogo e misura, di modo che l'orbita d'un Pianeta non è mai a tutto rigore la stessa; e che se per comodo d'immaginazione voglia supporsi sempre in un piano medesimo, convien figurarselo in una specie di piccola oscillazione rispetto al Cielo e all'eclittica, e figurarsi la curva descritta in un tal piano come soggetta a una specie di contrazione e di dilatamento, benchè assai tenue, mentre la massima delle sue dimensioni resta invariabile.

792. Questi effetti della scambievol tendenza di ogni Pianeta nel ☉ ed in tutti gli altri, se alquanto imbarazzano il calcolo, semplicizzano ed assicurano mirabilmente la fondamental teorìa, con cui le più delicate osservazioni moderne si son trovate in un perfettissimo accordo. In fatti è manifesto che i moti di un Pianeta, quali sarebbero se egli fosse il solo a rivolgersi intorno al ☉, non posson esser gli stessi quando si avvicina ad un altro che egli attrae e da cui è attratto a vicenda. Noi non possiamo senza oltrepassar quei limiti che ci siamo prefissi, entrar nella discussione minuta di questi piccoli effetti; e basterà solamente dar quì un' idea generale delle perturbazioni, e del metodo onde si suole calcolare il moto dei nodi.

793. Sia T la ♄, M un altro Pianeta per es. ♃, C
81 il ☉, e vogliasi la perturbazione prodotta da M in T, cioè la forza che chiameremo Π, tendente ad accrescerne o diminuirne la velocità, e la forza che diremo Φ tendente a cangiare il raggio vettore di T. Supposte per maggior facilità concentriche ed in un piano medesimo le due orbite di M e di T (o sia per la loro piccola inclinazione, o sia per la facilità di ridurre il piano dell'una a quello dell'altra), e supposta immobile l'orbita del corpo attraente M, facciasi $MT = r$, $TC = z$, $MC = z'$ e si chiami m la mole del corpo M. Poichè la forza diretta che M esercita sopra T è $\frac{m}{r^2}$ (764), se essa risolvasi (99) nelle due forze CT, CM e si faccia $r : z ::$

$\frac{m}{r^2} : \frac{mz}{r^3}$; sarà $\frac{mz}{r^3}$ la forza che spinge T verso C nella direzione TC: fatto nel modo stesso $r : z' :: \frac{m}{r^2} : \frac{mz'}{r^3}$, sarà $\frac{mz'}{r^3}$ la forza che trae T verso M nella direzion di CM o piuttosto di TA parallela a CM. Ma poichè l' effetto reale della perturbazione è la differenza delle attrazioni di M e sopra T e sopra C, sarà $\frac{mz'}{r^3} - \frac{m}{z'^2}$ la forza effettiva perturbatrice di T nella direzion di TA; quindi se se n' esprima il valore colla lunghezza della retta TA, e questa forza risolvasi nuovamente in AH e HT, cioè in Tb e TH normali tra loro, supposto noto l' angolo ATH $=$ MCT $= C$(753), si avrà $1 : sen\ C ::$ TA : AH $=$ Tb $=$ $\Pi = \left(\frac{mz'}{r^3} - \frac{m}{z'^2}\right) sen\ C$, *forza acceleratrice della velocità ordinaria di* T supponendo il moto del Pianeta nella direzion di TP, ed M più avanzato di lui in longitudine; poichè è chiaro che essendo il Pianeta attraente in K, Tb diventerebbe Tb' e sarebbe forza *ritardatrice*. Similmente si troverà $1 : cos\ C ::$ TA : TH $= \left(\frac{mz'}{r^3} - \frac{m}{z'^2}\right) cos\ C$, forza tendente ad allotanar T da C lungo il raggio vettore: ma come si è veduto di sopra, il Pianeta stesso M spingeva T verso C con una fosza $= \frac{mz}{r^3}$; dunque *la forza vera* che avvicina T a C o *che cangia il raggio vettore* di T, è $\Phi = \frac{mz}{r^3} - \left(\frac{mz'}{r^3} - \frac{m}{z'^2}\right) cos\ C$.

794. Condotta TL normale a CM, sarà CL $= z \times cos\ C$; e potendosi prendere per la gran distanza, ML $=$ TM, si avrà ML $= r = z' - z\ cos\ C$, onde $\frac{1}{r^3} = (z' - z\ cos\ C)^{-3} = \frac{1}{z'^3} + \frac{3z\ cos\ C}{z'^4}$ (*L*. 161), omessi i termini seguenti come piccolissimi; il qual valore sostituito nell' espressione di Φ, la rende $= \frac{mz - 3mz\ cos^2 C}{z'^3} + \frac{3mz^2\ cos\ C}{z'^4}$, ove supposto z' molto maggior di z, divien trascurabile l' ultimo termine; e fatto $z = 1$ e $C = 0$, si trova infine $\Phi' = -\frac{2m}{z'^3}$, cioè *la forza perturbatrice* agisce allora da

T verso D ed *è in ragione inversa dei cubi delle distanze del corpo perturbatore*.

78 795. Per quel che riguarda il moto dei nodi, sia $Q'eQ$ l' eclittica, $c'eC'$ l' orbita perturbata, ed Hm una parte di quella del Pianeta perturbatore, la cui attrazione fa che $c'eC'$ divenga cEC. Chiamando H, e ed m gli angoli del triangolo Hem, e fatto $e\text{H} = x$, Hm $= y$, avremo (L. 721) $\frac{\cot m}{\cos y} = \tan \varphi$, e $\cot x = \ldots\ldots$ $\frac{\cot y \cos(\text{H} \backsim \varphi)}{\cos \varphi}$; e sciogliendo $\cos(\text{H} \backsim \varphi)$ (L. 615. 13ª.), sostituendo il valor di $\tan \varphi$ e riducendo, si otterrà $\tan x = \frac{\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} \text{H} \cot m + \cos \text{H} \cos y}$; ora, poichè l'angolo H è costante (considerandosi come immobile l'orbita Hm) e posson trascurarsi le variazioni di e e di m, avremo differenziando, prese costanti m ed H, $\frac{dx \operatorname{sen} \text{H} \cot m}{\cos^2 x} + \ldots\ldots$ $\frac{dx \cos \text{H} \cos y}{\cos^2 x} - dy \operatorname{sen} y \cos \text{H} \tan x = dy \cos y$, cioè moltiplicando tutto per $\cos^2 x$, ponendo in vece di $\cot m$ il suo valore (trovato colla stessa regola di sopra) . . . $\frac{\operatorname{sen} y \cot x - \cos y \cos \text{H}}{\operatorname{sen} \text{H}}$ (L. 715), riducendo e dividendo tutto per $\operatorname{sen} y \cot x$, $dx = dy\,(\cot y \operatorname{sen} x \cos x + \cos \text{H} \times \operatorname{sen}^2 x)$; che sostituendovi il valor di $\cot y = \ldots\ldots$ $\frac{\operatorname{sen} \text{H} \cot e + \cos \text{H} \cos x}{\operatorname{sen} x}$ (L. 721), sarà $dx = dy\,(\cos \text{H} + \operatorname{sen} \text{H} \cos x \cot e)$, onde infine $dy : dx$ (cioè mM : eE) :: $1 : \cos \text{H} + \operatorname{sen} \text{H} \cos x \cot e$, ove x è la distanza dei nodi delle due orbite sull' eclittica, e l'inclinazione dell'orbita perturbata, ed H il supplemento dell' inclinazione di quella del Pianeta perturbatore.

796. Più importante è il conoscere il moto orario di un Astro in longitudine e in latitudine. Quanto al primo di questi moti, poichè nel tempo di un'ora può considerarsi uniforme l' aumento dell' anomalìa vera, sarà $d\beta$ il moto richiesto, mentre $d\mu$ è l' aumento sempre conosciuto dell' anomalìa media: quindi si avrà (784) $d\beta$ $= d\mu \frac{(1 - e \cos \beta)^2}{\sqrt{(1 - e^2)^3}}$. Ma per ridurre, come è necessario, questo moto al piano dell' eclittica $q'\,e\,q$, sia $C'eC$ l' or-

FIG. 75

bita del Pianeta, $KC = d\beta$, $Ceq = O$ (obliquità dell'orbita), PKh e PCq due archi di latitudine, e finalmente $Kh = L$ latitudine eliocentrica del Pianeta: e poichè il triangolo Keh è rettangolo in h, facendo $eK = \beta'$, $eh = \mu'$, $Cq = L'$, avremo (L. 702) $tang\ \mu' = tang\ \beta' \cos O$; differenziando pertanto, serbata costante O, troverassi $\frac{d\mu'}{\cos^2 \mu'} = \frac{d\beta' \cos O}{\cos^2 \beta'}$, e $d\mu' = d\beta' \cos O \times \frac{\cos^2 \mu'}{\cos^2 \beta'} = \frac{d\beta' \cos O}{\cos^2 L}$ (L. 697); ovvero, perchè in questo caso $d\beta'$ è il medesimo che $d\beta$, $d\mu' = \frac{d\beta \cos O}{\cos^2 L}$.

797. Per avere il moto orario in latitudine, poste le stesse cose, si trova (L. 698) $sen\ O = \frac{sen\ L}{sen\ \beta'}$ e differenziando colla solita costante O, ... $\frac{dL \cos L\ sen\ \beta' - d\beta' sen\ L \cos \beta'}{sen^2 \beta'} = 0 = dL \cos L\ sen\ \beta' - d\beta' sen\ L \cos \beta'$ e di qui $dL = d\beta'\ tang\ L \cot \beta'$ cioè, per esser β' eguale alla differenza tra la longitudine λ del Pianeta, e la longitudine $\lambda☊$, $dL = d\beta\ tang\ L \cot (\lambda - \lambda☊)$.

798. Cerchiamo ora finalmente il medio rapporto tra i tempi sinodico e periodici (760) di due Pianeti qualunque T e μ. Prese al solito come circolari e concentriche le due loro orbite $r\mu a$, ETC, e chiamando t il tempo periodico del Pianeta più lento T, e τ quello del più veloce μ, suppongansi occorse due congiunzioni consecutive in ErS ed in $T\mu S$. È chiaro che mentre il Pianeta maggiore si avanzò da E in T, il minore scorse non solamente l'orbita intera $r\mu bdr$, ma anche l'arco $r\mu$ nel tempo sinodico s, e che perciò il tempo speso per il solo spazio $r\mu$ fu $s - \tau$. Quindi chiamandosi A, a l'aree simili EST, $rS\mu$, e C, c l'aree intere dell'orbite corrispondenti, si avrà $A : C :: s : t$ ed $a : c :: s - \tau : \tau$; ma $A : a :: C : c$; dunque $s : s - \tau :: t : \tau$ ed $s = \frac{t\tau}{t - \tau}$. Lo stesso si troverebbe, restando immobile il punto T, e movendosi S accompagnato da un Satellite μ, posto t il tempo periodico di S d'intorno a T.

80

Comete

799. Benchè le Comete altro non siano che Pianeti primarj (611. 750) i quali girano al par degli altri in

orbite ellittiche, il cui comun fuoco è nel Sole: contuttociò la general teorìa fin quì data non è applicabile ad esse senza notabili modificazioni, e perchè i lor movimenti nulla hanno di quella regolarità e direzione quasi uniforme che scorgesi in tutti gli altri, e perchè restando invisibile la porzion più grande delle loro orbite, non può conoscersene nè l'afelio, nè l'eccentricità, nè ciò che dipende da questi due elementi.

800. Le strane opinioni che tiranneggiarono anticamente non tanto il volgo quanto la maggior parte dei Filosofi stessi, appoggiate sull'apparente irregolarità del moto, della figura e della durata visibile di questi corpi celesti, tennero indietro i progressi dell'Astronomia intorno a una parte del Sistema Planetario che pure è la maggiore. E quantunque alcuni riconoscessero in ogni tempo che le Comete dovevan esser della natura medesima degli altri Pianeti e al par di loro soggette alle stesse forze e tendenze; contuttociò le trascurarono a segno che non abbiamo sopra di esse alcuna osservazione bastantemente determinata che preceda l'anno 837. Quindi benchè ci dia la Storia circa 500 apparizioni di Comete e vi sia tragli Astronomi i più moderni ed accreditati, chi ne ammette con sicurezza 300 almeno, e chi ne suppone delle migliaja; pure le assoggettate al calcolo fino al presente sono assai poche, nè di queste (eccettuate forse tre sole) è fissato ancora bene il periodo. Il loro disco ordinariamente apparisce mal terminato, o per le fasi cui son soggette, come la Cometa del 1744, o per la lor luce debole assai se son nude, o per l'inviluppo di una materia accesa che le accompagna detta *chioma* se le circonda, *barba* se le precede e *coda* se le segue, che dirigesi sempre nella parte opposta al Sole e che molti attribuiscono all'atmosfera delle Comete medesime, la quale dai raggi solari è urtata, rarefatta, e trasportata dietro al loro disco, senza che il loro piccolo cono ombroso possa distinguersi o per la gran vicinanza e grandezza del Sole (471), o per il riverbero dell'altre parti luminose che lo distruggono. Noi non ci estenderemo in dettagli su questa o sull'altre fisiche ipotesi, ed osserveremo 1°. che l'incertezza del luogo e del tempo della loro comparsa, la facilità di sparire, il moto talvol-

ta

ta precipitoso che hanno ec. rendon più difficili le osservazioni e più bisognose di accuratezza; 2°. che quantunque scorrano per ellissi, l'enormi loro eccentricità (771) ci antorizzano a prender queste trajettorie come parabole (*L.* 745).

801. Suppongasi dunque FaG un arco parabolico, porzion del corso di una Cometa, S il fuoco o il ☉, a il vertice, $Sa = r = 1 = \frac{1}{4}p$ (*L.* 746) la sua distanza perielia, ed $SF = \frac{1}{2}p$ (*L.* 746) l'ordinata in S. Descritto col raggio Sa il circolo LaR e preso in esso l'arco $aa' = \alpha$ infinitesimo, sarà l'area del piccolo settor circolare $aSa' = \frac{1}{2}\alpha$ (*L.* 518), quella dell'intero circolo $= \pi$ (*L.* 520) e il settor parabolico rettangolare $aSF = \frac{2}{3}Sa \times SF = \frac{4}{3}$ (*L.* 947). Chiamando ora x l'area parabolica descritta dalla Cometa in quel brevissimo tempo τ in cui descriverebbe la circolare aSa', queste due piccole aree saran tra loro come i due archi che le chiudono, e questi come le celerità respettive cioè $:: \sqrt{2} : 1$ (778), e perciò $1 : \sqrt{2} :: \frac{\alpha}{2} : x = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$. Posto ciò, sia T il tempo necessario alla Cometa per giungere a 90° d'anomalìa (che quì dee prendersi dal perielio (760. 799)), e T' il tempo periodico necessario a scorrere il circolo LaR, si avrà $\pi : \frac{\alpha}{2} :: T' : \tau = \frac{\alpha T'}{2\pi}$, e quindi $\tau \left(= \frac{\alpha T'}{2\pi}\right) : T :: \frac{\alpha}{\sqrt{2}} : \frac{4}{3}$ onde $T = \frac{4T'\sqrt{2}}{6\pi} = \frac{4T'}{3\pi\sqrt{2}}$. Presa la distanza perielia $= r' = \frac{p'}{4}$ e chiamando Θ il tempo dei 90° di anomalìa, Θ' il tempo periodico dovuto al circolo dello stesso raggio r', si ha egualmente $\Theta = \frac{4\Theta'}{3\pi\sqrt{2}}$ e di quì $T : \Theta :: T' : \Theta' :: r^{\frac{3}{2}} : r'^{\frac{3}{2}} :: p^{\frac{3}{2}} : p'^{\frac{3}{2}}$ (203). Fatto dunque $T' = 365^g,256379$ = al tempo periodico della Terra (622), $\pi = 3,141593$ (*L.* 520), si avrà $T = 109^g,6154 = 109^g, 14^{or}, 46', 10''$, cioè una Cometa la cui distanza perielia eguagliasse il raggio medio dell'orbita della ♁, giungerebbe a 90° d'anomalìa dopo questo tempo.

83

802. Determinato T, si ha facilmente il tempo che impiegherà la Cometa nel giunger dal perielio a qualunque altro punto γ cioè nel descriver qualsivoglia ango-

83 lo d'anomalìa $aS\gamma = \beta = aS\gamma'$. Conducansi la normale γK e l'ordinata $\gamma\lambda$; e poichè posta al solito $= x$ l'ascissa $a\lambda$, si ha $\lambda K = \frac{p}{2}$ (L. 751) $= 2aS$ (L. 746), ed SK $= \frac{p}{2} - \lambda S = \frac{p}{2} - (\frac{p}{4} - x) = \frac{p}{4} + x = S\gamma$ (L. 749) $= z$, onde $aS\gamma = \beta = SK\gamma + S\gamma K = 2SK\gamma$, chiamando t la tangente di $SK\gamma$ metà dell'anomalìa vera, si avrà nel triangolo $K\lambda\gamma$, $1 : t :: \frac{p}{2} : \lambda\gamma = \frac{pt}{2}$, e $\frac{p}{2} : \lambda\gamma :: \lambda\gamma : 2x$ suttangente di γ (L. 751): dunque $x = \frac{pt^2}{4}$, e l'area $aS\gamma$ $= \frac{2}{3} a\lambda \times \lambda\gamma + \frac{1}{2} \lambda\gamma \times \lambda S = \frac{ptx}{12} + \frac{p^2 t}{16} = \frac{p^2 t^3}{48} + \frac{p^2 t}{16}$ ovvero (poichè $\frac{p}{4} = r = 1$ (800) e $p = 4$) $= \frac{t^3 + 3t}{3}$. Chiamisi perciò T'' il tempo cercato per ogni grado d'anomalìa, e facciasi $T = \frac{4T'}{3\pi\sqrt{2}} = 1$; e giacchè l'area rettangolare $aSF = \frac{4}{3}$ (800), si avrà $\frac{4}{3} : \frac{t^3 + 3t}{3} :: T(1) : T'' = \frac{(t^3 + 3t)}{4} T = \frac{(t^3 + 3t)\, T'}{3\pi\sqrt{2}}$, cioè (per esser $\frac{T}{4} = \ldots\ldots$ $27^s, 40385$), $T'' = (t^3 + 3t)\, 27, 40385$.

803. Che sè all'opposto si voglia l'angolo dell'anomalìa per un dato tempo T'', fatto $\frac{4T''}{T} (= \frac{4T''}{109,6}) = q$, avremo $t^3 + 3t - q = 0$ e quindi (L. 337) $t = \sqrt[3]{[\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q^2}{4} + 1)}]} + \sqrt[3]{[\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q^2}{4} + 1)}]} = \sqrt[3]{[\frac{q}{2} + \ldots}$ $\frac{q}{2} \sqrt{(1 + \frac{4}{q^2})}] + \sqrt[3]{[\frac{q}{2} - \frac{q}{2}\sqrt{(1 + \frac{4}{q^2})}]}$. Facciasi dunque $\frac{q}{2} = \cot u$, e riflettendo che $1 + \tang^2 u = \sec^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}$, avremo $t = \sqrt[3]{(\cot u + \cot u \times \frac{1}{\cos^2 u})} + \sqrt[3]{(\cot u - \cot u \times \frac{1}{\cos u})} = \sqrt[3]{\frac{1 + \cos u}{\sen u}} - \sqrt[3]{\frac{1 - \cos u}{\sen u}} =$ (L. 622. 34°) $\sqrt[3]{\cot \frac{1}{2} u} - \sqrt[3]{\tang \frac{1}{2} u}$; indi fatto $\sqrt[3]{\tang \frac{1}{2} u} = \tang \omega$,

sarà $t = \cot \omega - \tang \omega = \frac{\cos^2 \omega - \sen^2 \omega}{\sen \omega \cos \omega} = \frac{1 - 2 \sen^2 \omega}{\frac{1}{2} \sen 2\omega}$
$= \frac{2 \cos 2\omega}{\sen 2\omega} = 2 \cot 2\omega$.

804. Intanto poichè essendo data la distanza perielià $\frac{p}{4}$, è dato subito per qualunque grado β di anomalìa il raggio vettore $z = \frac{\frac{1}{4} p}{\cos^2 \frac{1}{2}\beta}$ (*L.* 751); e poichè descritta col fuoco stesso qualsivoglia altra parabola $A''\Gamma$ il cui parametro sia p' e il raggio vettore ξ, si ha $z : \xi :: p : p'$ (L. 751) e l'aree $aS\gamma$ $(= \beta)$ ed $A''S\Gamma$ $(= \beta')$ comprese dagli stessi raggi sono $:: \frac{t^3 + 3t}{3} \times \frac{p^2}{16} : \frac{t^3 + 3t}{3} \times \frac{p'^2}{16}$ (802) $::$ $p^2 : p'^2$; ne segue che chiamando T'', Θ'' i tempi corrispondenti alla medesima anomalìa in due trajettorie paraboliche, avremo $T'' : \Theta'' :: \frac{\beta}{\sqrt{p}} : \frac{\beta'}{\sqrt{p'}}$ (775. 3°) $:: p^{\frac{3}{2}} : p'^{\frac{3}{2}} :: T : \Theta$ (801), cioè (fatto $p' = 4r$ ed essendo $p = 4r = 4$(801))$::$ $1 : r^{\frac{3}{2}}$, d'onde $T'' = \frac{\Theta''}{\sqrt{r^3}}$.   83

805. Quindi calcolati i tempi e l'anomalìe d'una sola Cometa come quella di 109 giorni (801), questo calcolo sarà una *Tavola generale del moto delle Comete* in una trajettoria parabolica, sol che si conosca la lor distanza dal ☉ nel perielio e l'istante del loro passaggio per questo punto.

806. Suppongansi ora noti due raggi vettori $S\gamma = z$, $SE = z'$ e l'angolo $\gamma SE = \varphi = \beta' \mp \beta$, preso il segno di sopra se i raggi siano dalla stessa parte dell'asse, e quel di sotto se da parti opposte. Avremo (802) $\sqrt{z} : \sqrt{z'} :: \cos \frac{\beta'}{2} : \cos \frac{\beta}{2} :: \cos\left(\frac{\varphi}{2} \pm \frac{\beta}{2}\right) : \cos \frac{\beta}{2} :: \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\beta}{2}$ $\mp \sen \frac{\varphi}{2} \sen \frac{\beta}{2} : \cos \frac{\beta}{2}$, onde $\cos \frac{\beta}{2} \times \sqrt{\frac{z}{z'}} = \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\beta}{2}$ $\mp \sen \frac{\varphi}{2} \sen \frac{\beta}{2}$; e dividendo per $\sen \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\beta}{2}$, verrà $\tang \frac{\beta}{2} = \pm \cot \frac{\varphi}{2} \mp \cosec \frac{\varphi}{2} \sqrt{\frac{z}{z'}}$ (*L.* 610) il che dà *il luogo del perielio*.

807. Quadrando quest' equazione e moltiplicandola

per $z' \, sen^2 \frac{\varphi}{2} cos^2 \frac{\beta}{2}$, sostituendo $1 - cos^2 \frac{\beta}{2}$ a $sen^2 \frac{\beta}{2}$ e riducendo, si ha $z' \, sen^2 \frac{\varphi}{2} = (z' + z - 2 \, cos \frac{\varphi}{2} \sqrt{z'z}) \, cos^2 \frac{\beta}{2}$, cioè $z'z \, sen^2 \frac{\varphi}{2} = (z' + z - 2 \, cos \frac{\varphi}{2} \sqrt{z'z}) \, z \, cos^2 \frac{\beta}{2}$, e infine $z \, cos^2 \frac{\beta}{2} = \frac{1}{4} p \, (804) = \frac{z'z \, sen^2 \frac{\varphi}{2}}{z' + z - 2 \, cos \frac{\varphi}{2} \sqrt{z'z}}$, *distanza perielia della Cometa*.

Ripresa la proporzione di sopra (806) avremo anche $\sqrt{z} + \sqrt{z'} : \sqrt{z} \backsim \sqrt{z'} :: cos \frac{1}{2} \beta' + cos \frac{1}{2} \beta : cos \frac{1}{2} \beta' \backsim cos \frac{1}{2} \beta :: cot \frac{1}{4} (\beta' + \beta) : tang \frac{1}{4} (\beta' \backsim \beta)$ (*L.* 623. 38ª).

808. Segue da ciò che per determinar l'orbita di una Cometa è necessario conoscerne almen due raggi vettori e l'angolo che contengono. Ma l'ottener direttamente questi valori non è sì facile; e benchè gli Astronomi più celebri abbiano inventati parecchi metodi ingegnosissimi e di profonde vedute, tale è per altro o la loro prolissità, o la loro complicazione, o gli equivoci a cui possono soggiacere, o finalmente la difficoltà delle osservazioni necessarie e spesso quasi ineseguibili, che lasciando loro tutti gl'incomodi del semplice tentativo, obbligano a calcoli tediosissimi e non di rado ancora d'un esito molto incerto. Quindi il più comune di tutti è il metodo delle false posizioni. Sia ♈ ♋ ♎ ♑ l'eclittica; S il ☉; ed essendosi successivamente osservato l'Astro mentre la ♁ era nei punti T, T′, T″ (di cui sian noti i raggi vettori r, r', r''), suppongansi Γ, Γ′, Γ″ le projezioni della Cometa sull'eclittica (755). Condotte SΓ e TΓ, che al solito chiameremo R e D (754), e presi coll'osservazione l'angolo ΓTS $= E$ e quello della latitudine geocentrica L, diasi un valore arbitrario ad R e quindi se ne deduca D (*L.* 652) e si determini anche (*L.* 655) l'angolo parallattico TΓS e l'angolo di commutazione TSΓ $= C$; quindi si avranno la longitudine vera λ' (753), la latitudine eliocentrica L' (754) e il raggio vettore z cioè SG (*fig.* 80) $= \frac{S\Gamma}{cos \, \Gamma SG} = \frac{R}{cos \, L'}$. Trovati i valori omologhi relativamente a Γ′ e T′, si avran di nuovo la longitudine e latitudine eliocentriche, il rag-

84

gio vettore z' e la differenza Λ delle longitudini, che è il moto eliocentrico della Cometa relativamente all'eclittica, nel tempo scorso tralle prime due osservazioni.

809. Con questi dati, sia Π' il polo dell'ellittica cGC, sia $GC = \Lambda$, e siano Gb, CO le due latitudini eliocentriche L', L''. Se nel triangolo $bO\Pi'$ ove son noti i due lati $\Pi'b$, ΠO complementi di L', L'' e l'angolo contenuto $b\Pi'O = GC = \Lambda$ si determini bO (*L.* 714), sarà $bO = \phi$ il moto angolare della Cometa nella sua orbita: e quindi avendosi z, z' e ϕ, si avranno e l'anomalìe respettive e la distanza perielia (807) ed oltre a ciò coll'applicazion della Tavola generale delle Comete (805) i tempi corrispondenti alle trovate anomalìe, la differenza dei quali dee corrispondere esattamente all'intervallo decorso tralle due osservazioni: non corrispondendo, dovran cangiarsi le posizioni, finchè la corrispondenza si ottenga. Ma poichè due punti posson esser comuni a molte parabole, e niuna può determinarsi esattamente se non con tre, convien procedere ad altre supposizioni per combinar colle prime l'osservazione in Γ'' (*fig.* 84) ed ottenendosi finalmente tempi corrispondenti precisamente a quelli delle tre osservazioni, la trajettoria sarà esattamente determinata. Per rendere il metodo più compendioso, e per immaginar posizioni più idonee, gli Astronomi hanno inventati dei compensi meccanici molto utili, su cui non occorre quì trattenerci.

78

810. Ottenuto infine dal triangolo $bO\Pi'$ l'angolo $b = a'$, saranno noti nel triangolo bGN rettangolo in G il lato $bG = L = g$, e l'angolo obliquo adjacente a', e quindi si avrà il lato $Nb = h$ (*L.* 708), l'angolo $N = a$ (*L.* 709) e il lato $NG = g$ (*L.* 710), cioè si avrà la distanza della Cometa dal ☊, l'inclinazion dell'orbita, e la posizione del ☊ sopra l'eclittica.

811. Sapendosi per altro (800) che l'orbita parabolica non è rigorosamente quella delle Comete, si comprende bene che questi elementi son puramente approssimazioni più o meno esatte. Ora ad onta degli sforzi di molti Astronomi illustri per trovare un metodo certo onde ricavar da questi quelli della vera orbita ellittica, bisogna confessare che ne siam privi tuttora e che non rimane altro sicuro compenso se non quello di confrontar le Comete nuove colle già calcolate. Se la situazione del

perielio e dei nodi di due di esse non differisca molto più di quello che porti la retrocessione del 0° di ♈ (622) ec. nell' intervallo del tempo scorso tra l' una e l' altra comparsa, e altronde non abbian segni notabili di dissomiglianza, potrà supporsi con molta probabilità che sieno una sola Cometa. Ma se la detta differenza ecceda i tre o quattro gradi (giacchè un' alterazione mediocre potrebbe attribuirsi alle perturbazioni sofferte per le attrazioni dei Pianeti a cui le Comete si accostano) non potran mai le due Comete credersi una sola, tanto più che si sa potersene veder varie nel tempo medesimo e nella medesima parte del Cielo. Che se si giunga alfine a conoscer con sicurezza il ritorno di una Cometa e perciò il suo tempo periodico t, chiamando T il tempo periodico della Terra, $A = 1$ il maggior diametro dell' eclittica, a quello dell' orbita ricercata, si avrà subito (763) $T^2 : t^2 ::$ $1 : a^3$ ed $a = \frac{t^{\frac{2}{3}}}{T^{\frac{2}{3}}}$, quindi per esser già nota almeno prossimamente la distanza perielia, si troverà l' eccentricità e ogni altro elemento della vera trajettoria come per i Pianeti già conosciuti.

812. Le Comete di cui si trovano gli elementi nell' insigne Opera di Pingré, sono 76, prendendo come distinte tra loro anche quelle che per esser credute *identiche* e di ritorno, portano nella nota lo stesso numero (e sono la 3ª la 7ª e la 9ª), ed annoverandovi la Cometa del 1783 e le due del 1784 ivi annunziate nell' appendice. Il celebre Olbers ne ha esteso il catalogo fino a 97, che può vedersi nella *Biblioteca Britannica* al mese di Maggio 1808.

Satelliti.

813. La Teorìa dei Satelliti non differirebbe da quella di tutti gli altri Pianeti, se questi corpi mentre girano intorno a un centro particolare, non obbedissero nello stesso tempo ad altre forze considerabili. Ma senza contare la loro azione reciproca, tendendo essi e nel loro Pianeta primario e nel Sole insieme (750), l' uno per l' enorme sua vicinanza, l' altro per l' enorme sua mole (765) agiscon potentemente sopra il Satellite, e inducono una complicazione di moti ed una irregolarità che

rende la teorìa dei Satelliti una parte delle più difficili dell' Astronomìa. Che se queste irregolarità non son così sensibili in quei di ♃ o di ♄ per la gran lontananza, lo sono però tanto nella ☽, che non siam giunti finora ad averne una teorìa sì completa e sicura come la ricercano da tanto tempo gli Osservatori. Perciò in un articolo che ad onta di quanto ci siam proposti ci condurrebbe in un' infinità di dettagli, ci limiteremo alle principali e più necessarie nozioni, rimettendoci nel di più alle grandi Opere di Astronomìa degli Autori da noi altrove citati. E siccome tutto quel che può dirsi dei Satelliti d' un Pianeta diverso dalla Terra, può facilmente applicarsi ai Satelliti di qualunque altro, parleremo quì solamente di quei di ♃ e tratteremo dipoi a parte di quel della ♁ cioè della ☽.

814. Debbasi dunque primieramente determinare il tempo periodico τ di un Satellite f, supposto già noto quello di Giove cioè t. Osservata una quantità sufficiente di congiunzioni o superiori o inferiori di f con ♃ allorchè questo è in opposizione col ☉, cioè allorchè i centri del ☉, della ♁ (che suppongo in e), di f e di ♃ si corrispondono in una medesima direzione o piano come in S, c, Γ, Gf, S, se ne deduca il tempo sinodico s che tanto sarà più esatto quanto le osservazioni, oltre l' esser precise, sono in maggior numero e più lontane l' une dall' altre per distrugger le piccole ineguaglianze. Fatto ciò, la formula già proposta (798) darà il tempo richiesto $\tau = \frac{ts}{t+s}$. 80

815. Ma poichè i Satelliti attesa la piccolissima obliquità delle loro orbite, e la lunghezza del cono ombroso di ♃, frequentemente si ecclissano, e il momento della metà delle loro ecclissi non differisce sensibilmente da quello della lor vera opposizione col ☉ (tale è in fatti rispetto a ♃ una congiunzion superiore), l' osservazioni di queste ecclissi riescon di maggior comodo e utilità, essendo visibili poco men che da tutti i punti dell' orbita terrestre, ed applicandosi a varj usi astronomici e geografici di gran vantaggio. Avvertiamo quì intanto che questi Astri secondarj comunemente distinguonsi per il posto che occupano relativamente al Pianeta: onde chiamasi *primo* Satellite il più vicino, *secondo* il più pros-

simo dopo lui, ec. se non che tra quei di ♄ essendo il 6° ed il 7° gli ultimi scoperti e insieme i meno lontani, molti Astronomi chiaman *settimo* il men discosto da ♄, *sesto* il seguente, e *primo*, *secondo* ec. gli altri cinque nel loro ordine antico.

816. Tutte le osservazioni assicurano che l'orbite dei Satelliti di ♃ non hanno eccentricità sensibile, eccettuatane quella del terzo; e che in questa ancora l'eccentricità è assai piccola e per lo più trascurabile. Quindi se si misuri la distanza di ognun di essi da ♃ allorchè ne appariscono più discosti, o come suol dirsi nella massima *digressione*, questa distanza ridotta in raggi di ♃ sarà il loro *raggio vettore*. Così supposto il semidiametro di ♃ nelle sue medie distanze dalla ♁ $= 18'', 625$ e trovata la massima digressione del primo Satellite $= 1'46'' = 106''$, sarà il raggio vettore $= 5, 67$ semidiametri di ♃; e poichè il raggio di ♃ è circa 11 volte maggior del terrestre, sarà discosto il Satellite dal suo Pianeta circa 62 raggi terrestri.

817. Intanto paragonandosi tra di loro i tempi, i raggi vettori, e le celerità, si è trovato precisamente che nei Satelliti intorno al loro Pianeta, egualmente che nei Pianeti d'intorno al Sole, l'aree percorse son proporzionali ai tempi, e i quadrati dei tempi periodici son proporzionali ai cubi delle medie distanze dal loro centro comune.

818. Come però la scambievol gravitazione induce delle perturbazioni tra i Pianeti primarj (791), così ne induce tra i Satelliti: anzi queste divengono talora tanto più numerose e complicate, quanto che alle vicendevoli alterazioni cagionate dagli uni negli altri, si uniscon anche le ineguaglianze dei movimenti del Pianeta primario, e le irregolarità cui lo assoggetta l'azion degli altri Pianeti in lui, e di lui reciprocamente negli altri. Quindi è che l'ecclissi d'uno stesso Satellite non ritornano esattamente dopo il preciso decorso di uno o più tempi sinodici, e perciò si rendono indispensabili alcune *equazioni* che ne compensino gli errori. Ne indicheremo una sola, come la più considerabile, e che dipende

80 dall'equazion del centro di ♃. Si osservi dunque che mentre egli si muove da G in *g*, il suo cono ombroso

dovendo

dovendo esser costantemente in linea retta col ☉, deve descriver dietro al Pianeta e rispetto a lui un' anomalìa simile a quella che egli descrive nella sua orbita; e che perciò quanto sarà irregolare il suo moto progressivo, tanto irregolare sarà la misura del tempo in cui il Satellite p raggiungerà l' ombra. Ora questa ineguaglianza è corretta dall' equazion del centro di ♃: e quindi se questa si chiami e, e sia s il tempo sinodico medio, sarà $360°:s::e:\frac{es}{360°}$ correzione cercata, che unita ad s darà il tempo sinodico assai più prossimo al vero. La massima equazion del centro di ♃ che è $5°34'1''$ dà la massima equazion del tempo sinodico che diremo k, e si troverà nella tavola degli elementi della teorìa dei Satelliti di ♃ la quale aggiungeremo quì sotto.

819. Il raggio di ♃ è 10,86 volte maggiore di quel della ♁, e inoltre egli è 5,2 volte più distante di lei del ☉, il quale come vedemmo (766) ne è lontano 23984 raggi terrestri. La distanza dunque di ♃ dal ☉ in raggi di ♃ sarà $d=\frac{23984\times5,2}{10,86}=11484$ in circa; e poichè il calcolo delle parallassi e le Tavole danno il raggio l del ☉ al raggio t di ♃ :: 111,45 : 10,86 :: 10,26 : 1, sarà la lunghezza del cono ombroso di ♃ $=\frac{dt}{l-t}$ (471) $=1240$ raggi di ♃. Di quì può aversi non solo la sezion del cono nella regione di ciascun Satellite, ma anche le misure così lineari come angolari del diametro o delle corde della sezione medesima. Così è facile il dimostrare che alla distanza r da ♃ il semidiametro della sezione ombrosa deve essere $x=\frac{dt-r(l-t)}{d}$, ove poste le stesse cose e fatto $r=25,436$, si avrebbe $x=0,979$ ec. Per altro, riguardo al tempo τ' occorrente per attraversare il semidiametro x, attesa la penombra e la sensibile ampiezza del disco dei Satelliti, il calcolo ci darebbe più di quello che realmente dee comparire all' osservazione; e quindi a questa principalmente si è avuto ricorso per determinare il tempo τ' speso per x, cioè la *semidurata di un' ecclisse massima*, quale appunto si troverà nella Tavola promessa,

deducendosi poi da τ' ogni altra durata di qualunque ecclisse, come vedremo

85 820. Suppongasi ora S il ☉, G Giove, $n\Sigma hr$ l'orbita del Satellite Σ, $n\sigma ho$ la projezion di quest' orbita su quella di ♃ (755), ed SN la linea de' nodi, cioè quella retta in cui essendo il Pianeta, i nodi dell'orbita del Satellite sono in dirittura col Pianeta e col ☉. E' certo che quest' orbita trasportata insieme con ♃, mantiene un parallelismo costante (non avendo i nodi dei Satelliti di ♃ quasi alcun moto relativamente alle fisse), e che perciò il Satellite non può essere in opposizione col ☉ se non allorchè la sua distanza dal nodo n, cioè $nG\Sigma$ eguaglia l'angolo NSG, cioè la distanza di ♃ dalla linea dei nodi SN. Dunque 1°. l'opposizioni che accadono allorchè ♃ è a 90° di distanza da SN, come in G, saranno alla distanza $n\Sigma = 90°$ e misureranno l'inclinazione $\Sigma n\sigma$ dell'orbita; 2°. qualunque sia il punto Σ dell'orbita, se si chiami i l'angolo $\Sigma n\sigma$, e λ l'arco $n\sigma$, sarà nel triangolo $\sigma n\Sigma$ rettangolo in Σ, $sen\ \Sigma\sigma = sen\ i\ sen\ \lambda$ (L. 700) $= \Sigma\sigma$, e $\Sigma\sigma$ può dirsi con somma approssimazione la latitudine Iovicentrica di Σ, che applicata alla sezione del cono ombroso, farà conoscer, come vedremo, se debba e in qual modo debba accader l'ecclisse; 3°. e poichè la massima ecclisse accade quando il Satellite attraversa il diametro della sezione ombrosa, cioè quando è nei nodi precisamente, questa non potrà accadere se non sulla retta SN; 4°. tra la vera opposizione o congiunzion del Satellite rispetto a ♃, e la sua congiunzion superiore o inferiore rispetto alla ♁ che suppongo in N (immaginando N, G, D in linea retta) passerà la differenza corrispondente all'arco ΣD, cioè all'angolo parallattico SGN di ♃ (753); 5°. e perciò non di rado l'ecclisse accaderà ora quando il Satellite ha già oltrepassato il *disco* di ♃ (come in t (Fig. 80), posta la ♁ in C), ora prima di raggiungerlo, ed anche più spesso in tale ottica obliquità, che se ne scorga l'*immersione* soltanto e non l'*emersione*, o questa e non quella, e quindi convenga paragonar molte volte l'immersione in un' ecclisse coll' emersione da un' altra ecclisse diversa per dedurne i medj movimenti ec.

821. Per trovar la durata d' un ecclisse, sia BN il piano dell' orbita di ♃, BMD la semisezione dell' ombra il cui raggio $CD = x$, No l' orbita del Satellite, N il suo ☊, r il suo raggio vettore espresso in raggi di ♃, i l' inclinazione ANC, λ la distanza di ♃ dalla linea dei nodi, ovvero l' arco NC (820), e quindi CA normale ad $No = sen\, i\, sen\, \lambda$ (820). Poichè r ed x son quantità omogenee espresse in parti del raggio di ♃ $= 1$ (819), si dirà 1°. $r : x :: r^{\circ} : x^{\circ}$ (*L.* 522) :: $206265''$: $206265'' \times x = g$; 2°. movendosi con ♃ il suo cono ombroso nel tempo stesso che lo attraversa il Satellite, ed aumentandosi perciò di una quantità n la durata dell' ecclisse colla medesima proporzione con cui si aumenta il tempo sinodico s sul periodico τ, o che è lo stesso, l' arco descritto nel tempo $s - \tau$ rispetto ai 360°, è facile dimostrare che $s - \tau : n :: 360^{\circ} : x$; e perciò 360° $(= 1296000'') : s :: r^{\circ}$ $(= 206265'') : y$ tempo impiegato dal Satellite a scorrere un arco eguale al raggio r; 3°. $1 : CA\ (= sen\, i\, sen\, \lambda) :: y : y\ sen\, i\, sen\, \lambda$, espressione dell' arco CA in secondi di tempo; 4°. chiamando τ' la semidurata d' un' ecclisse massima (819) dedotta dall' osservazione, sarà $\tau' : y\ sen\, i\, sen\, \lambda :: Cu : CA :: 1 : cos\, uCA$, e chiamando C l' angolo uCA, si avrà finalmente 5°. $1 : sen\, C :: \tau' : \tau''$, semidurata dell' ecclisse del Satellite per nX; e si sa che il moto attribuito al Satellite è sempre la differenza dei moti suo e di ♃, considerato quì come immobile (759).

822. Benchè però e coll' accuratezza di questi metodi e colle ripetute correzioni sembrasse perfezionata la Teorìa dei Satelliti di ♃ e determinato il ritorno delle loro ecclissi; contuttociò l' accordo tra i calcoli e l' osservazione non era punto costante, e le vere ecclissi accadevano ora più presto ed ora più tardi di quel che si era supposto. Furono inutili i tentativi per ispiegar questa irregolarità, finchè Bradley avendo osservato che vi era un certo rapporto colla diversa situazione della ♁ rispetto a ♃, trovò la vera cagione per cui i calcoli comparivano difettosi, cioè il moto progressivo della luce, che riacquistata dai Satelliti nell' emergere da un' ecclisse, impiega un tempo sensibile per propagarsi fino all' occhio dell' Osservatore, e che tanto più si ritarda

quanto la distanza tra la ♅ e ♃ è maggiore. Introdotto nei calcoli un elemento di tal natura, tutto si ridusse alla precisione richiesta; e con una tale scoperta si trovò che un raggio lucido per attraversare il semidiametro dell' orbita della ♅, cioè per giunger dalla distanza del ☉ a noi impiega 8′7″ di tempo, mentre la ♅ descrive 20″ della sua orbita. Noi abbiam già parlato altrove (462) di questo fenomeno e dell' aberrazion della luce, onde termineremo col dar la promessa Tavola degli elementi della Teorìa dei Satelliti, ove al solito *r* significa il raggio vettore espresso in parti del Pianeta primario, *τ* la rivoluzion periodica, *s* la sinodica, *k* la massima equazione di *s* (818), *i* l' inclinazion dell' orbita del Satellite su quella del Pianeta, ☊ il luogo del nodo, *m* il suo moto annuo, e *τ′* la semidurata della massima ecclisse, o sia il semidiametro *x* della sezione ombrosa ridotto in tempo.

Quanto ai Satelliti di ♄ vi si è apposta la doppia numerazione, romana ed araba, a riflesso di quanto abbiamo accennato sopra (815).

Satelliti di Giove:

♃	*r*	*τ*	*s*	*k*	*i*	*m*	*τ′*	☊ nel 1780
I	5,6973	1ᵍ,76914	1ᵍ,76986	0ᵍʳ 39′ 25″	3° 18′ 38″	0	1ᵒʳ 7′ 55″	10ˢ 14° 30′
II	9,0659	3 ,55118	3 ,55410	1 19 9	3 16	2′ 3″	1 25 40	10 13 45
III	14,4616	7 ,15455	7 ,16639	2 39 35	3 13 58	0	1 47	10 14 24
IV	25,4360	16 ,68902	16 ,75355	6 13 4	2 36	4′ 19″	2 23	10 16 39

Satelliti di Saturno.

♄		*r*	*τ*	*s*
I	7	3,080	0ᵍ,94271	0ᵍ,94280
II	6	3,952	1 ,37024	1 ,37040
III	1	4,893	1 ,88780	1 ,88813
IV	2	6,268	2 ,73948	2 ,74017
V	3	8,754	4 ,51749	4 ,51939
VI	4	20,295	15 ,94530	15 ,96898
VII	5	59,154	79 ,32960	79 ,91890

'Satelliti d' Urano.

♅	r	τ	s
I	13,120	5^g,8926	5^g,8937
II	17,022	8 ,7068	8 ,7092
III	19,845	10 ,9611	10 ,9650
IV	22,752	13 ,4559	13 ,4617
V	45,507	38 ,0750	38 ,1316
VI	91,008	107 ,6944	108 ,0680

Convien confessare che resta ancora qualcosa a desiderarsi per la perfezione della Teorìa dei Satelliti di ♃, molto più ne resta per quella dei Satelliti di ♄ e di ♅. Intanto i primi già sono di un gran soccorso alla Nautica per determinare le longitudini (626).

Luna

823. Questo Satellite della ♁ sì per la sua vicinanza che rende sensibili le più piccole ineguaglianze de' suoi moti, sì per la forza con cui agisce sopra la ♁ e sulla parte più sollevata del suo equatore, per cui la ♁ soffre dei piccoli cangiamenti i quali dall' apparenza rifondonsi nella ☽, sì finalmente per le azioni moltiplicate e variabili del ☉, della ♁ stessa e dei Pianeti sopra di lei, ha necessitato gli Astronomi ad impiegare i tentativi più ricercati e più laboriosi per fissarne compiutamente la teorìa. Non soffrendo la brevità e la natura di questi elementi che ci diffondiamo sulle numerose equazioni le quali si son dovute introdurre nel calcolo per determinare il vero luogo della ☽ nel Cielo in un dato istante (alcune delle quali dipendono da principj che superan gli elementi a cui ci siam limitati), ci contenteremo di dare in primo luogo le nozioni più interessanti dei suoi movimenti medj, dipoi quelle dei più notabili cangiamenti di essi, infine delle più sensibili conseguenze dei suoi rapporti locali rispetto al ☉ e alla ♁, cioè dell' ecclissi tanto della ☽ medesima che del ☉, e della loro riunita azione sull' acque della ♁, o sia dell' esto marino.

824. Gli Astronomi per determinar con tutta l'esattezza che era possibile le rivoluzioni e i moti lunari, e per ottenerne un valore il meno sensibile alle periodiche ineguaglità della ☽, ebber ricorso ai movimenti secolari di questo Satellite (tanto relativamente agli equinozj, quanto alle fisse) alle congiunzioni, alle opposizioni ec. Così per esempio avendo trovato che in un secolo (= 36525 *giorni* = 3155760000″) il moto lunare rispetto agli equinozj era stato di 1732564392″, si disse : 1732564392″ : 3155760000″ : : 360° (= 1296000″) : x = 2360584″,6795 = 27^g 7^{or} 43′ 4″,6795, media rivoluzione tropica della ☽. Con questo e simili metodi, ecco gli elementi lunari che se ne son dedotti, supposta la precession secolare degli equinozj = 1° 23′ 45″ (622).

Rivoluzione tropica	27^g	7^{or}	43′	4″,	6795
siderale	27	7	43	11,	5440
anomalistica	27	13	18	33,	9499
rapporto al ☊	27	5	6	55,	9980
sinodica	29	12	44	2,	8285
Anno lunare di 12 rivol. sinod. . .	354	8	48	33,	9420
Rivoluzione tropica dell'*apogeo* .	3231	8	34	57,	6177
siderale	3232	11	11	39,	4089
tropica del *nodo* . . .	6798	4	52	52,	0296
siderale	6793	7	13	17,	7440

Moti diurni

Della ☽ rapporto all' equinozio .		13°	10′	35″,	027843940
rapporto al ☉		12	11	26,	697659
dell' *apogeo* rapp. all' equinozio .		0	6	41,	069815195
rapporto alle fisse . .		0	6	40,	932238
del *nodo* rapp. all' equinozio .	—	0	3	10,	638603696
rapporto alle fisse .	—	0	3	10,	776180698

ove si osservi che avendo il nodo generalmente un moto retrogrado, la sua rivoluzione tropica è perciò più lunga della siderale; ed all' opposto la ☽ per questa stessa ragione ritorna al nodo più presto di quel che compia qualunque altra rivoluzione.

825. Nel modo stesso da un diligente confronto di osservazioni assai numerose si son dedotti anche gli elementi che seguono.

Distanza media della ☽ dalla ♁ 86324 *leghe* = 197077692 *tese* = 60,3 raggi *medj* della ♁.

Eccentricità media (posta la media distanza = 1) = 0,05503568.

Inclinazione media dell'orbita coll'eclittica = 5°8'49".

826. Quanto al diametro apparente della ☽, siccome esso cresce o diminuisce in ragione inversa delle distanze (452. 1°), appunto come le parallassi (455. 2°); così dalle variazioni dell'uno posson dedursi direttamente le variazioni dell'altre. Su questo principio, e sui rapporti tralle parallassi e le altezze (455. 4°) è formata la XII. Tavola Lunare posta sul fine di questo Libro (pag. 31). Inoltre non è difficile (per esser la ♁ nel fuoco dell'orbita lunare) il riconoscerne l'apogeo e il perigeo esaminando frequentemente e accuratamente col metodo altrove indicato (601) o con qualunque altro idoneo, lo stesso diametro lunare, i cui limiti già trovati tra 29',5 e 33',5 daranno i due punti più interessanti dell'orbita.

827. Dopo tutto questo sembra che conosciutasi per un'epoca data la situazion della ☽ e la posizion della sua orbita, si dovesse aver subito per qualunque altro tempo il luogo e il moto lunare: ma oltre alle consuete difficoltà che s'incontrano nel dedurre dai moti medj i reali, vi è per la ☽ una variazione anche nei primi da un'età all'altra. Così per esempio, nel nostro secolo la media rivoluzione sinodica si è trovata più breve che nei secoli addietro, e apparisce generalmente in oggi nei movimenti lunari un'accelerazione, che forse si distruggerà nel progresso, e che non potrà esser determinata se non dopo molti e molti anni di osservazione. Quest'accelerazione ha dato luogo a un'*equazion secolare* della ☽, la quale trovasi nelle Tavole tra gli altri elementi del calcolo lunare.

828. Ma senza contare che il nodo e l'apogeo della ☽ soffron talvolta una specie d'oscillazione o bilanciamento, o che gli Astronomi hanno incontrate negli elementi lunari molte piccole irregolarità derivanti dalla

teorìa dell' universale attrazione: vi son nella ☽ certe ineguaglianze sensibili, che non possono trascurarsi e sulle quali con somma fatica e studio si son formate delle Tavole particolari. Di queste ineguaglianze son quattro le principali e si contengono nell' *equazion dell' centro*, nell' *evezione*, nella *variazione* e nell' *equazione annua*.

829. Quanto alla prima, ella ha avuto origine da un' osservazione, che gl' intervalli di tempo scorsi tra quelle ecclissi lunari le quali accadono nello stesso punto del cielo e nella stessa stagion dell' anno, non sono eguali tra loro, e che la ☽ tornando alle medesime fisse e in opposizione col ☉, non ha sempre lo stesso grado d' anomalìa. Inoltre se si esamini questo Satellite nel decorso di un mese, si osserva in lui ogni sette giorni un' ineguaglianza di cinque in sei gradi, che poi svanisce nei sette giorni seguenti e così di mano in mano; essendovi sempre due punti opposti nell' orbita che dividono in tempi eguali il periodo lunare, ma che non hanno una costante situazione, mentre il luogo della massima ineguaglianza si trova ad ogni rivoluzione avanzato circa 3°, di modo che il moto lunare anomalistico divien minore di $\frac{1}{120}$ del suo moto assoluto.

830. Fu chiamata *Evezione* una seconda ineguaglianza lunare per cui l' equazion del centro *calcolata* è sempre più piccola della *vera*. Il massimo della differenza giunge a $1^{\circ}, 34$, ed essa è generalmente proporzionale al seno del doppio dell' elongazione lunare dal ☉, meno la media angolar distanza della ☽ dal suo apogeo.

831. La *Variazione* è una terza irregolarità del moto della ☽, il cui *massimo* ascende a $35', 68$ allorchè l' elongazion della ☽ dal ☉ è di 45°. Essa si annulla allorchè l' elongazione è zero ovvero $= 180^{\circ}$, cioè nelle congiunzioni ed opposizioni, ed il suo valore è proporzionale al seno del doppio della medesima elongazione.

832. Infine l' accelerarsi il moto lunare allorchè il solare ritarda e all' opposto, ha dato luogo alla quarta ineguaglianza detta *Equazione annua*. Il suo massimo è di $11', 1456$, e la sua legge è precisamente la stessa che quella dell' equazion del centro, ma con un segno diverso.

833. E

FIG.

833. È fuor di dubbio che tutte queste irregolarità dipendono *specialmente* dalla variabil distanza del ☉ dalla ☽ e dalla ♁, e perciò dalla differente azione del primo sull' altre due: poichè se il raggio vettore della ♁ fosse infinito, le direzioni delle forze solari sulla ♁ e sulla ☽ sarebbero parallele, e i loro moti relativi non ne potrebbero rimanere alterati. Ma benchè la distanza del ☉ sia molto grande, pure non è tale, che la situazion respettiva di questi corpi non debba produrre una perpetua serie di cangiamenti nel loro moto. Per esempio, essendo la ☽ nelle congiunzioni più vicina al ☉ e perciò più attratta che non è la ♁, la gravità dell' una sull' altra diminuisce, e il raggio vettore tende a divenir più grande; similmente nelle opposizioni lunari la ♁, comecchè più attratta dal ☉ che non è la ☽, tende a scostarsene e la trae a se con meno di forza, e quindi la reciproca gravità quì pure diminuisce, e il raggio vettor della ☽ tende nel modo stesso ad estendersi: laddove nelle *quadrature* (cioè a 90° dalle congiunzioni ed opposizioni che con un nome comune chiamansi *sizigie*) tutto rimane nel naturale suo stato per l' attrazione solare. Eccederebbe i limiti che ci siamo proposti la spiegazion dettagliata di tutti i varj fenomeni dei quali abbiamo parlato, tanto più che alcuni di essi restano ancora lasciati all' investigazione dei Dotti. Basterà perciò una passeggiera applicazione alla ☽ di quelle formule che si son già trovate per le perturbazioni dei Pianeti (793). Sia dunque ρ la Luna, G la Terra, S il Sole, e perciò z il raggio vettore $G\rho$ della prima, $z' = SG$ quello della seconda, $r = S\rho$ la distanza lunare dal ☉, e l' angolo $SG\rho = C$ l' elongazion della ☽. Prendo pertanto le due formule della forza $\Pi = \left(\frac{mz}{r^3} - \frac{m}{z'^2}\right) sen\ C$, che quì è forza *ritardatrice* per esser ρ più avanzato di S (793), e della forza *diminutrice del raggio vettore z*, cioè di $\Phi = \frac{mz}{r^3} - \left(\frac{mz'}{r^3} - \frac{m}{z'^2}\right) cos\ C$; indi condotta da ρ la ρi normale ad SG, onde $Gi = z\ cos\ C$, osservo, che attesa la gran distanza del ☉ può farsi $S\rho = Si$, cioè $r = z' - z\ cos\ C$, ed $\frac{1}{r^3} = (z' - z\ cos\ C)^{-3} =$ (L. 156) 85

85 $\frac{1}{z'^3} + \frac{3z \cos C}{z'^4}$, omessi gli altri termini come trascurabili senza errore. Quindi sostituiti questi valori nell' espressioni di Π e di Φ, ed avvertendo che per esser z' quasi 400 volte maggior di z, il termine $\frac{3mz^2 \cos C}{z'^4}$ diviene anch' esso trascurabile, e che $\cos^2 C = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2C$ (L. 633), si avrà $\Pi = \frac{3mz \,\text{sen}\, C \cos C}{z'^3} = \frac{3mz \,\text{sen}\, 2C}{2z'^3}$ e $\Phi = -\frac{mz}{2z'^3} - \frac{3mz \cos 2C}{2z'^3}$.

834. Dunque 1°. fatto successivamente $C = 0°, = 90°, = 180°, = 270°$, sarà sempre $\Pi = 0$, cioè *la celerità ordinaria della ☽ non cangierà nè nelle quadrature nè nelle sizigie*; ma se sia $C = 45°, = 135°, = 225°, = 315°$, sarà (L.611) $\text{sen}\, 2C = 1, = -1, = 1, = -1$, cioè *nel primo e quinto ottante dell' orbita la celerità della ☽ avrà il massimo ritardamento, e nel terzo e settimo il massimo accrescimento; e generalmente la ☽ ritarderà il suo moto andando dalle sizigie alle quadrature e lo accelererà andando dalle quadrature alle sizigie*.

835. Dunque 2°. fatto similmente $C = 0°, = 90°, = 180°, = 270°$, sarà alternativamente $\Phi = -\frac{2mz}{z'^3}$ ed $= +\frac{mz}{z'^3}$ cioè *nelle sizigie la gravità della ☽ verso la ♁ avrà la massima diminuzione, e nelle quadrature il massimo aumento, in modo che questo sia la metà di quella*. Se $C = 45°, = 135°$ ec., sarà sempre $\Phi = -\frac{mz}{2z'^3}$. Che se si voglia il punto ove questa perturbazione si annulla, fatta $\Phi = 0$, si troverà $-\cos 2C = \frac{1}{3} =$ (L. 618) $\cos 109° 28' 16''$ e $C = 54° 44' 8''$ in circa.

836. Possiamo aggiungere finalmente tra le ineguaglianze lunari anche la *librazione* che è un moto per cui la ☽, quantunque rivolga sempre la stessa faccia alla ♁, e si ruoti perciò sul proprio asse in un tempo eguale a quello della sua rivoluzion periodica, pure alternativamente manifesta e nasconde una piccola porzion del suo disco nei *lembi*, e sembra quasi oscillare in mezzo

al Cielo. Questa librazione è di quattro sorte: una è diurna, nelle parti orizzontali della ☽, ed è l'effetto della sua parallasse: una è nel senso della latitudine lunare e dipende dall'inclinazion dell'asse della ☽ sopra l'eclittica: un'altra è in longitudine, ed ha per cagione l'ineguaglianze dei moti della ☽ nella sua orbita: ve n'è finalmente un'altra specie che segue gli effetti dell'attrazione lunare sulla sferoide terrestre. Per tutte queste combinazioni viene a scoprirsi or più or meno qualche porzione del disco lunare opposto alla ♁. Noi non ci fermeremo in ciò di vantaggio.

837. I raggi solari sempre investono più della metà della ☽ (467); ma la porzion luminosa della medesima, affatto invisibile nelle sue congiunzioni o *Novilunj* in *m*, non si manifesta che appoco appoco a proporzione che cresce la sua elongazione dal ☉; cosicchè a 90° in *u* se ne vede illuminato il semicircolo occidentale e dicesi il *primo quarto*; a 180° in Σ apparisce luminoso l'intero disco e dicesi *Luna piena* o *Plenilunio*; di lì in poi se ne sminuisce la luce, onde a 270° non se ne vede che il semicircolo orientale e dicesi l'*ultimo quarto*, e quindi di mano in mano se ne perde di nuovo affatto la vista, riproducendosi il *Novilunio*. 85

838. Queste *fasi* guidano di lor natura all'articolo dell'*ecclissi*: poichè se l'orbita lunare non avesse un'inclinazion sensibile sull'eclittica, è chiaro che nei plenilunj dovrebbe la ☽ immergersi nel cono ombroso della ♁, ed accaderebbe un'ecclisse lunare, e nei novilunj a vicenda il cono ombroso della ☽ investirebbe qualche porzion della ♁ e vi produrrebbe un'ecclisse solare: ma l'orbita della ☽ è sensibilmente inclinata (825), i suoi nodi cangian situazione perpetuamente (824), e la sua latitudine nelle sizigie essendo sempre diversa, rende più rare ed in apparenza più irregolari l'ecclissi.

839. Non è però che gli Astronomi non abbian trovato di esse un periodo approssimatissimo di 18 anni comuni, 15 giorni, 7$^{\text{or}}$ 42′ 28″,56; cioè di giorni 6585, 3211639. Dopo questo intervallo occorreranno soltanto secondo il celebre Sig. Burckhardt le correzioni seguenti

al luogo medio della ☽ . + 10° 48′ 8″ ovvero 38888″
all' anomalìa del ☉ . . . + 10 29 34
all'anomalìa della ☽ . . — 2 50 1
all'Arg. di latit. della ☽ — 0 28 11

e la distanza media della Luna dal Sole sarà la medesima.

840. Con questi dati, calcolando le formule dei movimenti lunari e chiamando β l'anomalìa del ☉ (784), *A* quella della ☽, D la distanza della ☽ dal ☉ (747), Δ l'argomento di latitudine della ☽, cioè la differenza tralla sua longitudine e quella del nodo, ed introducendovi l'espressione degli archi multipli (L. 633), sarà dopo un periodo

1°. *l'aumento della longitudine vera*
$10° 48' 8'' + 123'' \cos\beta - 1122'' \cos A + 77'' \cos 2A + 28'' \operatorname{sen} A - 4'' \operatorname{sen} 2A - 251'' \cos(A - 2D)$. *V. Connoiss. des Tems Ann.* 1812.

2°. *la correzione della latitudine*
$-150'' \cos\Delta - 50'' \cos(\Delta + A) - 50'' \cos(\Delta - A) - 10'' \cos(2D - A + \Delta) - 10'' \cos(2D - A - \Delta)$.

3°. *il cangiamento del moto orario in longitudine*
$+0'',6 - 10'',7 \operatorname{sen} A + 0'',6 \operatorname{sen} 2A - 2'',1 \operatorname{sen}(2D - A)$

4°. *il cangiamento di parallasse*
$-9'',2 \operatorname{sen} A + 1'',0 \operatorname{sen} 2A - 1'',8 \operatorname{sen}(2D - A)$

Negli ecclissi così solari come lunari, $2D = 0$; e quando Δ sia trascurabile, la formula 2ª. diviene

$-150'' - 100'' \cos A - 20'' \cos(2D - A)$, ove si cangiano i segni allorchè $\Delta = 180°$, nel nodo discendente.

In questo modo potrà sapersi quali congiunzioni ed opposizioni lunari debbano calcolarsi a tutto rigore per determinar l'ecclissi: poichè quanto alle fasi o lunazioni ordinarie che si registrano sulle più usuali efemeridi o *lunarj*, esse o non son altro che le *medie* o sono poco più esatte di quelle. Insegneremo altrove come determinarle.

841. Calcolato il tempo di una sizigìa, non è difficile l'indagare se il Plenilunio o Novilunio sia ecclit-

tico . In fatti, riguardo al primo, si sa che chiamando p' e p le parallassi della ☽ e del ☉, ed r il semidiametro apparente del secondo, la misura angolare della semisezione del cono ombroso terrestre è $p' + p - r$ (472), la quale per altro gli Astronomi hanno estesa a $45''$ di più, a motivo dell' atmosfera terrestre, da cui indebolendosi i raggi solari che l' attraversano, viene aumentato lo spazio ombroso. Se dunque a $p' + p - r + 45''$ si aggiunga il semidiametro r' della ☽, è chiaro che questa non potrà punto ecclissarsi se nella sua opposizione abbia una latitudine $\Sigma\sigma = L > p' + p - r + 45'' + r'$; di quì facendo $\Sigma\sigma = l = g$, $\Sigma n\sigma = i = a$, avremo (L 705) $n\Sigma = h$ distanza della ☽ dal nodo, che dà il *limite* dell' ecclisse lunare. Che se la latitudine L sarà $< p' + p - r + 45'' - r'$, l' ecclisse sarà *totale*, cioè la ☽ s' immergerà tutta nell' ombra, e questo darà l' altro limite: tra le due latitudini l' ecclisse sarà parziale. Riguardo all' altra sizigia, supposta NI la ♁ e DC il ☉, se si chiami per analogia *sezion luminosa* la sezione fatta in Q' parallelamente a DC, il suo angolare semidiametro Q'MG sarà $p' - p + r$ (472); onde se nel Novilunio sarà $L > p' - p + r + r'$ non potrà esservi ecclisse alcuna solare, laddove essendo $L < p' - p + r + r'$, saranno per qualche luogo della ♁ impediti o in tutto o in parte i raggi solari, il che dà un' ecclisse o *totale* o *parziale*. Se $L = 0$, l' ecclisse sarà *centrale*; e quì si noti 1°. che un ecclisse solare che è totale per un luogo, non è che parziale per un altro; 2°. che quando all' occhio dell' Osservatore compariscono in linea retta i due centri della ☽ e del ☉, ma quella non cuopre questo totalmente, l' ecclisse chiamasi *annulare*, fenomeno però d' assai corta durata. Intanto dalle condizioni di l potran dedursi i limiti dell' ecclissi solari, come accennammo per quelli delle lunari. Ma poichè questi limiti suppongono già trovate le sizigie *vere*, i moderni Astronomi gli hanno ridotti alle *medie* e con assai maggior comodo hanno trovato che non vi è ecclisse lunare se nel tempo del plenilunio medio la distanza tra il punto opposto al ☉ e il nodo lunare è $> 13° 21'$, e che ve n' è una, se questa distanza sarà $< 7° 47'$: parimente non vi è ecclisse solare se nel novilunio medio il ☉ sia lontano dall' un dei

85

54
1ª.

nodi più di 19° 44′, e vi sarà indubitatamente qualche ecclisse se sia più vicino di 13° 33′. Nelle distanze intermedie il caso sarà dubbioso, e converrà rintracciarne la soluzione con metodi più precisi.

842. Stabilite pertanto per certe epoche (761) le posizioni del ☉ e della ☽, e dati i medj lor movimenti (624. 824) se ne avrà per qualunque istante la media situazione: e siccome l'eguaglianza delle longitudini medie di questi due astri fissa la lor congiunzione media o il *novilunio*, così la differenza di 6 *segni* o 180° ne determina l'opposizione media o il *plenilunio*: in ogni altro caso la differenza della longitudine della ☽ da quella del ☉ calcolata in *tempo lunare* ovvero a ragione di 12° 11′ 26″,697659 per giorno (824) darà il tempo trascorso dopo la congiunzione; e questo è ciò che chiamasi *Epatta* o *età della Luna*. Quindi vi sono l'epatte *annue*, le *mensuali* ec. Vedremo altrove l'uso di queste epatte.

843. Debbano ora determinarsi le fasi di un' ecclisse lunare, essendo dati i moti orarj h del ☉, h' della ☽ in longitudine, e k della ☽ stessa in latitudine. Suppongasi BMDC la semisezione del cono ombroso ove dee attraversarlo la ☽, BC $= x$ il semidiametro di

86 questa sezione, BD la sezion dell' eclittica, CM la porzion di un circolo di latitudine, e sia CO $= L$ la latitudine della ☽ nel punto vero d'opposizione. Se facciasi $k : h' - h :: \mathrm{CO} : \mathrm{CN}$ e si conduca NO, sarà (L. 646) $tang\ \mathrm{CNO} = \frac{k}{h'-h}$ la tangente dell' inclinazione (che chiamo φ) dell' *orbita relativa* NOR, cioè della linea apparente per cui trascorre la ☽ rispetto all' eclittica nel tempo della fase, supposto immobile il cono ombroso: così $\sqrt{(k^2 + (h' - h)^2)}$ che chiameremo H sarà il moto orario lunare per l'orbita relativa. Se ora si conduca CA normale ad LR, sarà A il *punto medio* dell' ecclisse (L. 406), e quindi 1°. nel triangolo ACO si avrà AC $= L \cos \varphi$ ed AO $= L \operatorname{sen} \varphi$ distanza tra il vero punto dell' opposizione e quello della metà dell' ecclisse; onde facendosi $H : 1'' (= 60') :: L \operatorname{sen} \varphi : z = \frac{60' \times L \operatorname{sen} \varphi}{H}$, sarà z l'intervallo del tempo che passa tra

il momento t del plenilunio e la metà dell'ecclisse, la quale precederà t se la latitudine della ☽ è in aumento, e sarà più tarda se l è in diminuzione: 2°. nel triangolo ALC sia $CL = Cf + fL = x + r'$, verrà $AL = \sqrt{(CL^2 - CA^2)} = \sqrt{((x + r' + L\cos\phi)(x + r' - L\cos\phi))}$, d'onde viene $\frac{2.60'.\sqrt{((x + r' + L\cos\phi)(x + r' - L\cos\phi))}}{H}$, tempo della total durata dell'ecclisse, la cui metà sottratta e sommata con t darà con $t \mp z$ il principio e il fine. Così si troveranno i momenti dell'*immersione* e dell'*emersione*, nei quali la ☽ termina di essere immersa nell'ombra e comincia ad escirne, ove CL e CR divengono $x - r'$.

86

844. Che se l'ecclisse non è totale, dee primieramente avvertirsi che d'ordinario il diametro così del ☉ come della ☽ si suppone diviso in 12 parti eguali chiamate *digiti*, e si determina poi la quantità dell'ecclisse da quella del numero n dei digiti oscurati nel massimo effetto dell'ecclisse. Posto ciò, se l'orbita relativa è lr e il centro lunare nella metà dell'ecclisse si trova in m, sarà $Cm = L\cos\phi$, $Cn = x$ ed $mn = L\cos\phi - x$, e quindi $np = mp - mn = r' - L\cos\phi + x$, e finalmente $2r' : 12^{dig.} :: r' + x - L\cos\phi : n = \frac{6(r' + x - L\cos\phi)}{r'}$.

845. Osservazioni 1ª. la ☽ avanti di giungere al cono ombroso dee traversar la *penombra*, da cui restando oscurata appoco appoco, passa quasi insensibilmente nell'ombra vera, e lascia spesso qualche incertezza nei precisi istanti delle sue fasi; 2ª. talvolta passa semplicemente per la penombra senza toccar l'ombra vera; 3ª. vi è chi misura in digiti lunari anche la corda ux o RL, e quindi si dice che l'oscurazion della ☽ è per esempio di 24 digiti allorchè ella attraversa una corda della sezione ombrosa, doppia del diametro lunare; 4ª. se costruita una scala comunque, divisa in 60 parti rappresentanti i minuti e suddivisa in secondi, si prenda da essa un numero di parti corrispondenti alla misura di x per farne il raggio del circolo DMB, e a quella di L per determinarne la retta CO, e indi formato l'angolo $ONC = \phi$ e condotta NR, si prenda Dd in parti corrispondenti ad r' e si stenda l'arco dL ec., si formerà il *tipo* o figura dell'ecclisse, da cui meccanicamen-

te si ricaveranno le misure e quindi i tempi respettivi, tanto più esatti, con quanto maggiore accuratezza sarà costruita la figura.

846. Il calcolo d'un'ecclisse solare è alquanto più complicato che quello di una lunare, specialmente a cagion delle parallassi, le quali variano al variarsi la situazione e l'altezza della ☽, e sono anche diverse per i diversi luoghi della Terra. Omessi pertanto i metodi più laboriosi e la cui applicazione esigerebbe dettaglj molto più estesi di quelli che posson aver luogo in questo Libro, ne tratteremo con una regola se non la più rigorosa, almeno la più facile e breve, e per gli usi civili approssimata bastantemente.

87 847. Sia AGBKTE la Terra, EQ il diametro dell'equatore, PP' l'asse, R*m*D il parallelo del luogo per cui si dee calcolar l'ecclisse, AGBKT l'emisfero illuminato dal ☉ S nel momento vero del novilunio, ed LX una porzione dell'orbita relativa lunare, che per maggior facilità suppongo per ora attraversar la retta CS nel punto N. S' intenderà facilmente 1°. che attesa la gran distanza del ☉, i raggi visuali CNS, BL'S coi quali veggono il ☉ due Osservatori T, B, son paralleli sensibilmente tra loro, unendosi al centro solare sotto un angolo di 8'', 6 (765) $=$ OBS $= p$ parallasse del ☉; 2°. che l'angolo CNB $=$ NBO è la parallasse orizzontale p' della ☽, onde NBL' $= p' - p$, e quindi condotta Bnq tangente al lembo del ☉, sarà NB$n = p' - p + r$, raggio della sezione che si chiamò luminosa (841, 472) ed NBL $= p' - p + r + r'$ il limite dell'ecclisse: 3°. che essendo tutti i raggi solari normali al circolo AGBKA *projezione* dell'emisferó illuminato, quei raggi che cadono sulla circonferenza del parallelo R*m*D faranno in AGB una projezione ellittica *r*G*dgr*, e sarà lo stesso per l'apparenza ottica o che questo parallelo presenti successivamente col suo moto diurno la sua circonferenza D*m*R al ☉, o che il ☉ scorra per i punti *d*, *e*, *r*: in fatti le apparenze ecclittiche son le stesse in V ed *u*, in T e C, in D e *d*, in R ed *r* ec.; 4°. che fatta la projezione di questo circolo nella regione lunare, CB diverrà NL' e sulla superficie di questo circolo si calcoleranno gl' incontri

del ☉

del ☉ e della ☽, l'uno dei quali trascorre in sola apparenza la detta elisse, l'altra realmente la taglia colla sua orbita e col suo moto; 5°. che per l'Osservatore in B l'ecclisse comincia quando la ☽ è in L e che NBL $= p' - p + r + r'$, e divien centrale quando la ☽ è giunta in L' ec.; mentre un Osservatore in V vedendo il ☉ in tf e la ☽ in iL', scorge oscurata una porzione if del disco solare e non più, e nulla per anche apparisce agli Osservatori più lontani T, D ec.; 6°. che l'arco TQ, ovvero AP, esprimerà la declinazione δ del ☉; e quindi data la latitudine geografica $QD = l$ del parallelo DR, fatto $CB = R = 1$, si avrà $HD = \cos l$, $CH = \operatorname{sen} DQ = \operatorname{sen} l$, $Cd = \operatorname{sen} TD = \operatorname{sen}(l - \delta)$, $Ch = CH \cos PA = \operatorname{sen} l \cos \delta$, $Cp = \cos \delta$, $Cr = \operatorname{sen} RT = \operatorname{sen}(PT + PD) = \operatorname{sen}(180° - (l + \delta)) = \operatorname{sen}(l + \delta)$, $hd = Ch - Cd = \operatorname{sen} \delta \cos l$ semiasse minore dell'elisse di projezione, il cui semiasse maggiore deve eguagliare $HD = \cos l$; 7°. che diviso l'arco Dm del parallelo in sei parti eguali, e l'arco de nelle loro corrispondenti, il ☉ sarà in D ovvero in d nel punto di mezzogiorno per il paese proposto, ed in m ovvero in e alle ore 6 della sera, e così del resto; onde la semiellisse gdG si potrà chiamar la parte *diurna*, e *notturna* la Grg: tutto all'opposto se δ sia negativa, cioè australe la declinazione del ☉; 8°. finalmente che supponendosi nel momento del novilunio una latitudine nella ☽, tutto sarà lo stesso, a riserva che la projezion dell'orbita relativa che prima era BA e si confondeva col diametro, diverrà allora una corda comunque obliqua ZY, e passeranno in I le apparenze di B ec.   87

848. Premesso ciò, abbiasi come per l'ecclisse lunare (843) il momento vero t della sizigia, la latitudine L della ☽, la sua parallasse p', il suo semidiametro r', l'inclinazione φ della sua orbita relativa coll'ecclittica, e il suo moto orario H per essa; e sia al solito BD la sezion dell'ecclittica, CM quella di un circolo di latitudine, e BMD la metà del circolo AGB (*fig.* 87) trasportato nella regione della ☽. Presa $D\Delta = r + r'$ e descritto il circolo $\beta\mu\Delta$, si stenda col metodo consueto (843) l'orbita relativa NZ e si conducano ai punti d'interse-   86

86 zione le rette CV, Cu , Cx , CZ colla normale CA. Essendo dunque CO $= L$, avremo CA $= L \cos \varphi$, OA $= L \operatorname{sen} \varphi$, e per esser note CV $=$ C$\Delta = p' - p + r + r'$ e C$u =$ CX $= p' - p$ (847. 4°), saran noti (L. 697) i lati AV ed Au ec., onde sapendosi il moto orario lunare H (843) che suppongo $= Ob$, si avranno i tempi in cui la ☽ si troverà nei diversi punti V, u, A, X, Z: quindi non attendendo per ora alla rotazion della Terra e considerando l'ecclisse in generale, la ☽ arrivata in V toccherà il *lembo occidentale* del ☉ rispetto al primo di tutti i punti terrestri che posson veder l'ecclisse: arrivata in Z lascierà il *lembo orientale* del ☉ rispetto all'ultimo di questi punti; così pure saranno u ed X i limiti tra cui resta l'ecclisse centrale per i vari punti sottoposti della ♁, e sarà al solito in A il mezzo dell'ecclisse generale, all'occidente di O se la latitudine L è in aumento come nella figura, ed all'oriente di O se sia in diminuzione: ove si intende che se la latitudine della ☽ sia australe o attraversi l'ecclittica, il semicircolo $\beta\mu\Delta$ dovrà roversciarsi o compirsi.

849. Ma poichè nel tempo in cui la ☽ trascorre la porzione VZ dell'orbita relativa, la ♁ gira sul proprio asse, ed ogni paese cangia situazione, non è possibile calcolar le fasi, la quantità e i momenti di un ecclisse del ☉ per un dato paese senza combinar l'apparenze del movimento solare durante il tempo in cui la ☽ trascorre VZ. Per ottener ciò si determini in primo luogo l'angolo fatto dall'ecclittica col circolo di declinazione in cui si ritrova il ☉; cioè se sia EQ l'equatore, EC

74 l'ecclittica, il ☉ in t, Et la sua longitudine $= \lambda$, Eg' $=$ EPt (L. 677) la sua ascensione retta $= A$, e l'obliquità tEg dell'ecclittica $= O$, si cerchi l'angolo EtP che chiamerò M. È noto che si avrà (L. 698) $\operatorname{sen} M = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} \lambda}$ $= \frac{\cos O}{\cos \delta}$ (713. 712).

850. Richiamando ora quanto si è detto di sopra circa l'ellisse Gdgr di projezione (*fig.* 87), con un rag-

88 gio CD $= p' - p$ (847. 4°) si descriva il semicircolo BMD, il cui diametro BD rappresenti l'ecclittica, la normale CM il circolo di latitudine steso per il centro solare, e

la retta CP, tale che sia l'angolo BCP $= M$ (849), esprima il meridiano o la sua projezione, qual'è AB (*fig.* 87). Quindi determinata la latitudine l del paese per cui si dee calcolare, ed applicando le dimensioni già date (847. 6°) si prenda C$d = sen\ (l - \delta)$, $dh = hr = sen\ \delta\ cos\ l$ e si conduca di quà e di là la normale $hg = h$G $= cos\ l$ cioè il diametro dell'ellisse di projezione o del parallelo del luogo. Fatto ciò, e prolungata CP in Q, descrivo col raggio hG l'arco GFQ che divido in 6 parti eguali QN, NE ec., conducendo l'ordinate Nq, Eu ec., e prolungandole in t, k ec. finchè N$q : qt ::$ E$u : u$K $::$ Q$h : hd :: cos\ l : cos\ l\ sen\ \delta :: 1 : sen\ \delta$. Prese dipoi dall'altro lato Gr le rette $hr = hd$; $qt' = qt$, $uk' = uk$ ec. e ripetuta la stessa cosa dalla parte opposta dgr, si otterranno i punti d, t, h, b, m che saranno altrettanti punti dell'ellisse di projezione e si potranno chiamare anche *punti orarj* per esser d la projezione del raggio solare nel mezzogiorno (supposta gdG la parte diurna (847. 7°) dell'ellisse), t quella d'un'ora dopo, b quella d'un'ora prima, e così del resto; di modo che si potran segnare le ore come nella figura, cioè per esempio X, XI, XII, I, II ec. e il centro solare si troverà esattamente nei punti corrispondenti all'ore segnate. Condotta ora nel modo solito l'orbita della ☽ e dato il momento del novilunio in O, col moto orario H, si prenda sull'orbita relativa una parte Oτ corrispondente allo spazio che dee trascorrer la ☽ nel residuo di quell'ora medesima: per esempio se il novilunio accaderà a 12^{or} 42′, si prenderà per Oτ il tratto per cui scorrerà la ☽ in 18′, e τ sarà il luogo dov'ella si troverà a 1^{or} in punto: indi si trasporti il moto orario sopra ZV dall'una e dall'altra parte di τ e si scrivan quì parimente l'ore dell'ecclissi come 10, 11, 12, 1, 2 ec.

851. Siccome pertanto a una data ora, per esempio a mezzogiorno, il centro del ☉ è in d e quel della ☽ in Δ, se sia la distanza tra d e $\Delta = r + r'$, i lembi si toccheranno e l'ecclisse principierà; se la distanza sarà maggiore, l'ecclisse non sarà ancor cominciata, e se sia minore, come sarebbe $r + r' - m$, si dirà $12 : 2r :: m : \frac{mr}{6}$ e questi saranno i *digiti* del disco solare oscurati. È chia-

88 ro 1°. che come si hanno i punti b, d, t, k ec. e β, Δ, τ ec. d'ora in ora, potrebbero aversi nel modo stesso di minuto in minuto; 2°, che fatta con tutta l'accuratezza possibile una figura con queste regole in grande ben proporzionata, il solo compasso può far trovare i momenti del principio, del fine, della massima oscurazione ec. con una approssimazione più che mediocre.

852. Ma per determinar più precisamente col calcolo e colle regole trigonometriche queste quantità, si cerchino le distanze $b\beta$ e $t\tau$ per le ore 11 ed 1. Chiamisi h l'arco QN = NE = EF ec., ciascuno di 15°, e supposto $\cos l = hQ = R$, l'espressione dell'ordinate Nq, Eu ec. sarà $R \cos h$, $R \cos 2h$ ec. o generalmente $R \cos mh = \cos mh \cos l$; parimente l'espression delle ascisse hq, hu ec. sarà $R \operatorname{sen} h$, $R \operatorname{sen} 2h$ ec. o generalmente $\operatorname{sen} mh \cos l$. Ora poichè le ascisse del circolo GFQ e dell'ellisse Gdgr son comuni, e l'ordinate dell'uno stanno a quelle dell'altra :: 1 : $\operatorname{sen} \delta$ (847.6), è chiaro che nell'ellisse di projezione si avrà (prese come nel circolo l'ascisse dal centro) $x = \operatorname{sen} mh \cos l$ ed $y = qt = u$K ec. $= \cos mh \times \cos l \operatorname{sen} \delta$, fatto $m = 1, = 2$ ec. secondo la distanza dei punti orarj da d. Condotte dunque da t e da b le normali ti, bi a Cd, sarà $m = 1$, $ti = qh = x = \operatorname{sen} h \times \cos l = \operatorname{sen} 15° \cos l$ ed $hi = qt = y = \cos 15° \cos l \times \operatorname{sen} \delta$; onde C$i$ = Ch $- hi = \operatorname{sen} l \cos \delta - \cos 15° \cos l \times \operatorname{sen} \delta$.

853. Posto ciò, e rammentando che l'angolo PCM è il complemento di M (849) e l'angolo OCA $= \phi$ (843), ecco l'ordine delle operazioni per ottenere il valor di $t\tau$. Dal triangolo tiC rettangolo in i si ha I°. $\operatorname{tang} t\mathrm{C}i = \frac{ti}{\mathrm{C}i}$; II°. C$t = \frac{ti}{\operatorname{sen} t\mathrm{C}i}$; dal triangolo CA$\tau$ rettangolo in A si ottiene III°. $\operatorname{tang} \mathrm{AC}\tau = \frac{\mathrm{A}\tau}{\mathrm{CA}}$; IV°. $\tau\mathrm{C} = \frac{\mathrm{A}\tau}{\operatorname{sen} \mathrm{AC}\tau}$; dipoi V°. AC$\tau - \phi$ = OCτ; VI°. iCO $(= 90° - M)$ $-$ OCτ = iCτ; VII°. tCi + iCτ = tCτ, angolo contenuto dai due lati tC, Cτ già trovati, e quindi VIII°. (L. 652) il lato richiesto $t\tau$.

Per trovar $b\beta$ il giro è lo stesso; se non che l'angolo bCi (che ora tiene il luogo di tCi) dee sottrarsi

dall'angolo iCO, ed all'angolo $iCO + OCA$ deve aggiungersi l'angolo $AC\beta$. Lo stesso dicasi dell'altre ore per cui la figura medesima, non che il calcolo, suggerisce i cangiamenti da farsi. 88

854. Avvertiremo frattanto 1°. che tutte queste misure son sempre in parti del raggio $1 = p' - p$; 2°. che quando il ☉ è nei segni ascendenti, cioè ♈, ♉, ♊, ♑, ♒, ♓ ovvero 0', 1, 2, 9, 10, 11, la projezione del circolo CM di latitudine è alla destra o all'occidente dell'asse CP come nella figura; e quando è nei segni discendenti ♋, ♌, ♍, ♎, ♏, ♐, ovvero 3', 4, 5, 6, 7, 8, CM cade alla sinistra o all'oriente di CP.

855. Tutto ciò che serve a calcolar l'ecclisse solare, serve egualmente per calcolar l'*ecclissi dei Pianeti* o piuttosto le loro *occultazioni* dietro la ☽; consistendo la differenza nel prender la somma dei moti del Pianeta e della ☽ così in longitudine come in latitudine se ambedue si muovono in senso opposto, o la differenza di questi moti se vanno verso la stessa parte, per determinarne l'orbita relativa.

856. Quanto all'*occultazion delle fisse*, ecco le piccole varietà che vi sono tra la ricerca di queste ecclissi e delle solari; 1°. δ è la declinazione non più del ☉ ma della ✱; 2°. tanto la parallasse p che il semidiametro r divengono zero, e il raggio $p' + p = p'$; 3°. all'ore XII. che si scrive in d sul meridiano, dee sostituirsi quella del passaggio della ✱ per questo circolo; 4°. l'angolo $BCP = \Gamma CM$ (supposta $C\Gamma$ la projezione del raggio dell'equatore) che si trovò $= \frac{\cos O}{\cos \delta}$ (849) perchè la latitudine del ☉ è zero, dee determinarsi dipendentemente dalla latitudine L' della ✱; quindi supponendola in S, e supponendo la sua latitudine $L' = SL$, si determinerà l'angolo di *posizione* ΠSP corrispondente a PCM (*fig.* 88) e complemento di M, colla proporzione $sen\ \Pi S$ ($\cos L'$): $sen\ \Pi PS$ ($sen\ (90° + A) = \cos A$) : : $sen\ \Pi P$ ($sen\ O$) : $sen\ \Pi SP$ ($= sen$ PCM (*fig.* 88) $= \cos M$) $= \frac{sen\ O \cos A}{\cos L'}$ 75

$= (698)\ \frac{sen\ O \cos \lambda}{\cos \delta}$ poste A e λ l'ascensione retta e la longitudine della ✱; 5°. la retta CO esprime non più la pro- 88

88 jezione della latitudine lunare ma la differenza tra quelle della ☽ e della ✶, supponendosi questa seconda in situazione sempre corrispondente al centro C; 6°. il moto orario relativo della ☽ in longitudine non è altrimenti $h' - h$ ma solamente h', ed $H = \sqrt{(k^2 + h'^2)}$; 7° infine le distanze $t\tau$, $b\beta$ ec. che si riferivano alla somma $r + r'$ dei raggi del ☉ e della ☽, quì si riducono alla sola r'.

857. Anche i *passaggi* di ☿ o di ♀ sul disco solare nelle lor congiunzioni inferiori si trattano collo stesso metodo: onde altro non aggiungeremo, avvertendo solo che quei di ☿ sono assai più frequenti che quei di ♀: in fatti il primo dopo esser comparso il dì 7 Maggio 1799 e il dì 8 Novembre 1802, vi comparirà di nuovo il dì 11 Novembre 1815, il dì 4 Novembre 1822, il dì 5 Maggio 1832, il dì 7 Novembre 1835 ec.; ma ♀ dopo esservi passata il dì 3 Giugno 1769, non vi passerà che nel dì 8 Dicembre 1874, dipoi nel dì 6 Dicembre 1882, e tarderà in seguito fino al 7 Giugno 2004. Passiamo a dir qualche cosa dell' azion della ☽ sull'acque terrestri cioè dell' *Esto marino*.

858. Se per l' attrazione universale i corpi celesti turbano gli uni agli altri sensibilmente la situazione e il moto, è facile il concepire che l' acque debbono più che ogni altra materia terrestre provar l' effetto di quelle forze con cui il ☉ e la ☽ agiscono sulla ♁, per tacer degli altri Pianeti; onde un fenomeno tanto strano per gli Antichi, diventa per noi così naturale che la sua mancanza farebbe forse un ostacolo a tutta la Teoria del Cielo fin quì stabilita.

Sotto la *Zona Torrida*, cioè nei Paesi che stendonsi tra 0° e 23° 28' di latitudine, appena si alza la ☽ di alcuni gradi sull' orizzonte, l' acque dell' Oceano cominciano il loro *flusso*, cioè si alzano appoco appoco sotto di lei e formano infine un ammasso enorme chiamato *alta marea* o *flot* che sempre aumenta finchè la ☽ lasciato il meridiano, abbia trascorso un dato arco verso Ponente: allora cominciando a cedere il fluido al proprio peso, va con un moto opposto, cioè con un *riflusso*, a riprender l' antica situazione e fa la *bassa marea* o *Jusant*, alternando in seguito questi moti perpetuamente

con un' esatta corrispondenza e nel tempo e nella varietà delle altezze ai moti lunari combinati colla situazione del ☉..

859. In una materia la quale riguarda più da vicino la Nautica che l' Astronomìa, e in cui le ricerche particolari non posson farsi senza particolari Tavole e osservazioni, ci limiteremo alla nozion generale del fenomeno e alle sue variazioni diurne, mensuali ed annue, per l' intelligenza delle quali basta ormai ai nostri Studiosi tutto ciò che si è fin quì detto dell' attrazione e delle forze perturbatrici. È dunque noto per l' osservazioni 1°. che tra due simili maree scorron regolarmente 12^{or} 24$'$, quante ne scorron tra due appulsi della ☽ al meridiano sopra e sotto l' orizzonte: ora è certo che l' attrazione di questo Satellite in M allorchè inalza l' acque verso di se, le dee costringere a sollevarsi anche dalla parte opposta del globo, e perchè la forza attraente diminuendo da E in C e più ancora da C in *e* (764) tende non meno a disgiunger E da C che C da *e*, e perchè a cagion della sua obliquità rispetto a P, *p* preme in questi due punti le acque verso C e toglie perciò una parte del peso ad E, e per conseguenza anche al punto opposto; 2°. che l' Esto non è sensibile nelle *Zone fredde* (cioè oltre i 66°, 32$'$ di latitudine, limite delle *temperate*), nè dove cause particolari impediscon la libera comunicazion del moto dell' Oceano; e che allorquando questo sollevasi e forma il flusso nell' isole che sono in mezzo di lui, l' acqua abbandona all' opposto le rive molto lontane e produce in esse il riflusso; ed ecco già una delle cause dell' irregolarità dell' esto per i paesi lontani dalla zona torrida; 3°. che l' esto delle sizigìe supera quel delle quadrature, dipendendo l' uno dalla somma delle attrazioni della ☽ e del ☉, l' altro dalla lor differenza (95); ove si osservi che quantunque cresca nelle quadrature la gravità della ☽ (835), cresce per la stessa ragione e con maggior misura (204) quella delle acque sottoposte a lei. Ora poichè può supporsi per replicate esperienze che poste le cose eguali, l' altezze delle maree ne' due casi siano fra loro : : 18, 25^{pie} : 8, 417^{pie}, la somma delle forze solare e lunare sarà alla lor differenza : : 18, 25 : 8, 417 e perciò le forze saranno : : 2, 7 : 1 (*L.* 184) prossimamente; 4°. che

77

l'esto è più sensibile allorchè la ☽ è perigèa, e meno allorch'è apogèa; e che egli cresce anche più quando ella si ritrova nell'equatore ove l'acque come più remote dal centro (637) son men difficili a sollevarsi; 5°. che le maree si aumentano anche più allorchè il ☉ è perigèo, allorchè trovasi negli equinozj ec.; 6°. infine che i loro effetti sono il risultato della combinazione di questi moti e di queste fasi: cosicchè le massime maree accaderanno allorchè il ☉ e la ☽ si trovano in congiunzione, ambedue perigei, e ambedue nell'equatore.

860. Del resto un tal fenomeno rifondendosi sopra un tratto enorme di Terra (859) prende diversi aspetti, e fa che in un luogo si contino differentemente l'ore dell'alta e bassa marea, in un altro le maree sian più frequenti, in uno divengan più rare, e quà e là abbiano differenti altezze variando dai 20 fino ai 50 e ai 100 piedi. La situazione dei mari, la positura degli Stretti, il contorno dei monti, l'interruzione dell'isole, la natura delle rive, la figura e direzione dei seni, le correnti che dominano, le comunicazioni esterne o sotterranee che vi sono, i venti che vi regnano ec. sono altrettanti motivi di alterazione che si moltiplicano all'infinito. Quindi per conoscer l'ore dell'alta e bassa marea in un dato Porto, bisogna prima saperne lo *stabilimento* cioè la differenza di tempo che si ha nel giorno del novilunio o del plenilunio tra l'appulso della ☽ al meridiano e l'alta marea; e quindi cercato l'intervallo tra il giorno per cui si calcola e la più prossima fase o precedente o seguente, se ne deduce per mezzo di Tavole convenienti la quantità da aggiungersi o togliersi dallo stabilimento per aver l'ora cercata.

861. Ma ciò che può interessar più direttamente un Astronomo in quest'articolo è la misura della mole lunare, che come avvertimmo (765) deducesi dalle maree. Ora poichè posta la forza del Sole $= 1$, quella della Luna è $= 2,7$ (859) e si sa che la forza perturbatrice nella direzion del raggio vettore diminuisce in ragione inversa dei cubi delle distanze (794), se chiamisi r la distanza solare, M la sua mole $= 351886$ (765), 1 la

distanza

distanza lunare, m la sua mole ed f la sua forza $= 2,7$ (859), sarà $r = \frac{sen\ 57',3}{sen\ 8'',6}$ (765), e la forza della ☽ trasportata nel ☉ sarà $\frac{f}{r^3} = \frac{2,7 \times sen^3\ 8'',6}{sen^3\ 57',3} = 0,000000042267$, e perciò $M : m$ ovvero ☉ : ☽ : : 1 : 0, 000000042267 : : 351886 : 0, 0148732.

PARTE SECONDA

TEORÌA DELLE MACCHINE E DELLE APPLICAZIONI ASTRONOMICHE

Natura delle Macchine e delle Applicazioni astronomiche.

862. Tutto ciò che serve o per conoscere il tempo o per avvicinare e distinguere gli Astri, o per fissare la situazione o per misurare gli archi e gli angoli che descrivono, o per indicarne le direzioni, chiamasi *Macchina Astronomica*. Tutto ciò che per mezzo di queste Macchine e delle scoperte a cui guidò il giudizioso uso di esse, si fa ridondare in utile o in piacere degli Uomini, dicesi *Applicazione Astronomica*. Quelle dunque abbracciano quanto i Dotti hanno inventato o possono inventare per render più semplici, più certe e più estese le loro ricerche, e queste comprendono quanto o il bisogno o il comodo o la curiosità di ciascuno può mai dedurre dalla cognizione del Cielo. Perciò è evidente che ancor volendo, ci sarebbe impossibile il render conto in questi Elementi benchè di fuga, di tutte le Macchine e di tutte le Applicazioni.

863. Inoltre se da un lato una descrizione sommaria delle Macchine è inutile, perchè appena nominate si concepiscono facilmente, dall' altro un minuto dettaglio di tutte le parti che le compongono, di tutti i delicatissimi moti a cui debbon essere adattate, della precisione

estrema e finezza delle divisioni onde abbisognano acciocchè l'uso di esse sia universale e sicuro, ci porterebbe infinitamente lontani dai limiti della nostra brevità, mentre i nostri Giovani con poco tempo che impieghino in un Osservatorio sufficientemente corredato, possono quasi in un'occhiata bastantemente istruirsene, ed ammirare con quanta felicità la moderna industria si è tant'oltre avanzata, da trovare ormai molto equivoche e quasi del tutto inutili quelle macchine stesse, le quali un mezzo secolo addietro passavano per esatte.

864. Lasciati pertanto da parte gli *Astrolabj*, le *Verghe astronomiche*, le *Armille equatoriali* e tanti altri antichi Strumenti, all'imperfezione dei quali suppliva appena la vastità dei talenti di chi ne usava, accenneremo soltanto ciò che forma al presente il più ordinario apparato di un Osservatore, contentandoci di dar qualche avvertenza di maggior uso. Ciò si riduce principalmente all'*Orologio*, alla *Meridiana*, al *Telescopio*, e ai *Quadranti murale e mobile*, e al *Circolo Repetitore*.

Quanto alle Applicazioni, intendiamo di limitarci alle più comuni ed indispensabili, cioè all'uso delle *Tavole Astronomiche* per il calcolo dei fenomeni celesti e in specie per determinare il luogo della ☽, del ☉, dei Pianeti ec., alla distinzione esatta delle parti del giorno o sia alla costruzione dell'*Orologio solare*, e alla *formazione dell'Efemeridi* ovvero al *Calendario*.

Orologio Astronomico.

865. Dopo l'applicazione del pendolo agli Orologj (176) fatta da Ugenio (applicazione che ha resi in oggi sinonimi *Pendolo* ed *Orologio Astronomico*), non è più difficile l'ottener da queste Macchine una misura bastantemente precisa del tempo medio (622, 624). In fatti essendosi semplicizzato al maggior segno il suo meccanismo, fissata la conveniente misura al pendolo stesso (181), corrette o prevenute le alterazioni del caldo e del freddo col combinar nella verga che sostiene il peso oscillante differenti metalli, le cui dilatazioni o condensazioni correggansi scambievolmente, può un Astronomo lusingarsi d'un isocronismo perfetto e insieme durevole. Ma vi è di

più: si dà in oggi anche agli orologj portatili una tal perfezione, che gli assicura da tutte l'irregolarità in qualunque stagion dell'anno, situazione, trasporto e moto, detti *Cronometri*, la cui bontà e il cui facil maneggio ha tanto estesa la pratica e accresciuto talmente il comodo di moltiplicare le osservazioni, che l'Astronomìa e la Geografia vi han trovati immensi vantaggj. La rivoluzion delle Fisse (*616*) è il vero mezzo di assicurarsi del vero isocronismo: poichè se l'ore segnate dall'orologio negl'intervalli che passano tra i varj appulsi di una medesima fissa a uno stesso punto immobile della Sfera siano eguali, ovvero crescano o scemino proporzionalmente ai giorni trascorsi, non potrà dubitarsi dell'uniformità del moto dell'orologio, a cui allungando o scorciando il pendolo (180) finchè in un giorno sidereo scorrano $23^{''}\ 56'\ 4'',1$ (*623*), si avrà la giusta misura del tempo solare. Con questo comunemente si regolan gli orologj anche negli Osservatorj; ma è molto utile di tenerne sempre uno almeno regolato col tempo sidereo, per leggervi in qualunque istante l'appulso al meridiano di tutti gli astri la cui ascensione retta è determinata. Del resto un Astronomo è poco sollecito di veder dai suoi orologj indicata la vera ora *attuale* o il tempo medio solare, purchè sia certo del loro moto uniforme e sappia l'ora indicata nel momento del mezzogiorno vero, e quanto avanzano o ritardano quotidianamente. Suppongasi che il pendolo all'ora del mezzogiorno anticipasse d'una quantità a, e che ogni giorno acceleri di un numero di minuti m: cerco il tempo vero t d'un'osservazione fatta allorchè l'orologio indicava $h^{''}$. Senza l'accelerazione diurna m (la quale si rifonde proporzionalmente in tutte le parti del giorno), l'ora vera sarebbe $h - a$; ma poichè l'orologio avanza, bisogna dire; $24^{''} + m : m ::$ $h - a : \frac{m(h-a)}{24+m}$ quantità da sottrarsi da $h - a$; e perciò si avrà $t = (h - a)\left(1 - \frac{m}{24+m}\right) = \frac{24(h-a)}{24+m}$; che se in vece dell'anticipazione a si avesse un ritardo r, è chiaro che nel modo medesimo si troverebbe $t = \frac{24(h+r)}{24-m}$;

e se m pure fosse un quotidiano ritardamento, le formule rimarrebbero le stesse, mutata soltanto m in $-m$.

Esempio. Segni l'orologio a mezzogirno $0'' 3' 59''$, nell'istante dell'osservazione $9'' 30' 57''$, ed acceleri ogni giorno di $48''$. sarà dunque $a = 3' 59''$, $h - a = 9'' 26' 58'' = 34018''$, $m = 48''$; $24'' = 86400''$ e $24 + m = 86448''$; onde $t = \frac{86400 \times 34018}{86448} = \frac{1800 \times 34018}{1801} = 33999'' = 9'' 26' 39''$.

Se vogliasi l'ora dell'osservazione in tempo *medio* (624) che chiamo T, supposta e l'*equazione* corrispondente al giorno che corre, e d la sua differenza da quella del dì seguente, si cangierà t in T, aggiunta o sottratta e da t secondo che il mezzogiorno vero segue o precede il medio, e cercando inoltre la parte proporzionale di d corrispondente all'ora di cui si tratta, come si è fatto di m, aggiungendola o togliendola secondochè l'equazione aumenta o diminuisce.

Meridiana

866. Dal centro di un foro o *gnomone* G destinato a introdurre in una stanza il raggio solare, si conduca GC normale all'orizzonte, e fissato nel punto C un sottil filo, se si abbia il comodo di un Cronometro o di un buon Pendolo, si potrà all'istante del mezzogiorno stendere il filo CM orizzontalmente in maniera che sia diviso da esso in mezzo lo *spettro solare*, e sarà fatta la meridiana. Converrà per altro assicurarsi in appresso dell'esattezza di essa, confrontando il punto del mezzogiorno dedotto dalla metà di quell'intervallo che impiega il Sole tra il primo *appulso* o sia contatto di esso filo, e il secondo appulso o abbandono di esso. Questo confronto darà l'errore della posizione di CM e mostrerà la necessità di cangiarla o in Cd verso Ponente o in Cb verso Levante, per quel tanto che esige il tempo $\pm t$ del ritardo o dell'anticipazione del mezzogiorno vero rispetto a quello che indicherebbe CM.

89

867. Immagino ora condotte per il centro dello gnomone l'orizzontale OR e la retta VGP tale che l'angolo PVA = PGR eguagli la latitudine l del paese, la qua-

le suppongo cognita almeno per approssimazione; indi conduco GA normale a VP. Preso G come il centro della Terra (per la piccolezza di questa e del suo raggio rispetto al Sole e alla distanza di esso (847)) e PV come il suo asse, è evidente 1°. che GA sarà nel piano dell'equatore; 2°. che tutti i circoli orarj (616) avendo l'asse comune VP, avranno anche una comune intersezione in V; 3°. che le loro projezioni sul piano VND sono altrettante rette, le quali partono tutte da V; 4°. che condotta AN nel piano GAN dell'equatore, la porzione A*n* sarà la tangente d'un angolo AG*n* preso nel circolo equatoriale, e perciò esprimente (ridotto in tempo (616)) la differenza che passa tra l'ora del mezzogiorno e quella d'un altro circolo orario la cui projezione è VB: e quì avvertirò di passaggio che se sul piano VND si prenda AD = AG e si descriva il circolo *p*A*q*, appartenendo la tangente AN tanto a questo circolo che all'equatoriale, eguali tra loro, potrà sostituirsi rispetto ad essa il primo al secondo, non tanto per le meccaniche operazioni quanto anche per la chiarezza delle dimostrazioni geometriche; uso che è molto frequente in Astronomìa, ma più di tutto nella Gnomonica come vedremo.

868. Posto ciò, si misuri attentamente l'*altezza* GC dello gnomone, e sia $GC = g$: avremo $CGA = PGR = l$ e perciò $CA = g \tan l$, $GA = \frac{g}{\cos l}$, $VC = g \cot l$, $VA = VC + CA = g(\cot l + \tan l) =$ (L. 610. 2ª. 6.ª 9ª) $\frac{g}{\operatorname{sen} l \cos l}$.

Dopo ciò, se si prendano di quà e di là dalla Meridiana sulla tangente NAN′ le porzioni $An = AG \times \tan 15°$, $AN = AG \times \tan 30°$, o generalmente $= AG \times \tan h° = \frac{g \tan h°}{\cos l}$, e si conducano delle rette per V*n*, VN, VN′ ec, queste saranno altrettante *linee orarie* indicanti 1ʰ, 2ʰ ec. della sera se son dalla parte orientale *b*, e 11ʰ, 10ʰ ec. della mattina se son dalla parte occidentale *d*: anzi queste rette potranno aversi praticamente con precisione forse maggiore senza condurle dal punto V, il che di fatto molte volte non è possibile; poichè conoscendosi il valor di VA e presa sulla Meridia-

89 na una parte AM tale che $VA:VM::1:p$, facciasi la normale $Mg = p \times An$, i punti n, g daranno la direzione richiesta. Su questi principj si costituiscono gli *orologj solari* di cui altrove parleremo, aggiungendo quì solamente, che se si concepiscano condotte da G due rette ad s e ad S tali che l' angolo $sGA = AGS = O$ obliquità dell' ecclittica, e si determinino $Cs = g\ tang\ (l - O)$, $CS = g\ tang\ (l + O)$, s ed S saranno i *limiti solstiziali* della Meridiana, *estivo* il primo ed *invernale* il secondo.

Del resto la Meridiana può condursi anche verticalmente, piegarsi da un piano orizzontale in un altro piano comunque, ancorchè inclinato ec. con delle facili applicazioni del metodo già proposto.

869. Finalmente ci resta da avvertire 1°. che per evitare l' alterazioni a cui possono sottoporre una Meridiana in un lungo tratto di tempo, o gli effetti della nutazione o i moti dell' edifizio e del piano su cui descrivesi o altre cause accidentali, gli Astronomi si curan poco d' incider sul pavimento la Meridiana, e preferiscono una *Meridiana filare* cioè formata da un filo ben teso sopra due punti stabili, l' un de' quali immobile corrisponde al centro C dello gnomone, l' altro nella parte opposta o boreale M per mezzo di un meccanismo adattato può avere un piccolo movimento orizzontale Md o Mb per cui allorchè si riscontra di tempo in tempo la direzion della linea, si può corregger qualunque minima alterazione o errore si incontri; 2°. che nel notare gli appulsi dell' immagin solare, è necessaria un' attenzione assai grande per non esser delusi o dal tremore dello spettro lucido o dalla confusione delle sue penombre, e convien fissarsi nell' uno e nell' altro appulso per quanto è possibile, a un grado medesimo di penombra; 3°. che perciò dee esser tale l' ampiezza o apertura dello gnomone onde colla massima immagine unisca la minima penombra. Ora ciò dipende dall' esperienza più che dal calcolo, e quindi suole asserirsi comunemente che la grandezza più adattata del foro dello gnomone dev' essere una 1000ma parte della sua altezza dal pavimento. Noi non osiamo d' impugnare una sì celebre regola; possiamo per altro far testimonianza che nella Metropolitana

Fiorentina ove è il più alto Gnomone dell' Europa di 277, 40057 *piedi* di altezza, la sua apertura non ha di diametro che 22 *linee* ed è perciò quasi un terzo meno di quel che prescriverebbe la data regola, senza alcun notabile inconveniente; anzi noi stessi per varie osservazioni fattevi, ci crediamo in grado di asserire che questo diametro si potrebbe tuttavia ristringere molto più, non solo senza che l' immagine impiccolisse o s' illanguidisse sensibilmente, ma anche col vantaggio di una notabil diminuzione delle penombre.

870. Fin quì si tratta di Meridiane assai piccole. Ma per condurne a traverso di un territorio o di una Provincia, molto più lunghi e difficultosi ne sono i mezzi, e bisogna ricorrere alla formazione e misura di un numero di triangoli collegati, che partano da una *base* o linea fondamentale misurata colla più scrupolosa esattezza, il risultato dei quali è la determinazione dei punti per cui si stende la sezione cercata del meridiano. Non potendo noi lungamente diffonderci sopra questa pratica, e non volendo nel tempo stesso lasciare i nostri Studenti senza qualche idea di un' operazione sì interessante, ridurremo tutto ai due seguenti Problemi, la cui soluzione (che le due Trigonometrìe combinate non darebbero senza lungo giro e fatica) il benemerito Sig. Barone di Zach ha ristrette in brevi ed elegantissime formule.

871. I. Determinare una distanza lineare o *Base* da cui dipenda tutto il sistema dei triangoli rappresentanti un territorio ec.

Due metodi possono impiegarsi per questo oggetto. Il *primo* è *geodesico*, e consiste nel prender colle misure le men soggette all' alterazione e le più accuratamente adattate ed orizzontate, una linea della maggior lunghezza possibile, ripetendone quante volte occorra l' esame per assicurarsi della sua esattezza. Dalle due estremità di questa linea, con Strumenti ben graduati e perfetti si dirigeranno le visuali ad un oggetto lontano più che si può, ma ben distinto ed immobile, e precisamente a un punto di esso, che sia accessibile, e possa esser veduto in seguito da altri punti o *stazioni* ove si porteran gli Strumenti. Conosciuti bene i due angoli

delle dette visuali e la base, si avrebbe già tutto l'occorrente per conoscere colle regole più comuni trigonometriche l'intero triangolo (L. 656); ma sarà bene il cercare col riscontro accurato dell'angolo visuale, fatto da detto punto, una riprova e certezza delle dimensioni trovate (L. 651. 654 ec.). Dopo di ciò, non potendosi esigere che il piano di esso triangolo giaccia in quello dell'orizzonte, vi si applicheranno i metodi consueti, onde ridurvelo (L. 672). Quindi fatto uno dei lati *base* di un secondo triangolo, presa da questo la base di un terzo e così di seguito, si otterrà la serie intera dei triangoli necessarj all'intento.

872. Il secondo *metodo* è tutto *astronomico*, capace di estendersi a *basi* molto maggiori, e dopo l'introduzione dei *Circoli repetitori* di cui faremo qualche parola in appresso, non può esservene alcuno nè così esatto nè così comodo. Potendosi in fatti avere con sì perfetti Strumenti la latitudine dei paesi colla precisione di una frazion di 1″, e dopo tanti esami e lavori fatti sui gradi di latitudine, sapendosi con più che bastante approssimazione le dimensioni della sferoide terrestre e la sua compressione ai poli (che supponiamo quì al solito di $\frac{1}{310}$) il piano delle operazioni diviene non meno semplice che sicuro.

89 873. Siano V e B due Paesi di latitudine conosciuta L ed L', e sia dato l'angolo della visuale VB con VT meridiano di V. Conduco BM perpendicolare ad VT ed avrò il triangolo rettangolo VBM, in cui $VM = L - L'$ (che chiamasi la *distanza alla perpendicolare*) ed è dato l'angolo $TVB = g$; quindi sarà data l'ipotenusa VB di un'estensione maggiore assai di quel che può dar l'attual misura e che porge inoltre il singolar vantaggio di non dover passare operando dal piccolo al grande, come d'ordinario, ma di proceder dal grande al piccolo con assai gran probabilità di evitar gli errori i più tenui. E' dimostrato in fatti che corrispondendo nelle nostre latitudini 1″ terrestre a 16 tese prossimamente, l'error di un mezzo secondo in una misura di 10000 tese porterebbe quello di 8 che nemmeno eccedono il diametro di una torre comune.

874. Che

874. Che se sia nota la differenza di longitudine tra B e V, sarà dato il lato BM, e questo con il lato MV e l'angolo retto, darà la medesima ipotenusa; la quale infine (per una terza riprova) potrà nuovamente cercarsi colla differenza BM delle longitudini, e l'angolo MVB $= g$, prendendo in ultimo la quantità media come la più approssimata.

875. Se la Terra fosse una sfera, le sole formule consuete darebbero i risultati precisi che si richiedono (L. 684. e segg.); ma essendo una sferoide, questi avran bisogno di correzione, specialmente in distanze assai grandi. L'insigne Astronomo Sig. Sen. Oriani coi suoi preziosi elementi di *Trigonometria sferoidale* ha somministrati i mezzi sicuri, onde ottenere tutte l'equazioni opportune; e il soprallodato Sig. Barone di Zach dopo averne ridotte elegantemente le più interessanti formule, ne ha fatte delle felicissime applicazioni. Così per es. cercando con questo metodo la distanza di Carcassona alla perpendicolare del meridiano Parigino, la trova di 320683 tese, che i delicati e ripetuti travagli così geodesici come astronomici dei celebri Astronomi i Sigg. Delambre e Mechain avevano stabilita di 320688 tese, cioè con sole 5 tese di differenza, che non arriva ad un piede in 10000 tese. Ci rincresce che la natura di questo Libro non ci permetta dirne di più.

876. II. Ridurre l'osservazione di un azimut da un punto ad un altro.

Occorre frequentemente che il punto centrale di un oggetto osservato (come la cuspide di una cupola o torre ec.) non sia accessibile, se non ad una certa distanza, e che perciò bisogni una correzione all'angolo visuale osservato di due oggetti lontani. Sia E il luogo della stazione, ed S il punto centrale a cui dee ridursi l'osservazione o l'angolo visuale dei due oggetti Γ, T; sia ES $= r$ la loro distanza; ΓET $= a$, il detto angolo visuale osservato da ridursi, TES $= c$ il visuale di uno dei due oggetti col centro di riduzione, e si suppongano note le distanze ΓS $= d$, TS $= g$ (queste posson esser date o dai triangoli precedentemente calcolati, o per approssimazione, e qualche volta possono escludersi co-

80

80 me vedremo). Poichè $\Gamma ST = \Gamma hT - STE$, e $\Gamma hT = \Gamma ET + E\Gamma S$, avremo $\Gamma ST\ (= x) = \Gamma ET\ (= a) + E\Gamma S - STE$; onde la correzione sarà $E\Gamma S - ETS$ che chiameremo $\Gamma - T$. Avendosi pertanto (L. 636) $r : d :: sen\, E\Gamma S : sen\, \Gamma ES\ (= sen\,(a + c))$ ed $r : g :: sen\, STE : sen\, TES\ (= sen\, c)$, si trova $sen\, E\Gamma S = \frac{r\, sen\,(a + c)}{d}$, e $sen\, STE = \frac{r\, sen\, c}{g}$. Ora se gli oggetti sieno lontani, gli angoli Γ e T saranno assai piccoli e potrà farsi $sen\, \Gamma = \Gamma$ e $sen\, T = T$ e dovran ridursi in secondi i valori corrispondenti; quindi $\Gamma - T = \frac{r}{sen\, 1''} \left(\frac{sen\,(a + c)}{d} - \frac{sen\, c}{g} \right)$; e se TS sia infinita, come accade nella determinazione degli azimut, svanirà il secondo termine e la correzione diverrà semplicissima, cioè $\frac{r\, sen\,(a + c)}{d\, sen\, 1''}$.

Telescopio.

877. La costruzione, i difetti, le correzioni, l'ingrandimento e la forza di un Telescopio o di refrazione o di riflessione sono tutti oggetti già esaminati bastantemente (574 . . . 601), onde non resta se non da dare qualche vantaggioso avvertimento ai nostri Studiosi che ne potessero usare. Si osservi dunque 1°. che per le osservazioni di alcuni Corpi celesti è necessario di premunir la pupilla dai troppo vivi insulti di una luce eccessivamente addensata. Questa cautela è indispensabile per il ☉, utilissima per la ☽ e da non omettersi neppure affatto allorchè si fissano gli occhi in ♀. A questo oggetto si pongono fra l'oculare e la pupilla dei vetri o affumicati con diligenza o coloriti più o meno secondo ciò che si osserva: ma poichè accade che questi vetri assai spesso abbiano delle imperfezioni e delle irregolarità, è necessario prima di fidarsene il porgli sull'objettivo ove si manifesterà chiaramente se meritino o no di esser posti in uso; inoltre conviene assicurarsi che le due faccie sieno non solo piane perfettamente, ma anche parallele tra loro: ciò può rilevarsi dall'osservare l'immagine di un oggetto molto lontano e ben chiaro, riflessa assai obliqua-

mente sul vetro in questione; se l'immagine è unica e ben distinta, i due piani son paralleli; 2°. che nelle osservazioni di certi fenomeni convien preferire i piccoli ai gran telescopj e specialmente nell'eclissi lunari. L'aumento dell'immagine non si ottiene che coll'aumento proporzionato delle penombre, e queste accrescono la difficoltà di distinguere i punti veri di occultazione del corpo ecclissato e i veri istanti in cui accadono; laddove le immagini più piccole son meglio terminate, e i limiti e l'ombre son più distinte; 3°. infine che conviene avere nei risultati un riguardo alla misura e alla forza dei telescopj di cui si fa uso. L'esperienza ha fatto conoscere che i canocchiali o telescopj più forti mostrano per es. più sollecita l'immersion di un Satellite e più tarda all'opposto la sua emersione: lo stesso è del principio e del fine d'un'ecelisse lunare ec. È vero però che se per le conseguenze da dedursene (come per esempio la determinazion delle longitudini) non si fondino i calcoli sulle sole immersioni o sulle sole emersioni, ma sull'une e l'altre combinate insieme, il risultato sarà lo stesso anche per due Osservatori che abbiano usato Strumenti di forza assai differenti.

878. Aggiungiamo qualche cosa sulla misura del campo dei telescopj. Sia AQB l'apertura o ampiezza del micrometro filare (601) e sia AB il filo immobile che passa per il suo centro. Scelta una Stella di piccola e nota declinazione δ, colloco il canocchiale in tal guisa che AB coincida colla sezione del suo parallelo onde la Stella sembri descriver la piccola retta AB. Quindi calcolato il tempo speso da A in B e ridotto in gradi (616), si avrà l'angolo orario h compreso trai due cerchi di declinazione che passan per A e B, come (*fig.* 74.) PA, PA' per A, A'. Se AB fosse esattamente nel piano dell'equatore, sarebbe AB $= h°$ = all'ampiezza cercata. Ma poichè si suppone che l'Astro abbia una declinazione δ, per aver AB in parti di cerchio massimo, si dirà (*L.* 700) 1 : *sen* VB ($= \cos\delta$, V essendo il polo) : : *sen* h : *sen* $h \cos\delta$ ampiezza cercata del campo. Di quì la maniera di ricavare anche la distanza angolare di due astri vicini, il diametro dei Pianeti ec. col mezzo del cursore parallelo di cui già si parlò (601).

90

Quadranti murale e mobile.

879. Il *Quadrante*, come lo indica il suo medesimo nome, è la *quarta parte di un circolo*, graduata accuratamente onde aver coll' ultima precisione l' angolo fatto dalla verticale del luogo, o dall' orizzontale coll' asse ottico di un telescopio mobile di cui è armato il Quadrante: nel primo caso serve direttamente a misurar le *distanze al zenit*, nel secondo le *altezze*, dipendendo ciò dalla sola collocazion del principio della divisione cioè di zero, il che è indifferente per esser un angolo il complemento dell' altro. L' essenziale del Quadrante consiste nella giusta misura dell' angolo retto, nella rigorosa eguaglianza delle divisioni e suddivisioni sopra un lembo piano perfettamente, nel vero parallelismo dell' asse ottico del telescopio (chiamato comunemente la *linea di collimazione*) col piano del Quadrante, e nell' adattata situazione di tutta la macchina. D' ordinario i Quadranti hanno due ordini di divisioni, l' una in 90° secondo l' uso comune, l' altra in 96 ovvero in 100, e quest' ultima è quella che va ad introdursi modernamente. Un angolo indicato nel tempo stesso in due differenti ordini di misura che facilmente riduconsi l' una all' altra, divien più certo ed è men soggetto ad esser mal conosciuto.

880. Per altro una divisione di soli gradi sarebbe il più delle volte presso che inutile; e non vi è chi non cerchi così nel quadrante come in qualsivoglia altro Strumento la più minuta ed insieme la più distinta suddivisione che sia possibile. Ciò si è ottenuto coll' ingegnosissima applicazione del *nonio* o *vernier* di cui è bene conoscere la natura e l' uso.

91 Sia RT una porzion di circolo graduata da suddividersi, ed NQ il nonio da apporvisi, cioè un pezzo di ottone o d' argento, mobile intorno ad RT in un perpetuo contatto e perciò sul medesimo centro. Sia vi una parte di arco chiamata a, divisa nel circolo in n porti (nella figura è in 5 segnate A, B, C, D, E) e nel nonio in $n \pm 1$ (nella figura è in $n+1=6$, segnate a, b, c, d, e, f) e sia v l' indice che dee segnare le suddivisioni e che ora corrisponde alla linea O. Poichè la porzione OA del

circolo $= \frac{a}{n}$ e la porzione *oa* del nonio $= \frac{a}{n \pm 1}$, la lor 91 differenza sarà $\frac{a}{n} - \frac{a}{n \pm 1} = \frac{a}{n(n \pm 1)}$ (nella figura è $\frac{a}{30}$), e allorchè movendosi il nonio verso T, sarà giunta *a* in dirittura di A e le due linee coincideranno divenendo come una sola *a*A, l'indice avrà trascorso uno spazio $= \frac{a}{n(n \pm 1)}$; così avrà trascorso $\frac{2a}{n(n \pm 1)}$ allorchè coincideranno *b* e B ec., e segnerà oltre al numero dei gradi che è in O, il corrispondente numero delle parti o la frazione del grado seguente che si ricerca (nella figura ciascun *passo* sarà $= \frac{a}{30}$, e poichè $a = 5°$, si avrà $\frac{a}{30} = \frac{5°}{30} = \frac{1°}{6} = 10'$). Con questo artifizio inventato secondo alcuni da Pietro Nonio, e secondo altri da Pietro Vernier si portano le suddivisioni, anche nelle macchine di mediocre grandezza, ad una piccolezza e a una precisione incredibile. Per darne qualche altro esempio, sia 1°: *a* un arco di 7°, ed ogni grado diviso in 5 parti, onde $n = 35$; se vi si applichi un nonio eguale, diviso in 36 parti, avremo il passo $= \frac{7°}{35 \cdot 36} = \frac{7°}{1260} = \frac{2520''}{1260} = 20''$; 2°. sia $a = 6°\ 20'$, e ogni grado sia diviso in 3 parti; sarà $n = 19$, e dividendosi il nonio in 20, avremo $\frac{6°\ 20'}{19 \cdot 20} = \frac{380'}{380} = 1'$.

881. Suppongasi ora che fissata la divisione dei gradi, ciascuno in *r* parti, si voglia l'ampiezza *p* dell'arco e del nonio per ottener *t* secondi. Saran dunque le divisioni dell'arco $= rp$, ed $rp \pm 1$ quelle del nonio; dunque $\frac{p°}{rp(rp \pm 1)} = t''$ cioè $\frac{1°}{r(rp \pm 1)} = \frac{t''}{3600}$, e quindi $r^2p \pm r = \frac{3600}{t}$, e $p = \frac{3600 \mp tr}{tr^2}$.

Esempio. Vogliasi $t = 4''$, mentre $r = 12$; sarà $p = \frac{3600 \mp 48}{4 \cdot 144} =$ (preso il segno di sopra) $\frac{74}{12} = 74$ divisioni, cioè (perchè ogni divisione dell'arco contiene 5') $= 6°\ 10' = 22200''$, e il nonio dovrà dividersi in 75 parti, d'onde

$\frac{22200}{74 \cdot 75} = 4''$. Il segno inferiore + darebbe $\frac{76}{12}$ cioè 76 parti ($= 6° 20'$) e il nonio dovrebbe averne 75 nel modo stesso: La prima maniera per altro è la più comune.

Dalla medesima formula si ha anche t, conoscendosi p ed r, cioè $t'' = \frac{3600}{pr'' \pm r}$, preso p in gradi e parti di grado; così, posti i dati dell'esempio di sopra, si ha $r = 12$, $p = 6\frac{2}{12} = 6\frac{1}{6} = \frac{37}{6}$ e $t = 4$, come si sapeva.

882. Le condizioni richieste per la perfezione di un buon Quadrante son le medesime o sia egli murale o sia mobile, giacchè il murale non differisce dall'altro che nell'esser fissato in una muraglia alzata precisamente sulla sezione del meridiano del luogo, e fermato in guisa che dei suoi lati l'uno sia normale e l'altro parallelo all'orizzonte e che il moto sia nel telescopio; laddove il Quadrante mobile può girare intorno al suo centro di gravità portando il telescopio fisso sopra un de' lati, può collocarsi in qualunque verticale ec. Ma l'ottener nei Quadranti una perfezione assoluta non è sì facile, e si sa bene quanto sia grande l'industria e la pazienza degli Astronomi così per rettificare con lunghe prove quegli strumenti medesimi ch'escon dalle mani di Artifici i più esperti ed accreditati, come per assicurarsi di aver situato tutto opportunamente. Giacchè non possono quì aver luogo tutte le cautele da praticarsi e le correzioni dei particolari difetti di cui può accorgersi l'Osservatore sul fatto, ci contenteremo di soggiunger un'essenziale avvertenza sul passaggio degli astri fuori della linea di collimazione, riescendo spesso che questi non attraversino precisamente il campo del telescopio nel centro, a cui soltanto si riferiscono le graduazioni del lembo.

90 883. Supposto AB il filo orizzontale del micrometro, è chiaro che la retta AB essendo tutta nella sezione di un cerchio massimo, non coincide coll'almicantarat ricercato se non in C, e che perciò tutti i punti di quà e di là da C son più bassi di C. Pongasi dunque che l'astro passi per D, ove l'altezza è per conseguenza minore, e si cerchi la correzione opportuna da. Sia CD $= m$ la distanza dal centro, a l'altezza indicata dal Qua-

drante, VC la sezione del verticale, e V lo zenit. Se si supponga da V condotto un verticale per D, sarà VD l'ipotenusa di un triangolo sferico rettangolo e si avrà (*L.* 703) R : *cos* VC (*sen a*) :: *cos* DC (*cos m*) : *cos* VD (*cos* (VC + *da*) = *sen* (*a* — *da*)), onde $da = tang\ a \left(\frac{1 - \cos m}{R}\right) =$ (*L.* 622. 32ª.) $\frac{2\ tang\ a}{R} sen^2 \frac{m}{2}$ (ovvero facendo per la piccolezza dell'arco *m*, $sen \frac{m}{2} = \frac{m}{2}$), $da = \frac{m^2\ tang\ a}{2R} = \frac{m^2\ tang\ a}{2 \times 57°,296}$ (*L.* 522). Quanto al valor di CD = *m*, se si accompagni col filo *cursore nn'* (601) l'astro finchè attraversi il filo orizzontale AB, e si conosca la misura del campo del telescopio (872), lo stesso meccanismo che muove il filo cursore farà conoscere CD col determinare il rapporto tra CD e CB.

884. Alle macchine già descritte potrebbe aggiungersi la ***Macchina Parallattica*** così detta dai paralleli che ella descrive; poichè girando sopra due poli corrispondenti ai poli del Mondo e portando un circolo di declinazione per cui il telescopio può allontanarsi dal piano dell'equatore di un dato arco, prende un moto che seconda il moto diurno dell'Astro osservato, e lo fa restare costantemente nel mezzo del campo ottico: così potrebbe aggiungersi il *Settore d'aberrazione*, macchina destinata a indagar l'aberrazione delle stelle che passan per lo zenit o a lui molto vicine: così potrebbe parlarsi di più altre Macchine onde vedonsi riccamente forniti gli Osservatorj: ma le avvertenze particolari che quì potrebbero darsi rispetto a queste o si riferiscono alle già date, o si deducon da quelle assai facilmente, o non possono intendersi senza la minuta descrizione delle stesse macchine.

885. Quello di cui non possiamo omettere di parlare è il *Circolo repetitore*, detto così perchè somministra il mezzo di reiterar molte volte di seguito e con prontezza quelle osservazioni le queli colle altre macchine non potevan farsi che una sola volta o almen poche più per giorno, e che colla somma degli angoli divisa per il numero delle osservazioni dà un risultato in cui son distrutti o impiccoliti prodigiosamente gli errori di divisione e di lettura se ve ne siano. Questa macchina ideata da Mayer,

perfezionata da Borda fu sul principio uno strumento marino. Tolti gli specchi che ne facevano parte, e adattata alle Specole fisse, ha procurato vantaggi immensi all' Astronomìa, l' ultimo dei quali non è certamente quello di potersi in una sola notte determinare la latitudine di un paese con precisione di 1″.

95 886. Sieno due circoli esattamente concentrici AB*aba*′ e *pmp*′*m*′*p*″ mobili indipendentemente l' uno dall' altro intorno all' asse C ed in un perpetuo contatto; e siano TR, *tr* due canocchiali, l' uno nella parte anteriore, l' altro nella posteriore. Il primo di detti circoli è diviso in gradi ec., ed il secondo o interno porta il canocchiale TR cui vanno uniti due o quattro nonj per più sicuro riscontro delle suddivisioni. Sul canocchiale posteriore è fissata una livella sensibilissima. Anche l' asse C porta una simile livella che forma angolo retto coll' altra.

Senza dar quì un minuto dettaglio delle parti che servono a sostenere e rettificar l' Istrumento, o del circolo azimutale ec. ecco l' uso fondamentale di esso. Sia S il Sole o una Stella ec. da osservarsi. Posto TR sul principio delle divisioni del circolo AB cioè sul zero, e fatte orizzontali le due livelle rettificate, si cerchi col canocchiale TR fermato al lembo del circolo stesso AB, l' astro S e si notino (tanto ora che in ogni osservazione) con un cronometro esatto gl' istanti precisi in cui l' Astro è al centro del canocchiale. Fatto ciò, si giri per 180° tutta la macchina, il cui punto A passerà in *a* conducendo il canocchiale nella parte opposta cioè in C*m*. Allora (consultata prima l' orizzontalità delle due livelle) sciolto dal circolo AB il canocchiale TR, si porti nuovamente sull' Astro S, e si avrà l' angolo AC*a*, doppio dell' angolo ACB cioè della distanza dell' Astro dallo zenit. Queste si chiamano due *osservazioni conjugate*. Dopo ciò, fermato di nuovo in *a* al lembo del circolo il canocchiale, si rivolti come prima; e poichè egli si troverà allora nella direzione *p*′*d*, si muova il circolo unito al canocchiale verso BA, finchè si abbia l' incontro dell' astro colla linea di collimazione senza che sia alterata la situazione delle livelle; allora si giri al solito sulla parte opposta la macchina, e stando fermo il circolo AB*aba*′, si porti

il canoc-

il canocchiale sopra S; si avrà un nuovo angolo, doppio partendo dal punto a, e quadruplo partendo dal punto A, della distanza cercata dallo zenit. Così può di seguito aumentarsi a piacere il numero delle osservazioni, e sempre più si distruggeranno le inesattezze.

887. Se non che questi angoli e queste distanze dallo zenit han bisogno di correzione, perchè l'Astro, per quanto possano essere sollecite le operazioni, cangia nel tempo di esse e verticale ed altezza. Ecco pertanto un idea del metodo di trovar questa correzione.

Sia P il polo, Z lo zenit, A l'Astro osservato, δ la sua declinazione, a la sua altezza sull'orizzonte, l la latitudine del Paese; sarà $PZ = 90^\circ - l$, $PA = 90^\circ - \delta$, $ZA = 90^\circ - a$, distanza *osservata* dallo zenit, ZA' quella dell'Astro medesimo nel meridiano; e poichè $PA = PA'$, sarà $ZA' = PA - PZ = l - \delta$; e quindi essendo sempre $ZA > ZA'$, si farà $ZA\ (= 90^\circ - a) = l - \delta + x$; onde $sen\, a = cos(l - \delta + x) =$ (L. 615. 13ª) $cos(l - \delta)\, cos\, x - sen(l - \delta)\, sen\, x =$ (646) $sen\, l\, sen\, \delta + cos\, l\, cos\, \delta\, cos\, h$ (h è l'angolo orario) $=$ (L. 622. 33ª) $sen\, l\, sen\, \delta + cos\, l\, cos\, \delta - 2 cos\, l\, cos\, \delta\, sen^2 \frac{1}{2} h = cos\, (l - \delta) - 2 cos\, l\, cos\, \delta\, sen^2 \frac{1}{2} h$.

74

Da questa equazione, sostituendovi opportunamente $\frac{1}{2} sen^2 x$ ad $1 - cos\, x$ che non ne differisce se non di una quantità piccolissima del quarto grado cioè di $2 sen^4 \frac{1}{2} x$, sciogliendo in serie il termine $2 sen^2 \frac{1}{2} h = 1 - cos\, h$ (L. 628) e le sue potenze, e dando ad h il valor dedotto dal tempo t avuto in minuti primi dall'osservazione, si ha esattamente il valore di $sen\, x$; e fatto $l - \delta = z$, $\frac{cos\, l\, cos\, \delta}{sen\, z} = b$, $sen\, x = x$ ed $\frac{x}{sen\, 1''} = r$ che è sempre negativa, si ottiene la correzione cercata in secondi d'arco, cioè

$$r = -1{,}963495\, bt^2 + 0{,}093456 \left(\frac{b}{3} + b^2 cot\, z\right)\left(\frac{t^2}{100}\right)^4$$
$$- 0{,}000089 \left(\frac{b}{45} + \frac{b^2 cot\, z}{3} + b^3 cot^2 z\right)\left(\frac{t^2}{100}\right)^3.$$

888. Tale è la formula che l'egregio Sig. Francesco Carlini, uno dei chiarissimi Astronomi di Milano, ha dedotta dal calcolo del Sig. De Lambre. Vedansi le sue efemeridi del 1809, ove ha inserite tre comodissime Ta-

vole per aver prontamente i coefficieneti di questa serie alla latitudine di 45° 28′.

Che se si segni con $\int$ la somma dei tempi, degli archi ec. dati da un numero successivo d'osservazioni, fatte col Circolo repetitore, e si chiamino M, N, P i coefficienti delle potenze di t, sarà finalmente.

$$\int r = -M\int t^2 + N\int\left(\frac{t^2}{100}\right)^2 - P\int\left(\frac{t^2}{100}\right)^3 + \text{ec.},$$

valore che unito alla variazion di declinazione, dove abbia luogo, e a quella di refrazione, si dividerà per il numero delle osservazioni e darà il preciso della correzione. Avvertiremo quì solamente che può farsi comodo uso della prima Tavola del Sig. Carlini anche per la latitudine di Firenze se si moltiplichi per 1,0295 il valor di M o se al logaritmo corrispondente, si aggiunga 0,01263.

Tavole Astronomiche e loro uso.

889. Le Tavole astronomiche a cui bisogna ricorrere, posson considerarsi come divise in due classi: l'une immutabili e universali, almeno sensibilmente, per tutti i luoghi del Mondo, come son quelle delle longitudini e latitudini così geografiche (612) come celesti (620) relativamente alle fisse, della quantità dei moti planetarj ec., l'altre riferite a un meridiano particolare, e variabili per qualunque altro, come sono tutte le Tavole orarie (625). Se le prime non abbisognano di riduzione, le seconde posson riceverla con facilità, purchè si conosca la differenza tra il meridiano per cui furon calcolate e quello in cui è l'Astronomo che le usa. Noi non solo abbiamo accennato (625, 627) il fondamento del metodo universale con cui le Tavole si riducono per i differenti paesi; ma anche nell'esposizion delle teorìe abbiam dati non pochi mezzi onde calcolarne di nuovo la maggior parte se occorra.

Il dettaglio che si troverà delle nostre Tavole poste sul fine di questo Libro, con gli usi loro e con gli esempj che se ne daranno, ci dispensano dall'estenderci su questo articolo. Le abbiamo divise in quattro parti, cioè in *Generali*, *Solari*, *Lunari* e *Planetarie*, formandole ed ordinandole quasi tutte di nuovo sui fondamenti sommi-

nistrati dalle più sicure teorìe e in specie da quella del Sig. Sen. La-Place e sui lumi dei più celebri Astronomi di cui abbiam fatta replicatamente menzione, con calcoli i più scrupolosi.

890. Quello che può solamente aver luogo quì, è un' idea del metodo delle *interpolazioni*, tanto comodo ed anche necessario nell' uso delle comuni Efemeridi. Per tale oggetto servirà dar la soluzione del seguente Problema.

Supposto che siansi calcolate le longitudini della ☽ almeno per quattro dì consecutivi a mezzogiorno, cioè per il 5, 6, 7 e 8 di Dicembre 1811, se ne cerchi la longitudine vera per le ore 9 del dì 6.

Chiamando λ la longitudine della ☽ per il mezzogiorno m del dì 6, siano δm, $2\delta m$ ec. gli uniformi aumenti del tempo, e λ, λ', λ'' ec. le longitudini lunari che vi corrispondono, le cui prime, seconde ec. differenze si chiamino d', d'', ec. Se m divenga $M = m + n\delta m$, anche λ si cangierà (*L.* 823) in $\Lambda = \lambda + nd' + n\left(\frac{n-1}{2}\right) d'' + n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right) d''' +$ ec. Ora poichè i valori m, $m + \delta m$ differiscono di 24^{or}, sarà $\delta m = 24$; e fatto perciò $n\delta m = h =$ all' ora proposta, avremo $n = \frac{h}{24}$, d' onde sostituito questo valore, si otterrà $\Lambda = \lambda + \frac{h}{24} \times d' - \frac{h}{24^2}\left(\frac{24-h}{2}\right) d'' + \frac{h}{24^3}\left(\frac{24-h}{2}\right)\left(\frac{2.24-h}{3}\right) d''' -$ ec. Scrivo dunque come quì sotto le longitudini $'\lambda$, λ, λ', λ'' per i giorni 6, 7, 8 e 9, ricavandone le differenze prime e seconde, ed ho

	λ	d'	d''
per il dì 5 ...	4ˢ 15° 52′ 28″		
		12° 2′ 14″	
6 ...	4 27 54 42		9′ 58″
		11 52 16	
7 ...	5 9 46 58		4 28
		11 47 48	
8 ...	5 21 34 46		

trovo pertanto $d = 11° 52' 16''$, e prendendo per esattezza maggiore in vece della differenza seconda $- 4' 28''$, il medio aritmetico tra essa e la precedente, faccio $d'' = - 7' 13''$ ed $h = 9$, d' onde ricavo (non oltrepassando le dif-

ferenze seconde) $\Lambda = \lambda + \frac{9 \times 11° 52' 16''}{24} - \frac{9 \times 15 \times 7' 13''}{2.24.24} = \lambda + 4° 23' 6'' + 50'',7 = 5^s 2° 18' 38'',7$.

Gnomonica.

891. Il centro d' un foro o il vertice d' uno stile, quello coll' immagine solare e questo coll' ombra, possono indicar l' ora vera per mezzo delle sezioni dei circoli orarj segnate sopra una superficie in cui cada l' ombra o l' immagine. Questo foro o questo vertice si chiama *Gnomone*; e il metodo di condurre quelle sezioni, è ciò che si dice *Gnomonica* o *Scienza degli orologi solari*; nè vi è superficie, comunque situata e comunque irregolare, su cui non possa segnarsi un orologio: ma poichè i metodi che potrebbero darsene, variano all' infinito o son puramente meccanici, non tratteremo che delle superficie piane, anzi ci limiteremo ai soli orologi orizzontali e verticali, che sono di un maggior uso. Gli uni e gli altri han questo di comune, che il centro o punta G dello gnomone rappresenta il centro terrestre (867) e che le linee dell' ore VM, VB ec. cioè le rette (L. 532) esprimenti quelle comuni sezioni, tutte convergono in un sol punto V chiamato il *centro dell' orologio*, il quale per gli abitanti dell' emisfero settentrionale rappresenta nei verticali il polo boreale, negli orizzontali l' australe, al contrario di quel che accade tra gli abitanti dell' emisfero opposto. Quindi 1°. una retta GV che si conduca dallo Gnomone a questo centro è parallela all' asse del mondo, e si chiama *asse dell' orologio*; 2°. una retta GA condotta da G normale all' asse GV, sarà nel piano dell' equatore e potrà chiamarsi *raggio dell' istesso equatore*; 3°. la retta N'N sarà la sezione dell' equatore coll' orizzonte e dicesi *linea equinoziale* per cui scorre l' ombra o l' immagine solare nei giorni degli equinozj; 4°. la retta GC che dallo gnomone G cade normale sul piano, si chiama *stile* e il punto C in cui tocca il piano, dicesi *piede dello stile*.

89 e 91

892. Se dunque nel piano orizzontale VBM*d* si descriva col centro C un arco *m*M*h* ove cader possa il centro dell' immagine solare o il vertice dell' ombra, e pren-

89

dansi accuratamente i due punti m, h ove succede l'intersezione prima e dopo il mezzogiorno, è certo che supposta costante la declinazione del ◉ nell'intervallo delle due intersezioni, e dividendosi in mezzo l'arco mh nel punto M, la retta CM sarà la meridiana, che riuscirà più sicura se con altri circoli concentrici come fDg ec. si moltiplichi la medesima osservazione e bisezione degli archi fg ec. i cui punti medj D, M ec. debbon essere in linea retta tra loro e con C, se le osservazioni sian fatte con precisione, o almeno faran conoscere (prendendo la media direzione tra essi) la meridiana più approssimata. Che se la declinazione del ◉ cangi sensibilmente, la meridiana sarà tanto erronea quanta è la differenza del tempo tra il mezzogiorno reale e quello della linea condotta. Perciò trovato questo tempo (739) e facendo uso del metodo dato altrove (868), si avrà la meridiana corretta. 89

893. Determinata pertanto questa, e conoscendosi la latitudine l del Paese, si avranno subito (868) i valori di GC, CA, GA e VC; si troveran parimente (869) i limiti solstiziali della meridiana e finalmente la direzione di tutte le linee orarie; ove si osservi 1°. che la linea iVi' dell'ore 6 antemeridiane e pomeridiane è una parallela all'equinoziale NN', normale perciò a VM; 2°. che prolungate al di là di V le linee orarie della mattina, daranno l'ora corrispondente per la sera, e all'opposto: così se Vu sia la linea delle 5 pomeridiane, il suo prolungamento Vu' segnerà le 5 della mattina; poichè facendosi da qualunque circolo orario nella sua intersezione col meridiano i due angoli conseguenti eguali a due retti (L. 678. 2°), la somma dei due angoli orarj sarà $180° = 12^h$ e quindi le due ore indicate prima e dopo mezzogiorno avranno lo stesso nome.

894. Si cerchino ora i limiti solstiziali delle linee orarie, e si determini primieramente la lunghezza dell'asse VG e l'angolo GVB dello stesso asse colla linea oraria VB. Poichè nel triangolo GVC si ha $GC = g$ e l'angolo $GVC = l$, sarà $VG : GC :: 1 : sen\, l$, e perciò $VG = \frac{g}{sen\, l}$; e poichè nel triangolo AGn rettangolo in A abbiamo l'angolo $AGn = h°$, eguale all'angolo della

89 data ora, e il raggio equatoriale $GA = \frac{g}{\cos l}$, sarà $\cos AGn$: $GA :: 1 : Gn = \frac{g}{\cos l \cos h}$; quindi nel triangolo VGn in cui sempre è retto l'angolo G, chiamando q l'angolo GVn, si troverà $VG : Gn :: 1 : tang\, q = \frac{tang\, l}{\cos h}$. Posto ciò, si conduca da G la Gk normale a Vn, ed avremo $1 : VG :: sen\, q : Gk = \frac{g\, sen\, q}{sen\, l}$, d'onde $kn = Gk\, tang \times nGk = Gk\, tang\, q$ (L. 473) $= \frac{g\, sen\, q\, tang\, q}{sen\, l}$. Quanto all'angolo AV$n$, che chiamerò m, fatto dalla linea oraria colla meridiana, le due proporzioni $Vn : 1 :: VG : \cos q :: VA : \cos m$ daranno $\cos AVn = \cos m = \frac{\cos q}{\cos l}$.

Supposti ora t e t' i limiti cercati, ed immaginando condotte le rette Gt, Gt' (queste e simili rette facili a concepirsi si sopprimono nella figura per evitare la confusione), avremo nei due triangoli VGt, VGt' l'angolo $V = q$, l'angolo $G = 90° \mp O$ (O è l'obliquità dell'eclittica) e l'angolo t o t' supplemento degli altri due; onde (L. 636) $sen\,(180° - q - 90° \pm O) : VG :: sen\,(90° \mp O) : \frac{Vt}{Vt'}$; e quindi $\frac{g \cos O}{sen\, l \cos(q \mp O)}$ esprimerà la *distanza dei limiti dal centro dell'orologio*; sostituendo δ ad O la formula diverrà $\frac{g \cos \delta}{sen\, l \cos(q \mp \delta)}$ e darà il luogo dell'ombra o raggio solare per tutti i giorni; ove finalmente se in luogo di q sostituiscasi l, la formula apparterrà alla meridiana orizzontale, con cui facilmente potrà segnarsi sopra di essa la serie delle declinazioni solari, i mesi, i giorni ec.

895. Se sia ora $t'D$ normale a VD e si chiami $VD = x$, $Dt' = y$, sarà $Vt' = \sqrt{(x^2 + y^2)} = \ldots\ldots \frac{g \cos \delta}{sen\, l\,(\cos q \cos \delta \pm sen\, q\, sen\, \delta)}$; e poichè $Vt' : VD :: 1 : \cos m\ (= \frac{\cos q}{\cos l})$ e perciò $\cos q = \frac{x \cos l}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$ e $sen\, x = \ldots\ldots \frac{\sqrt{(x^2 + y^2 - x^2 \cos^2 l)}}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$ (L. 610. 9°), sostituiti questi valori

FIG. 89

nell' equazione proposta e riducendo, avremo

$$y^2 = \left(\frac{\cos^2 l - \text{sen}^2 \delta}{\text{sen}^2 \delta}\right) x^2 - \left(\frac{2g \cot^2 \delta}{\text{tang}\, l}\right) x + \frac{g^2 \cot^2 \delta}{\text{sen}^2 l}$$

equazione alla curva delle linee orarie che è sempre una curva conica (L. 806) fuorchè nel caso di $\delta = 0$, in cui degenera in linea retta. Passiamo agli orologj verticali.

896. Vi son dei piani verticali che non hanno declinazione, e son quelli nei quali lo *stile* è esattamente nel meridiano. In questi descrivesi l' orologio precisamente come negli orizzontali, ed hanno luogo le stesse formule colla sola diversità che il punto V occupa le sommità, e l'angolo CGV che negli orizzontali è il complemento della latitudine, quì diviene $= l$. Perciò dee cangiarsi in tutte le formule l in $90° - l$ e q in q'; onde per es. quella dei limiti sarà $\frac{g \cos \delta}{\cos l \cos (q' \mp \delta)}$, e per la meridiana $\frac{g \cos \delta}{\cos l\, \text{sen} (l \pm \delta)}$.

897. Ma è raro assai che si incontri una posizione così perfetta; e perciò bisogna prima di tutto cercar la *declinazione del piano*, cioè l'angolo iVu fatto dalla sua sezione orizzontale $u'u$ con la sezione orizzontale ii' del primo verticale, o che è lo stesso, l' angolo fatto dalla linea meridiana m'VM con una retta $m'u'$ normale al piano medesimo. Questa declinazione dicesi *orientale* o *occidentale* secondochè il piano è volto da mezzogiorno o verso l' oriente come nella figura, o verso l' occidente. Vi sono varj istrumenti e metodi pratici che si propongono per determinar la declinazione; ma l' insufficienza di alcuni per misure assai scrupolose, l' incertezza degli altri, in particolare di quelli in cui si usa la calamita, e la difficoltà di procurarsi que' pochi che sarebbero meno equivoci, ci dee far preferire le vie del calcolo, che oltre l' esser più analoghe al nostro istituto, hanno di più il vantaggio di una maggior precisione, escludendo molti di quelli errori cui è soggetta la pura pratica nelle costruzioni geometriche un poco complicate, ove lo sbaglio di un solo punto influisce spesso sopra il totale dell' operazione.

898. Sia dunque VOPQ un piano verticale e G un 91

91 punto elevato sopra di esso, da cui discende GC normale al medesimo, e GV parallela all'asse del Mondo. Sarà dunque G uno gnomone, GC lo stile, GV l'asse, V il centro dell'orologio da delinearsi, e la retta VM perpendicolare all'orizzonte, sarà la *meridiana*; poichè essendo il meridiano quello trai verticali che passa a un tempo per lo zenit e per il polo, tale dev'esser necessariamente il piano steso per GV e VM, il cui prolungamento ferisce il polo coll'asse GV, e lo zenit colla sezion perpendicolare MV; e quì si osserverà di passaggio, che conducendosi per V e C la retta VCD (che si chiama la *sustilare*) questa sarebbe una sezion meridiana per un paese il cui zenit fosse nella direzione DV e la cui latitudine fosse perciò l'angolo CGV. Per questa ragione la sustilare si chiama anche la *meridiana del piano*, mentre VM è la *meridiana del luogo*.

899. Fissandosi la posizion dello stile C e la sua altezza GC, ed avendosi o una meridiana orizzontale o un buono orologio che segni con esattezza l'istante del mezzogiorno, basterà notare il punto dell'ombra o del centro dell'immagin solare, che cada per es. in m; una verticale Vm condotta col filo a piombo per m, sarà la meridiana cercata; e quindi condotta da C un'orizzontale CR che taglierà Vm in E, avremo coi lati CG $= g$ e CE che chiamerò u, la declinazione d del piano cioè (L. 646) $tang\, d = \frac{CE}{CG} = \frac{u}{g}$.

900. Ma non avendo un tal comodo, potrà cominciarsi dalla ricerca della *sustilare*, usando in mancanza di altri metodi quello dei circoli concentrici (892) dai quali coi punti S di bisezione e col centro C si otterrà la retta cercata SCV. Allora dal punto C si alzerà Cq = CG e normale a CV, e fatto colla retta gV l'angolo CqV $= l$, la retta qV determinerà il centro dell'orologio, e quindi la meridiana Vm e la declinazione CGE (898)

901. Può anche determinarsi la declinazione astronomicamente così: Eretto nel piano verticale VOSR lo stile CG e condotta come sopra l'orizzontale CR, si osservi in una data ora l'ombra o l'immagin solare in Q e condotta la verticale PQ, si misuri CG e CP e si calcoli

l'angolo

l'angolo CGP che chiamo b (L. 646); indi supposta nota la latitudine del Paese e la declinazione attuale del Sole, se ne trovi l'azimut z per mezzo dei due valori $tang\frac{1}{2}(z+p)$ e $tang\frac{1}{2}(z-p)$ (667) in cui colla somma dei risultati sparisce p e resta il valor di $z = PGE$; e quindi si conoscerà la situazion della meridiana in GE e si avrà la declinazione $d = b \mp z$. Ove si osservi che sebbene nelle formule proposte (667) suppongasi conosciuta h, contuttociò non influendo un mediocre errore di essa se non che assai poco sul valor di z, può bastare che si conosca l'ora soltanto approssimatamente, il che non è quasi mai difficile.

902. Frattanto poichè l'ombra sul piano cammina sempre dalla sinistra alla destra per chi lo guarda di faccia, è facile di conoscere se la declinazione di esso sia orientale o occidentale, purchè si sappia se l'osservazione dell'ombra ec. siasi fatta prima o dopo il mezzogiorno; il che può sempre distinguersi (mancando ogni altro indizio) dall'aumento o diminuzione successiva dell'altezza solare indagata con ripetute osservazioni. Supponendosi fatta *prima* del mezzogiorno, se il verticale dell'ombra sia a destra del verticale Cu del piano e passi per esempio per i, la declinazione è orientale; ma se l'ombra cada alla sinistra di Cu come nella verticale condotta per k o k', la declinazione sarà orientale sol quando il punto C sia tra il punto k o k' della verticale dell'ombra, e il punto E della meridiana; e sarà occidentale se il punto E sia a sinistra anch'esso di Cu. Facendosi l'osservazione *dopo* il mezzogiorno, se l'ombra cada sulla sinistra come nella verticale condotta per k o k', la meridiana sarà più a sinistra di essa e il piano declinerà in occidente; ma cadendo l'ombra alla destra come in PQ, la declinazione sarà occidentale sol quando la verticale Cu resti tra PQ e la meridiana che si suppone in k o k', e sarà orientale se la meridiana sia in i, e Cu rimanga alla sinistra di tutte due.

903. Determinata la declinazione d, facciasi CE $= g\ tang\ d$, e si chiami l' l'angolo GVC che si chiama la *latitudine del piano*. Poichè l'angolo VGE $= l$, latitudine del luogo, si avrà

91 I°. $1 : GE (= \sqrt{(g^2 + tang^2\, d)} = \sqrt{g^2 \sec^2 d} = \frac{g}{\cos d}) ::$ $tang\, l : EV = \frac{g\, tang\, l}{\cos d}$;

II°. $\cos l : GE :: 1 : GV = \frac{g}{\cos l \cos d}$;

III°. chiamando p l'angolo CVE della sustilare colla meridiana, sarà $VE : CE :: 1 : tang\, p$, e sostituiti i valori, $tang\, p = sen\, d \cot l$;

IV°. $VG : CG :: 1 : sen\, GVC = sen\, l' = \cos l \cos d$;

V°. condotta da G la GA normale a GV, essendo GC perpendicolare al piano, sarà $CGA = CVG = l'$ e quindi $\cos l' : CG\, (g) :: 1 : GA = \frac{g}{\cos l'} = r$;

VI°. $sen\, l' : GA :: 1 : AV = \frac{g}{sen\, l' \cos l'}$.

Stesa per A la retta N'N normale alla sustilare, sarà questa la sezione dell'equatore (904) cioè la retta *equinoziale*, su cui si dovranno determinare i punti d'intersezione delle linee orarie, incominciando da M; perciò congiunta GM e presa $AD = AG = r$, converrà prima determinar l'angolo $AGM = ADM = \lambda$, *differenza di longitudine* tra la meridiana del piano e quella del luogo: e ciò si avrà facilmente, determinato che sia il valor di AM colla proporzione;

VII°. $1 : tang\, p :: AV : AM = \frac{g\, tang\, p}{sen\, l' \cos l'} = \frac{g\, sen\, d \cot l}{sen\, l' \cos l'}$;

d'onde si ha;

VIII°. $AD\ (= AG = \frac{g}{\cos l'}) : AM :: 1 : tang\, \lambda = \frac{sen\, d \cot l}{sen\, l'} = \frac{sen\, d \cot l}{\cos l \cos d} = \frac{tang\, d}{sen\, l}$.

904. Fatto ora $MDH = 15°$, $MDH' = 30°$ ec. i punti H, H' ec. determineranno l'intersezioni delle linee orarie pomeridiane; e quindi facendo $r\, tang\, \lambda = \Omega$ e chiamando Ω', Ω'' le distanze delle linee orarie antemeridiane e pomeridiane dalla sustilare, prese sull'equinoziale N'N, si avrà Ω', Ω'' ec. $= r\, tang\, (\lambda + 15°)$, $= r\, tang\, (\lambda + 30°)$ ec. e generalmente $= r\, tang\, (\lambda + h)$. Parimente fatto $MDr = 15°$, $MDt = 30°$, $MDn = 45°$ ec., i punti r, t, n daranno l'ore della mattina, e si avrà $Ar =$

$r\,tang\,(\lambda - 15^\circ)$, $At = r\,tang\,(30^\circ - \lambda)$ ec. e generalmente $\Omega' = r\,tang\,(\lambda \backsim h)$; cioè la distanza di qualunque linea oraria si esprimerà dall'equazione $\Omega = r\,tang\,(\lambda \pm h)$, ove il segno superiore ha luogo da M verso N' e l'inferiore da M verso N.

È chiaro intanto che determinate col calcolo le misure della retta AV e delle distanze orarie AM, AH, AH' ec. sull'equinoziale N'N, se da un qualunque altro punto C della sustilare si conduca una parallela alla stessa N'N e si prendan sopra di essa le parti simili nella proporzione di AV : AV — AC, si avranno altrettanti punti delle medesime linee orarie, e potrà descriversi egualmente l'orologio, senza che vi sia bisogno del centro.

905. Data finalmente una linea oraria qualunque Vn, si cerchi l'angolo m' fatto da essa colla sustilare VD, e l'angolo q' fatto coll'asse VG. Quanto al primo, abbiamo nel triangolo VAn, $AV : An :: 1 : tang\,m' = sen\,l'\,tang\,(\lambda \mp h) = cos\,l\,cos\,d\,tang\,(\lambda \mp h)$. Supponendosi congiunta Gn, si avrà $Gn = \sqrt{(GA^2 + An^2)}$ $= \sqrt{\left(\frac{g^2}{cos^2 l'} + \frac{g^2\,tang^2(\lambda \mp h)}{cos^2 l'}\right)} = \frac{g}{cos\,l'} \times \frac{1}{cos(\lambda \mp h)}$; d'onde in ultimo si ha $VG : Gn :: 1 : tang\,q' = \frac{sen\,l'}{cos\,l'\,cos\,(\lambda \mp h)}$ cioè $cot\,q' = cot\,l'\,cos\,(\lambda \mp h)$.

906. Per trovar praticamente i limiti delle linee orarie, preso come diametro l'intervallo Vn tra il centro V dell'orologio e l'intersezione della retta oraria coll'equinoziale, descrivasi il semicircolo $VG'n$ a cui si applichi $VG' = VG$, unendo $G'n$. È chiaro che supposta unita anche Gn, il triangolo $VG'n$ è lo stesso che VGn rivolto intorno a Vn e posato sul piano $VG'nM$; e quindi condotta $G'b$ normale a Vn, l'angolo $nVG' = nVG = q' = bG'n$. Se dunque si conducano le rette G'L, $G'l$ tali che sia l'angolo $LG'n = nG'l = O$ obliquità dell'eclittica, ovvero $= \delta$, declinazione del ☉, si avranno i limiti solstiziali L, l, ovvero i punti di corrispondenza per qualsisia parallelo solare. Del resto la lunghezza di una linea oraria qualunque VL, si troverà come sopra (894) supponendo congiunti con una retta i punti G ed L ed applicandovi il raziocinio medesimo che darà $VL = \frac{g\,cos\,\delta}{cos\,l\,cos\,d\,cos\,(q' \mp \delta)}$, ove il segno

FIG.
91 di sopra serve se δ è australe.

Quì si osservi 1°. che è assai più utile il collocare negli orologi solari l'asse GV piuttosto che lo stile GC. Questo non segna l'ora se non col vertice G; e quindi nella direzione un poco obliqua dei raggi, l'ombra o l'immagine escono molto spesso dai limiti del piano; laddove tutti i punti di GV servono a indicar l'ora in qualunque modo il Sole lo illumini: ed in tal caso la linea oraria Ll dovrà estendersi oltre il limite invernale l fino in vicinanza del centro V: 2°. che volendo delineare sugli orologj solari le *ore italiane* le quali cominciano mezz'ora dopo il tramontar del Sole, o le Babiloniche le quali cominciano al suo levarsi, basterà per la pratica, che si sappia a qual ora tramonti il Sole nei due giorni dell'equinozio e del solstizio invernale. Trovati i due punti che indicherebbero una mezz'ora più tardi, per esempio l ed H', la linea che si conducesse per questi punti, sarebbe la linea delle 24^{or} o di 0^{or}, e tornando indietro una, due ore ec. sull'orologio, si segneranno le 23^{or}, le 22^{or} ec. Lo stesso si applichi all'ora della levata del Sole per l'altra specie di ore, andando in ordine diretto per le susseguenti 1^{or} 2^{or} ec.

907. Che se la faccia del piano sia volta dalla parte boreale, le regole saran tutte le stesse, se non che l'orologio sembrerà rovesciato, e 1°. il centro V sarà
92 nella parte inferiore e rappresenterà il polo australe; 2°. l'angolo EGV sarà sempre $= l$, latitudine del paese, ma la retta Vm sarà la linea oraria della mezza notte, la quale condotta provvisionalmente, e applicandovi i raziocinj già fatti, darà le altre ore VL ec. che possono combinarsi colla presenza del ☉ sull'orizzonte.

908. Ciò guida naturalmente a cercare qual sia la prima e l'ultim' ora da delinearsi in un orologio. Quanto all'orizzontale, è chiaro che data la latitudine l e la massima declinazione δ del ☉, se ne ha tosto il massimo arco semidiurno h' (676) che convertito in tempo (625) darà l'ora più tarda del tramontare, la quale sottratta da 12^{or} darà la più sollecita del nascere: e queste saranno l'ore cercate. Ma ciò non è applicabile a un orologio verticale, poichè l'orizzonte gli occulta una porzione del massimo arco semidiurno la quale (preso il piano

isolato e senza impedimenti) sarebbe visibile rispetto ad esso; e inoltre il più delle volte il piano medesimo se ne occulta un' altra porzione visibile riguardo all' orizzonte: così se il piano sia Zz, l' orizzonte Eu occulterà il ☉ in tutti i punti dei paralleli che son compresi nello spazio Euz, quantunque restino al di sopra del piano; ed il piano stesso occulterà a se medesimo tutti i punti compresi nello spazio iuR. Quanto al piano non declinante qual è il primo verticale ZE, il massimo arco semidiurno sarà $=$ EQ $= 90° = 6''$ così per la mattina come per la sera. Riguardo agli altri come Zz, ZR, ZV, per avere il massimo arco semidiurno, dovrà cercarsi la massima amplitudine boreale del ☉ (668) ovvero quella porzion di essa che è contenuta tra il primo verticale e il dato piano, determinata la quale, si ha la prim' ora della mattina se l' orologio declina verso l' oriente, o l' ultim' ora della sera, se declina verso l' occidente. In fatti suppongasi che un tal piano, mosso da E verso N passi successivamente in Zu, ZR, ZV ec. e sia perciò Eu, ER, EV ec. la sua declinazione d; sarà nel primo caso $Eu = d$ la massima amplitudine boreale del ☉ relativamente al piano medesimo, la quale determinerà il massimo arco semidiurno uh, e perciò sarà $d < z'$, onde (677) $tang\ h' = -\frac{cot\ d}{sen\ l}$; per gli altri due casi in cui la declinazione è uguale o maggiore dell' amplitudine massima, il massimo arco semidiurno sarà sempre quello che conviene a z' e si avrà, supponendo O l' obliquità dell' ecclittica, $sen\ z' = \frac{sen\ O}{cos\ l}$ (679) e $tang\ h' = -\frac{cot\ z'}{sen\ l}$.

909. Per aver l' ultim' ora negli orologi voltati verso levante e la prima in quelli che guardan verso ponente, si osservi che il piano per cui il ☉ ha dalla parte OmN un' amplitudine boreale, ne ha dall' opposta un' australe come En, e quindi se $d < z'$ ed $= Eu$, sarà $En = -Eu = -d$, onde $tang\ h' = \frac{cot\ d}{sen\ l}$ ovvero $\frac{cot\ z'}{sen\ l}$ se $d = z'$. Ma se $d > z'$, come in ZV, è certo che dall' altro lato la sezione del tropico opposto sarà sopra l' orizzonte, e il massimo arco semidiurno del luogo non sarà interamente visibile rispetto al piano. Data perciò la latitudine l' del piano (913) e la

93

massima declinazione O del ☉, sarà (676) $\cos h' = -$
91 $\tang l \tang O =$ NGA (supponendo unita NG e il punto N quello dell'ultim'ora, perchè la declinazione è orientale); ma poichè l'angolo AGN riguarda la sustilare, dovrà sottrarsene AGM $= \lambda$, e l'ora ultima cercata sarà $(h' - \lambda)^{or}$, come $12^{or} - (h' + \lambda)^{or}$ sarà la prima quando la declinazione d sia occidentale.

Calendario.

910. L'Astronomo che intraprende a calcolar l'Efemeride d'un dato anno, se non voglia servilmente trascrivere gli altrui risultati con pericolo di grave sbaglio, ha bisogno di certe cronologiche nozioni sul Calendario senza le quali non potrebbe compiutamente risolvere quell'importante problema. Noi ristringiamo a quest'unica mira lo studio vastissimo della Cronologia, e ci proponghiamo di trattar del Calendario non solamente quanto basti all'intento, ma anche in una nuova maniera: perciò le varie forme dell'ora, del giorno, del mese e dell'anno presso i Popoli antichi, le diverse Epoche delle Nazioni e dei Re, e le infinite questioni cronologiche sopra tutte le date più celebri della Storia, sono argomenti alieni dal nostro oggetto e bisogna cercargli in altri Libri.

911. Gli Antichi collocarono i Pianeti nel Cielo con quest'ordine ♄ ♃ ♂ ☉ ♀ ☿ ☽, e potrebbe far maraviglia che nell'assegnare a ciascun di essi un giorno della settimana, abbian seguito un ordine affatto diverso ♄ ☉ ☽ ♂ ☿ ♃ ♀: ma se si rifletta che ad ogn'ora del giorno facevasi presedere un Pianeta nel suo ordin celeste, e che dal Pianeta presidente alla prim'ora prendeva il nome l'intera giornata s'intenderà facilmente il nuovo ordine eddomadario. Infatti distribuite ai sette Pianeti le 24 ore di un giorno, è chiaro che la prima toccherà a ♄ da cui avrà il nome quel giorno, e poichè le tre ultime saranno per ♄ ♃ ♂, la prima del giorno seguente apparterrà al ☉ che darà parimente il nome a questo giorno; quindi l'ultime tre ore di questo anderanno al ☉ ♀ ☿, e la prima del terzo giorno sarà per la ☽: continuando il raziocinio nel modo stesso, si tro-

verà la completa serie eddomadaria ♄ ☉ ☽ ♂ ☿ ♃ ♀:
Se il giorno fosse stato diviso in ore 22, o se conoscendosi ♅ (750) la divisione fosse andata fino a 25 ore, l'ordine quotidiano dei Pianeti avrebbe corrisposto esattamente al loro ordin celeste; molto differente diventerebbe, introducendovi ⚶ ⚴ ⚳ e ⚵.

912. Pertanto o dai sette pianeti, o dall'antichissima tradizione, o dagli uni e dall'altra insieme ebbe origine la settimana, come dalla Luna e dal Sole la ebbero il mese e l'anno. Ma laddove il giorno e la settimana furon costantemente divisi quello in ore 24, questa in giorni 7, i mesi lunari sinodici (760.814) che si trovano di giorni $29\frac{1}{2}$ in circa, si fecero or *cavi* or *pieni* cioè alternativamente di 29 e di 30 giorni, e gli anni solari che montano prossimamente a giorni $365\frac{1}{4}$ (622), si distinsero in quadriennj, chiamando *comuni* o di giorni 365 i primi tre, e *bisestile* o di giorni 366 l'ultimo di ciascun quadriennio: il giorno aggiunto nell'ultim' anno si collocò tra i dì 23 e 24 di Febbrajo, ed esso pure si indicò col *sexto calendas* appartenente al dì 24, dal che l'anno prese il nome di bisestile.

913. In tal guisa all'antico anno di Numa che comprendeva 355 giorni, fu sostituito da Giulio Cesare il nuovo anno *Giuliano*, i cui 365 giorni arbitrariamente distribuiti in 12 mesi, qual di 28, qual di 30, qual di 31, compongono insomma 52 settimane ed 1 giorno. Anche l'*anno lunare* si formò di 12 mesi, sei pieni e sei cavi (922); che ascendendo in tutto a 354 giorni, danno la differenza $365 - 354 = 11$ tra i due anni solare e lunare. Questi 11 giorni chiamansi l'aggiunta o *Epatta Giuliana*, perchè bisogna annualmente aggiungergli all'anno lunare onde eguagli il solare Giuliano.

914. È volgare opinione (benchè si possa dir qualche cosa in contrario) che 44 anni dopo la correzione di Cesare e 4003 dopo la creazione del Mondo, nell'ultimo mese dell'anno e nell'ultimo Sabato del mese, sia nato GESU' CRISTO. Da quest' Epoca sì venerabile per tutti gli uomini; e precisamente dal seguente anno 4004 comincia l'*Era Cristiana* e l'uso del *Calendario Giuliano* presso i Cristiani. Furono essi che ai 365 giorni dell'anno ordinatamente disposti nel Calendario,

unirono le prime sette lettere dell' alfabeto, di modo che cominciando da Gennajo, i giorni 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 hanno di fianco le *lettere quotidiane* a, b, c, d, e, f, g, che replicate per ordine fino a tutto Dicembre, mostrano quali sono in un anno comune i giorni del nome stesso; onde se il dì 1 di Gennajo segnato a cada per esempio in Martedì, tutti i giorni segnati a saranno dei Martedì, tutti i segnati b saranno dei Mercoledì ec.: ma poichè il giorno più interessante per i Cristiani e la Domenica, si dette poi a queste lettere il nome di *lettere domenicali*.

915 È pero da notare che negli anni consecutivi le lettere domenicali non si succedono nel loro ordine quotidiano, ma passano da a a g, da g ad f, da f ad e ec.: poichè componendosi l' anno di 52 settimane ed 1 giorno (913), se il primo giorno dell' anno fu Domenica, lo sarà anche l' ultimo; onde nel nuovo anno il dì 1 segnato a (914) sarà Lunedì, la Domenica anderà al dì 7, la lettera domenicale diverrà g, e la serie perpetua delle lettere domenicali sarà di sette termini con quest' ordine inverso a, g, f, e, d, c, b: ove si osservi che in questa inversione di lettere il numero n' indicante il posto occupato da ciascuna lettera nell' ordine naturale (914) diviene nel nuovo $n'' = 8 - n' + r$, esprimendo r il numero conveniente alla prima lettera da cui principia il rovesciamento, cioè 1 se da a, 2 se da b, 3 se da c ec., e 7 anzi zero se da g. Così nel caso presente se $n' = 4 = d$ nell' ordine naturale, cominciando l' inversione dalla prima lettera $a = 1$, sarà $n'' = 8 - 4 + 1 = 5$ come si vede.

916. Quindi se tutti gli anni fossero comuni, il periodo delle lettere domenicali avrebbe 7 termini che dopo sett' anni ricomincierebbero con lo stess' ordine: ma gli anni comuni sono interrotti ogni quart' anno dal bisestile (912) e il giorno che si frammette secondo l' uso dei latini tra i dì 23 e 24 di Febbrajo (912) e secondo l' uso ordinario tra i dì 28 di Febbrajo e 1 Marzo, fa retroceder di un giorno tutte le seguenti Domeniche: onde nell' anno 1796 la lettera c indicò le Domeniche fino a tutto il dì 28 di Febbrajo, e per indi-

carle

carle poi dal dì 1 Marzo fino al resto dell'anno, convenne retroceder d'una lettera e prender b. Ora la necessità di assegnar due lettere a ciascun anno bisestile turba il letteral periodo settenario, e può cercarsi qual debba essere il nuovo periodo delle lettere domenicali, supposto il costante ritorno dei bisestili di quattro in quattr'anni.

917. In questa ipotesi, 5 lettere darebbero evidentemente un periodo $p = 4$ cioè di 4 termini: or se con 5 lettere si ha p, con 7 lettere si avrà $\frac{7p}{5}$, e se queste lettere prese una volta danno $\frac{7p}{5}$, bisognerà prenderle un numero indeterminato ed intero E di volte per avere il cercato periodo x: verrà dunque $x = \frac{7pE}{5} = \frac{28E}{5}$; onde (L. 350) $\frac{28E}{5} = E' = \frac{3E}{5} = \frac{E}{5}$ ed $E = 5E'$; quindi fatto $E' = 1$, sarà $E = 5$ ed $x = 28$, cioè il periodo cercato è di 28 termini, e le lettere domenicali torneranno con lo stess'ordine dopo 28 anni. Un tal periodo che supposta la legge dei bisestili (912) riconduce ai giorni stessi dell'anno i giorni dedicati al Sole (911) o le Domeniche, fu chiamato il periodo o *Ciclo Solare*. Ne è ignoto il principio, e solo si sa che fu istituito dopo G. C. in tal tempo che tornando indietro di 28 in 28 anni, il prim'anno dell'Era Cristiana si trovò distinto con 10 del ciclo solare.

918. Anche la Luna fu soggettata ad un periodo da Metone l'Ateniese. Egli osservò che in 19 anni solari si contengono 19 anni lunari con 19 epatte (913) e che 19 anni lunari eguagliano $19 . 12 = 228$ mesi lunari, come 19 epatte danno $19 . 11 = 209$ giorni cioè 7 mesi *embolismici* o intromessi, sei pieni ed uno cavo: dal che deducendo l'eguaglianza di 19 anni solari con 235 *lunazioni* o mesi sinodici, compose un *Ciclo Lunare* di 19 anni con cui pensò di aver combinati sì bene i moti dei due Astri regolatori del tempo, che al cominciar d'un nuovo ciclo sarebbero nuovamente in quello stesso punto dello Zodiaco, ove erano 19 anni addietro, e

che i novilunj si avrebbero nei medesimi giorni e con l'ordine stesso di prima. Parve tanto utile questa scoperta in Atene, che il corrente numero del ciclo fu scritto annualmente in cifre d'oro, donde prese il nome di *Numero Aureo*: i Cristiani medesimi lo introdussero nel Calendario Giuliano, e cominciando dal dì 23 di Marzo in cui casualmente cadde un novilunio, apposero il ciclo 1 di fianco ai giorni con 29 e 30 intervalli alternativamente (912), e poi quasi con simil metodo il ciclo 2, il ciclo 3 ec. fino a 19; in tal guisa dato per esempio il corrente ciclo annuo 3, si sapeva subito che i novilunj dell'anno cadevano in tutti quei giorni cui era notato di fianco il ciclo 3. Dionisio il Piccolo, famoso per dottrina nel sesto secolo, cominciò a contar questo ciclo dall'anno 532 dell'Era Cristiana, e perciò tornando indietro di 19 in 19 anni, venne a segnare il primo anno di Cristo con 2 di ciclo lunare.

919. Questi due cicli del Sole e della Luna possono fino ad un certo segno chiamarsi astronomici: ma è poi affatto arbitrario un altro ciclo chiamato *Indizione* che comprende un periodo di 15 anni; lo immaginarono gli Imperatori, lo adottarono in seguito i Romani Pontefici, e Dionisio lo fece cominciare nell'anno 328 dell'Era Cristiana in cui fu celebrato, secondo lui, il Concilio Niceno che altri riportano al 325: in tal guisa tornando indietro di 15 in 15 anni, si incontrò il prim'anno di Cristo con 4 d'indizione.

920. Dal prodotto di tutti insieme i tre cicli del Sole, della Luna e dell'Indizione si ha 28 . 19 . 15 = 7980 anni Giuliani, ed è questo il celebre *Periodo Giuliano* inventato da Giuseppe Scaligero per ridurre ad una misura comune le infinite Epoche differenti, e per evitare le oscurità e le contradizioni che sì spesso s'incontrano nella Cronologia e nella Storia: poichè se le date dei fatti si segneranno coi diversi numeri dei tre cicli, questi numeri non potranno mai più combinarsi per l'intero corso del periodo Giuliano, onde appartenendo tutti insieme ad un solo e determinato anno di questo periodo, la confusione dei tempi e l'ambiguità delle persone e dei fatti non avrà più luogo nei nostri Annali. Poichè dunque al prim'anno dell'Era Cristia-

na 4004. del Mondo (914), si assegna 10 di ciclo solare (917), 2 di ciclo lunare (918) e 4 d'indizione (919), è facile il dedurre (*L.* 357) che conviene a quest' anno l'anno 4714 del periodo Giuliano, il quale (giacchè 4713 — 4003 = 710) rimonta col suo principio fino a 710 anni prima della Creazione.

921 Con altre mire si erano anticamente moltiplicati insieme i cicli del Sole e della Luna da Vittorio d'Aquitania o da Dionisio. Fissato l'equinozio nel dì 21 di Marzo, ben si sapeva il Decreto del Concilio Niceno di celebrar la Pasqua nella Domenica immediatamente posteriore a quel dì quartodecimo della Luna (detto compendiosamente la *Quartadecima*) il quale cade o nel giorno medesimo o dopo il giorno dell'equinozio: ma variando annualmente e le Domeniche e le Quartedecime, nascevano ogn'anno dei dubbj e delle difformità nell'osservanza del sacro Rito, e la determinazion della Pasqua era divenuta nel quinto secolo un difficil problema. Fu dunque immaginato un periodo che abbracciasse tutte le possibili varietà e delle Domeniche e delle Quartedecime: e poichè quelle tornano ordinatamente ai giorni stessi dopo un ciclo solare (917) e questo vi tornano dopo un ciclo lunare (918), si conchiuse che per soddisfare al problema bastava moltiplicar tra loro i due cicli, onde si avesse un *Ciclo Pasquale* di anni 28 . 19 = 532. Il prim'anno dell' Era Crirtiana con 10 di ciclo solare (917) e 2 di aureo numero (918) cadde dunque nell'anno 458 del ciclo pasquale (*L.* 357) che dal nome dei suoi Autori fu anche chiamato *Vittoriano* e *Dionisiano*.

922. Questo metodo per conoscere il dì di Pasqua sarebbe stato facile e preciso, se i due cicli solare e lunare avessero avuta l'opportuna esattezza: ma Cesare nella formazione del suo anno, e Metone nel calcolo del suo numero d'oro trascurarono certi rotti di tempo, i quali accumulandosi appoco appoco fecero anticipar gli equinozj e i novilunj in tal guisa, che fin dall'anno 1580 l'equinozio era giunto dal dì 21 al dì 11 di Marzo e il novilunio veniva indicato dopo che la Luna avea già 4 giorni: di modo che dalle Tavole Prussiane di Reinhold, le più accurate in quel tempo, si rilevò che in 400 anni Giuliani il Sole guadagnava 3 giorni più del

dovere, e che in 16 cicli Metonici o più esattamente in anni 312 $\frac{1}{2}$ ne guadagnava 1 la Luna.

923. Or come i disordini del Calendario di Numa determinarono Giulio Cesare ad abolirlo (913), così quelli del Calendario Giuliano indussero Gregorio XIII ad intraprenderne l'emendazione. Ella riducevasi in somma a togliere al Sole e alla Luna i giorni indebitamente acquistati e ad impedirne l'acquisto indebito per l'avvenire; nel qual punto di vista il problema era molto indeterminato e poteva sciogliersi in mille differenti maniere: ma Gregorio rispettando meritamente le celebri decisioni del Concilio di Nicèa, e le fatiche lodevoli di Dionisio, volle che il calcolo e l'Astronomia servissero quanto più potevasi alle antiche usanze, il che cangiò talora il problema in più che determinato, e ne rese impossibile la soluzione accurata. Questa notizia giustifica bastantemente le piccole irregolarità del *Calendario Gregoriano*, e mentre onora la pietà del Pontefice, purga pienamente da ogni taccia i dotti Astronomi che lo servirono.

924. La correzione fu promulgata nel 1581 e cominciò ad eseguirsi nel 1582. Riguardo al Sole fu stabilito 1°. che per ricondur l'equinozio al dì 21 di Marzo (921) si sopprimessero i 10 giorni guadagnati dal Sole (922) e perciò il dì 5 d'Ottobre fosse chiamato in quell'anno il dì 15: 2°. che per mantener l'equinozio nello stesso dì 21 di Marzo, cioè per togliere al Sole i 3 giorni che nel sistema Giuliano acquisterebbe in 400 anni (922), si tralasciassero perpetuamente 3 bisestili in ogni quadernario di secoli, onde fatto bisestile l'anno 1600 non debbano esserlo il 1700, il 1800, e il 1900, ma solamente il 2000 ec. Questa regolar soppressione dei bisestili fu detta *equazione solare*.

925. Riguardo alla Luna si determinò 1°. che per impedirle in avvenire di avvantaggiarsi d'1 giorno in anni 312 $\frac{1}{2}$ (922), l'anno lunare si diminuisse d'un giorno in ogni ternario di secoli, cominciando a contare i secoli dall'anno 1400: 2°. che per valutare anche i residui anni 12 $\frac{1}{2}$, ad ogni otto ternarj di secoli (nel quale spazio gli anni 12 $\frac{1}{2}$ compongono appunto un secolo) si tralasciasse la prescritta diminuzione d'1 giorno e si

trasportasse al secolo susseguente, facendo per la prima volta il trasporto dall'anno 1700 al 1800. Queste due regole insieme si chiamarono *equazione lunare*.

926. In fine fu tolto al numero aureo l'antico ufizio di indicare i novilunj (918) e fu dato ad una serie di 30 numeri che replicata 12 volte rappresentò nel Calendario i 354 giorni dell'anno lunare (913). Comincia essa dall'asterisco * che significa o zero o *XXX.* e continuando per ordine con *XXIX. XXVIII.* ec. scende fino a *I* di fianco ai primi 30 giorni di Gennajo: ricomincia quindi con * nel dì 31 e prosegue negli altri mesi, finchè con la duodecima replica giunge al dì 20 di Dicembre, ripigliando poi con l'ordine stesso dal dì 21 fino al termine dell'anno. Ebbero questi 30 numeri il nome di *epatte*, perchè data la corrente epatta d'un anno, basta cercarla tra questi numeri nel Calendario, e i giorni ove si troverà segnata, saranno i novilunj di tutto l'anno. I numeri stessi o le 30 epatte si notarono anche nel Martirologio in fronte a ciascun giorno, ove per mezzo di una *lettera* soprapposta, che si determina d'anno in anno, servirono ad indicar giornalmente la diversa *età della Luna*.

927. Si è detto (926) che la serie delle 30 epatte va con 12 repliche dal dì 1 di Gennajo fin al 20 di Dicembre, il che sembra contraddittorio; poichè in tale ipotesi i termini dell'epatte son $30 \times 12 = 360$, e i giorni compresi tra i due limiti di Gennajo e Dicembre sono $31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 20 = 354$. Ma convien sapere che le 6 epatte d'avanzo furon ripartite nelle trentine alternative dei giorni, di modo che due epatte si veggon nel giorno stesso in Febbraio, due in Aprile, due in Giugno ec. Basti riportar quì per modello i primi giorni d'Aprile di cui faremo in seguito qualche uso per maggiore schiarimento del sistema Gregoriano. Infine, dovendo l'ultimo mese embolismico del ciclo lunare esser cavo, l'epatte annue che crescon comunemente d'11, ogni nuovo anno del ciclo crescon di 12; per tal ragione se l'anno del ciclo è 19 e l'epatta

APRILE

Giorni	Epatte
1	*XXIX*
2	*XXVIII*
3	*XXVII*
4	25. *XXVI*
5	*XXV. XXIV*
6	*XXIII*
7	*XXII*
ec.	ec.

pure sia XIX (onde il novilunio cada nel dì 2 di Dicembre) l'altro novilunio si porrà nel dì 31 ove si trova perciò il numero 19 accanto alla solita epatta quotidiana XX.

928. Ed ecco in compendio la parte storico-teorica del Calendario: da questi fondamenti dee ricavarsi la parte pratica, la quale per altro è trattata dagli Scrittori con varie operazioni numeriche, mancanti per lo più d'ogni ragione, e con molte Tavole grandi e piccole di cui è spesso ignota la costruzione ed incertissima l'esattezza. Noi dunque scioglieremo con un metodo affatto nuovo tutti i problemi relativi al Calendario; e poichè in questa specie di calcoli si incontran frequentemente delle divisioni di cui dee prendersi o il solo quoziente trascurando il resto, o il solo resto trascurando il quoziente, ci serviremo di simboli particolari per indicarle. Se per esempio, una quantità x si trovi eguale ad un numero determinato n diminuito di un indeterminato numero h, ed $n - h$ sieno divisi per qualche determinato numero $m > h$, questa espressione $x = \frac{n-h}{m}$ evidentemente significherà che per conoscere x dee togliersi h da n e poi divider per m, ovvero dividere n per m e non curato il resto, prender per x il quoziente: scriveremo dunque $x = \frac{n-h}{m} = Q\frac{n}{m}$, e ciò vorrà dire *il quoziente di* n *diviso per* m, *trascurato il resto*. All'incontro se x si trovi eguale ad un numero determinato n diminuito di un multiplo indeterminato h di qualche determinato numero m, questa espressione $x = n - mh$ significherà che per conoscere x dee togliersi m da n quante volte si può, ovvero divider n per m, e non curato il quoziente, prender per x il resto: scriveremo dunque $x = n - mh = R\frac{n}{m}$, e ciò vorrà dire *il resto di* n *diviso per* m, *trascurato il quoziente*; dal che di passaggio raccoglieremo 1°. che $R\frac{n}{m}$, $R\frac{n+m}{m}$, $R\frac{n+2.m}{m}$, $R\frac{n+mh}{m}$ son tutte quantità eguali, giacchè l'aggiunta di un multiplo di m non può alterare il resto di una divisione per m; 2°. che se diviso n per m non si abbia alcun resto, cioè se sia $R = 0$, potrà prendersi ad arbitrio ed $x = 0$

ed $x = m$, $= 2m$, $= mh$ ec. secondo la particolar natura di x, giacchè tutti questi valori son realmente un resto della divisione per m: 3°. che il valor di $\frac{n}{m}$ non dee ridursi a minore espressione, o almeno il resto R $\frac{n}{m}$ dee moltiplicarsi per il comun divisore adoprato: così R $\frac{60}{28}$ $= 4$ non può farsi R $\frac{15}{7}$ che falsamente darebbe 1. Ciò supposto, venghiamo ai problemi.

929. I. Trovare i tre cicli s, l, i del Sole, della Luna e dell' Indizione in un anno dato n dopo Cristo.

1°. Poiche nel prim' anno di Cristo si aveva 10 di ciclo solare (917), i seguenti anni $n - 1$ aumentati di 10 eguaglieranno un multiplo indeterminato h dell' intero ciclo 28 con la parte cercata s di esso; dunque $n - 1 + 10 = 28h + s$, e però $s = n + 9 - 28h =$ R $\frac{n+9}{28}$ (928). Se R $= 0$, sarà $s = 28$ (928).

2°. Nel prim' anno di Cristo si aveva 2 di ciclo lunare (918); dunque per la ragione stessa troveremo $n - 1 + 2 = 19h + l$, e perciò $l = n + 1 - 19h =$ R $\frac{n+1}{19}$. Se R $= 0$, sarà $l = 19$.

3°. Nel prim' anno di Cristo si aveva 4 d' indizione (919); dunque $n - 1 + 4 = 15h + i$, e però $i = n + 3 - 15h =$ R $\frac{n+3}{15}$. Se R $= 0$, sarà $i = 15$.

s	l	i	
28	19	15	1
56	38	30	2
84	57	45	3
112	76	60	4
140	95	75	5
168	114	90	6
196	133	105	7
224	152	20	8
252	171	135	9

Applicando queste tre formule all' anno $n = 1798$, si troverà $s = 15$, $l = 13$, $i = 1$. Per compendiare il problema abbiamo posti di fianco i multipli di 28 (s), di 19 (l) e di 15 (i) fino a 9.

930. II. Dati i tre cicli s, l, i del Sole, della Luna e dell' Indizione, trovar l' anno del periodo Giuliano a cui appartangono ed il corrispondente anno dell' Era Cristiana: e reciprocamente dato l' anno n del periodo Giuliano, trovare i tre cicli s, l, i.

La prima parte di questo problema è stata sciolta

in altro luogo (*L.* 357). Quanto alla seconda, poichè il periodo Giuliano è il prodotto di 28 . 19 . 15 (920), egli è dunque un multiplo $k\ (= 19 \,.\, 15)$ di 28, un multiplo $k'\ (= 28 \,.\, 15)$ di 19, ed un multiplo $k''\ (= 28 \,.\, 19)$ di 15; dunque una sua qualunque porzione n sarà del pari un multiplo $h\ (< k)$ di 28 con un certo avanzo s, un multiplo $h'\ (< k')$ di 19 con un certo avanzo l, ed un multiplo $h''\ (< k'')$ di 15 con un certo avanzo i. Pertanto $n = 28h + s = 19h' + l = 15h'' + i$, e quindi 1°. $s = n - 28h = \mathrm{R}\,\frac{n}{28}$ (928): 2°. $l = n - 19h' = \mathrm{R}\,\frac{n}{19}$: 3°. $i = n - 15h'' = \mathrm{R}\,\frac{n}{15}$. Se $\mathrm{R} = 0$, sarà $s = 28$, ovvero $l = 19$, ovvero $i = 15$ (928).

931. III. Trovare i bisestili x contenuti in un numero n d'anni, non supposta la correzion Gregoriana.

Poichè in tale ipotesi ogni quart' anno è bisestile (912), divisi per 4 i dati anni n, si avrà un quoziente u con un resto indeterminato $\frac{h}{4}$, cioè $\frac{n}{4} = u + \frac{h}{4}$: ma i bisestili x debbono essere il numero intero u, come è chiaro; dunque $x = u = \frac{n-h}{4} = \mathrm{Q}\,\frac{n}{4}$ (928).

932. IV. Trovar l'equazione solare, cioè il numero x dei giorni che dopo la correzion Gregoriana son perduti dal Sole in un dato numero n d'anni (924).

Poichè dal secolo 16mo in poi si lasciano 3 bisestili in ogni quadernario di secoli (924), i giorni x perduti dal Sole o i bisestili tralasciati eguaglieranno i secoli dopo il 16mo diminuiti dei quaderuarj che contengono: ma i secoli dopo il 16mo sono $\mathrm{Q}\,\frac{n}{100} - 16$, e i lor quadernarj sono $\dfrac{\mathrm{Q}\,\frac{n}{100} - 16 - h}{4} = \mathrm{Q}\,\dfrac{\mathrm{Q}\,\frac{n}{100} - 16}{4} = \mathrm{Q}\,\frac{n}{400} - 4$ (928); dunque $x = \mathrm{Q}\,\frac{n}{100} - 16 - \mathrm{Q}\,\frac{n}{400} + 4 = \mathrm{Q}\,\frac{n}{100} - \mathrm{Q}\,\frac{n}{400} - 12$. Così se $n = 9983$, sarà $\mathrm{Q}\,\frac{n}{100} = 99$, $\mathrm{Q}\,\frac{n}{400} = 24$ ed $x = 63$.

933. V.

933. V. Trovar l'equazion lunare, cioè il numero dei giorni x che dopo la correzion Gregoriana son perduti dalla Luna in un dato numero n d'anni (925).

Poichè dal secolo 14^{mo} in poi la Luna perde un giorno in ogni ternario di secoli (925), l'equazion lunare col raziocinio del passato problema si troverebbe $x = Q\dfrac{Q\frac{n}{100} - 14}{3}$: ma questa formula dà un equazione lunare nel secolo 17^{mo} in cui dee lasciarsi, e non la dà nel secolo 18^{mo} in cui si dee fare (925), dunque per aver la vera formula basterà prender per epoca non il secolo 14^{mo} ma il 15^{mo}, e sarà $x = Q\dfrac{Q\frac{n}{100} - 15}{3} = Q\dfrac{n}{300} - 5$.

934. VI. Trovar la lettera quotidiana q che nel Calendario o Giuliano o Gregoriano è notata di fianco ad un giorno dato m preso dal principio dell'anno comune.

Premessa per comodo la somma dei giorni da mese a mese, è noto che le lettere poste di fianco ai giorni son 7 e vanno con l'ordine $A = 1$, $B = 2$ ec. (914);

somma dei giorni a tutto			
Gennajo	31	*Luglio*	212
Febbrajo	59	*Agosto*	243
Marzo	90	*Settembre*	273
Aprile	120	*Ottobre*	304
Maggio	151	*Novembre*	334
Giugno	181	*Dicembre*	365

dunque tutte le lettere m dal principio dell'anno fino al dato giorno eguaglieranno un multiplo h di 7 col numero q delle rimanenti, cioè $m = 7h + q$ e quindi $q = m - 7h = R\frac{m}{7}$. Così se il giorno dato sia il 4 ovvero il 17 d'Ottobre, sarà $m = 277$ ovvero $m = 290$, e $q = R\frac{277}{7} = 4 = D$, ovvero $q = R\frac{290}{7} = 3 = C$, cioè la lettera del dì 4 è D, e quella dì 17 è C. Se $R = 0$, sarà $q = 7 = G$ (928).

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
1	2	3	4	5	6	7

935. VII. Trovar la lettera domenicale u, u' di un dato anno n dopo Cristo secondo i due Calendarj Giuliano e Gregoriano.

Poichè G. C. nacque nel dì 25 di Dicembre in Sabato (914), cominciò dunque in Sabato il seguente anno primo dell' Era Cristiana; dunque si ebbe Domenica nel dì 2 e la lettera domenicale fu b (934); ma le lettere domenicali procedono con ordine inverso da b ad a, da a a g, da g ad f ec. (915); dunque l' ordine di queste lettere è $b = 1$, $a = 2$ ec. $\left\{\begin{matrix} b & a & g & f & e & d & c \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix}\right.$ Ora il numero delle lettere scorse dopo quest' epoca eguaglia quelli degli anni e dei bisestili (916); perciò la lettera domenicale u per un anno n si avrà con aggiunger 1 alla somma delle lettere trascorse negli anni precedenti $n - 1$, toltine tutti i multipli h di 7; ma in anni $n - 1$ sono scorse lettere $n - 1 + Q\frac{n-1}{4}$; dunque $n - 1 + Q\frac{n-1}{4} + 1 = n + Q\frac{n-1}{4} = 7h + u$ ed $u = n + Q\frac{n-1}{4} - 7h = R\frac{n + Q\frac{n-1}{4}}{7}$. Così dato $n = 1582$, avremo $Q\frac{n-1}{4} = 395$ ed $u = R\frac{1977}{7} = 3 = g$ ovvero (915) $10 - R\frac{1977}{7} = 7 = G$ nell' ordine naturale. Se $R = 0$ sarà $u = 7 = c$ (928) ovvero $10 - 7 = 3 = C$; e se il dato anno n sia bisestile (il che avviene quando le sue due ultime cifre sono un multiplo di 4 (*L.* 55. V.)), alla lettera trovata dovrà unirsi al solito la precedente nell' ordine alfabetico (915, 916), cioè la seguente nell' ordine delle domenicali, e questa sola dovrà impiegarsi nel calcolo della Pasqua.

936. Poichè dunque nel 1582, anno della correzion Gregoriana (924), la lettera domenicale era g (935), il dì 4 d' Ottobre che ha di fianco la lettera d (934) sarà caduto in Giovedì: ma il dì 5 fu cangiato nel 15 (924); dunque il 15 fu Venerdì e il 17 Domenica; ma il 17 ha di fianco la lettera c (934); dunque la lettera domenicale g divenne c e si ebbe un nuovo ordine inverso di lettere domenicali $c = 1$, $b = 2$ ec. $\left\{\begin{matrix} c & b & a & g & f & e & d \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix}\right.$ Ora ripetuto il raziocinio di sopra, negli anni n dopo il 1581 sono scorse le lettere $n - 1581$ degli anni decorsi e le lettere $Q\frac{n-1580}{4}$ dei bisestili (perchè il 1582

era il secondo dopo il bisestile, e perciò il periodo dee cominciarsi dal 1581) toltene le lettere $Q\frac{n}{100} - Q\frac{n}{400} -$ 12 dei bisestili tralasciati (932); cioè $n - 1581 + Q\frac{n-1580}{4} - Q\frac{n}{100} + Q\frac{n}{400} + 12 - 7h = \ldots\ldots$ $R\frac{n - 1581 + Q\frac{n-1580}{4} - Q\frac{n}{100} + Q\frac{n}{400} + 12}{7}$ ovvero, tolti gli interi (928) ed osservando che $Q\frac{n-1580}{4} = Q\frac{n}{4} -$ 395, $R\frac{n - 4 + Q\frac{n}{4} - Q\frac{n}{100} + Q\frac{n}{400}}{7}$. Per trovar dunque la lettera u' propria dell'anno proposto n, sostituito nella formula $n - 1$ ad n, si avrà il numero delle lettere esaurite negli anni precedenti, che aggiunto ad 1, darà la domenicale cercata. Quindi si avrà infine $u' = \ldots\ldots$ $R\frac{n - 1 - 4 + Q\frac{n-1}{4} - Q\frac{n-1}{100} + Q\frac{n-1}{400} + 1}{7} = \ldots\ldots$ $R\frac{n - 4 + Q\frac{n-1}{4} - Q\frac{n-1}{100} + Q\frac{n-1}{400}}{7}$, ed $11 - u'$ (915) (o piuttosto $R\frac{11-u'}{7}$) darà la lettera domenicale nell'ordine naturale. Se l'anno non è secolare e sia divisibile esattamente per 4, ovvero se è secolare ed è divisibile esattamente per 400, alla lettera trovata si unirà al solito la seguente (916) e questa s'impiegherà per la Pasqua. Così se $n = 1800$, si avrà $Q\frac{n-1}{4} = 449$, $Q\frac{n-1}{100} = 17$, $Q\frac{n-1}{400} = 4$, ed $u' = R\frac{2232}{7} = 6 = e$ ovvero $11 - 6 = 5 = E$; se $n = 1801$, $u' = R\frac{2233}{7} = 0$ onde $R\frac{11-0}{7} = 4 = D$ (918); se $n = 1804$, $u' = 3 = a$, cioè $R\frac{11-3}{7} = 1 = A$; e poichè $R\frac{1804}{4} = 0$, le lettere domenicali saranno due A, G, di cui la seconda

è la pasquale. Nel modo stesso se $n = 2000$, $u' = 2$ $= \mathrm{B}$ e poichè $\mathrm{R}\frac{2000}{400} = 0$, le lettere saran parimente due, B, A.

Si può abbreviare praticamente la regola, facendo

$$u' = \mathrm{R}\frac{N - n - \mathrm{Q}\frac{n}{4}}{7}, \text{ ponendo}$$

$N = 2789$ dall' anno 1 dell' Era Cristiana al 4 Ottobre 1581.
$= 2792$ dal 15 Ott. 1581 al 1699 inclusivamente.
$= 2793$ dal 1700 al 1799 inclus.
* $= 2794$ dal 1800 al 1899 inclus. (*valore corrente*)
$= 2795$ dal 1900 al 2099 inclus.

ove si osservi che quì *la Lettera data* è nell'ordine naturale ed *è la pasquale*, anche negli anni bisestili; onde in essi per Gennajo e Febbrajo dovrà valere la seguente nell'ordine stesso: così per l'anno 2000 si trova $1 = \mathrm{A}$, ec.

937. VIII. Trovar l'epatta Giuliana p o la Gregoriana p' d'un anno dato n.

Poichè l'epatta Giuliana è quel numero di giorni che dentro il corso di un ciclo lunare mancano d'anno in anno alla Luna per terminare il suo periodo col Sole (913), è chiaro che l'anno del Sole superando quel della Luna di 11 giorni (913), l'epatta nell'anno primo del ciclo (giacchè dal prim'anno la volle contar Dionisio) sarà $1 . 11 = 11$, nel secondo $2 . 11 = 22$ e nel terzo sarebbe $3 . 11 = 33$: ma in 33 giorni ha luogo un mese embolismico di 30 giorni (918) e perciò mancano realmente alla Luna 3 soli giorni per terminar col Sole il suo periodo; dunque la vera epatta nel terz'anno è $3 . 11 - 30$, nel quarto $4 . 11 - 30$, nel quinto $5 . 11 - 30$, nel sesto $6 . 11 - 2 . 30$, e in generale nell'anno l del ciclo sarà $l . 11 - 30h = \mathrm{R}\frac{11l}{30}$. Trovato dunque il ciclo l dell'anno dato n (929), la sua epatta Giuliana sarà $p = \mathrm{R}\frac{11l}{30}$.

938. La Gregoriana non differisce dalla Giuliana che nella soppressione dei 10 giorni (924) e nell'equazioni solare e lunare (924, 925): ma tanto la soppressione dei 10 giorni quanto l'equazion solare o la soppressione dei bisestili diminuiscon l'anno del Sole, e quindi anche il

suo eccesso sopra quel della Luna (cioè l' epatta Giuliana), mentre all' opposto l' equazion lunare toglie dei giorni all' anno della Luna e perciò aumenta il suo difetto da quel del Sole (cioè la stessa epatta Giuliana); dunque la Gregoriana si avrà diminuendo la Giuliana (937) dei 10 giorni e dell' equazion solare (932), ed aumentandola della lunare (933). Dunque $p' = \ldots\ldots$

$$\mathrm{R}\,\frac{11l - 19 - Q\frac{n}{100} + Q\frac{n}{400} + 12 + Q\frac{n}{300} - 5}{30},$$ ovvero aggiunto 30 alla formula (928) onde si eviti p' negativa, e poi riducendo, sarà l' epatta Gregoriana $p' = \ldots\ldots\ldots$

$$\mathrm{R}\,\frac{11l + 27 - Q\frac{n}{100} + Q\frac{n}{300} + Q\frac{n}{400}}{30}.$$ Così se si voglia l' epatta per l' anno $n = 1790$, sarà $l = 5$ e $p' = \ldots\ldots$

$$\mathrm{R}\,\frac{82 - 17 + 5 + 4}{30} = 14.$$

939. Serve questa formula dall' anno 1582 a tutto il 4100 cioè per più di 25 secoli; ed è credibile che i piccoli difetti del Calendario Gregoriano (923) saranno allora divenuti tanto sensibili da intraprenderne una nuova correzione: ecco nondimeno l' altre formule dell' epatta di 25 in 25 secoli $p' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\mathrm{R}\,\frac{11l + 27 - Q\frac{n}{100} + Q\frac{n - 100}{300} + Q\frac{n}{400}}{30}$$ dal 4200 fino a tutto il 6600;

$$p' = \mathrm{R}\,\frac{11l + 27 - Q\frac{n}{100} + Q\frac{n - 200}{300} + Q\frac{n}{400}}{30}$$ dal 6700 fino a tutto il 9100;

$$p' = \mathrm{R}\,\frac{11l + 56 - Q\frac{n}{100} + Q\frac{n}{300} + Q\frac{n}{400}}{30}$$ dal 9200 fino a tutto l' 11600, aggiunto nuovamente 30 per la ragione già detta ec. La legge dell' equazioni è manifesta, e le formule derivano dalla disposizione e natura dell' equazion lunare (933).

Che se si voglia la sola *regola pratica* dedotta da questi principj, essa si racchiude nelle seguenti formule

$R\frac{11l}{30}$ dal 1 Anno dell'Era cristiana al 4 Ott. 1582

$R\frac{11l+20}{30}$ dal 15 Ott. 1582 al 1699 inclusivamente

$R\frac{11l+19}{30}$ dal 1700 al 1899 inclus. (*valore corrente*)

$R\frac{11l+18}{30}$ dal 1900 al 2099 ec. ec.

940. Quì però si presentano sull'epatta Grogoriana alcune difficoltà che è necessario discioglière. A un giorno stesso dei mesi alternativi dell'anno (per esempio al dì 5 d'Aprile) si son date due diverse epatte XXV, XXIV (927); e poichè l'epatte indicano i novilunj (926), è chiaro che se nello spazio di 19 anni s'incontrino le due epatte XXV, XXIV, il novilunio si avrà due volte nel medesimo dì 5 d'Aprile, il che per altro ripugna alla natura del ciclo lunare (918). Ora le due epatte XXV, XXIV posson realmente incontrarsi; poichè fatto $p'=25$, si avrà (938) 25 $=$

$$R\frac{11l+27-Q\frac{n}{100}+Q\frac{n}{300}+Q\frac{n}{400}}{30}=11l+27-$$

$$Q\frac{n}{100}+Q\frac{n}{300}+Q\frac{n}{400}-30h \text{ (928), onde}$$

$$\text{I}^a.\ 0=11l+2-Q\frac{n}{100}+Q\frac{n}{300}+Q\frac{n}{400}-30h;$$ e fatto $p'=24$, si troverà col metodo stesso

$$\text{II}^a.\ 0=11l'+3-Q\frac{n'}{100}+Q\frac{n'}{300}+Q\frac{n'}{400}-30h':$$

Posto ciò, è facile il dimostrare che presi in qualunque modo 19 termini consecutivi di epatte, non potranno mai riunirsi dentro un tal limite le due epatte 24 e 25 senza che la prima preceda la seconda e sia perciò $n'<n$, ed $l'<l$. Sottraendosi dunque la II^a. equazione dalla prima, possono accader quattro casi: 1°. che i quozienti delle divisioni per 100, 300 e 400 differiscano tutti di un'unità, come sarebbe se i numeri fossero 2391 e 2402; 2°. che differiscano due quozienti soli, come sarà se $n'=3192$, $n=3203$; 3°. che differisca uno solo, come se si avesse 1695 e 1706; 4°. che niuno dei tre quozienti differisca, come succede se $n'=1943$, $n=1954$. Nel primo

caso si avrebbe $o = 11l - 11l' - 30h'' = R\,\frac{11(l-l')}{30}$ equazione assurda, non potendo verun prodotto di 11 per un numero < 19 (quale deve essere $l - l'$) esser divisibile esattamente per 30: nel terzo caso si troverebbe $o = R\,\frac{11(l-l')-2}{30}$ parimente impossibile, perchè il più piccolo numero idoneo $= l - l'$ sarebbe 22, il che è assurdo: ma nel secondo e nel quarto caso otterremo $o = R\,\frac{11(l-l')-1}{30}$, equazione che pienamente avverandosi negli otto casi di $l = 12, = 13, = 14, = 15, = 16, = 17, = 18, = 19$, ed $l' = 1, = 2, = 3, = 4, = 5, = 6, = 7, = 8$, fa vedere che qualunque volta l'epatta 25 concorre con $l > 11$, si hanno in 19 anni le due epatte XXV . XXIV e perciò anche il novilunio due volte in un medesimo giorno.

Questa difficoltà fu preveduta, e per toglierla si convenne che l'epatta XXV scritta nel consueto carattere ed unita all'epatta XXIV in un giorno stesso (per esempio nel 5 d'Aprile), si scrivesse con carattere diverso anche nel giorno precedente (per esempio nel dì 4) (927) onde vi si trovassero insieme le due epatte 25, XXVI; dopo di che si fissò che concorrendo l'epatta 25 con un ciclo $l > 11$, si usasse sempre l'epatta 25 di carattere differente. Perciò se $l < 12$ quando $p' = 25$, questo 25 è scritto XXV al solito e dà il novilunio nel dì 5 d'Aprile (927): ma se $l > 11$ quando $p' = 25$, questo 25 è scritto in diverso carattere e trasporta il novilunio al dì 4 (927).

941. Ma le due epatte 25, XXVI riunite nel dì 4 d'Aprile (927) non posson forse concorrere in un stesso ciclo lunare e nuovamente condurci all'assurdo dei due novilunj in un medesimo giorno? No, perchè può con egual facilità dimostrarsi che nella progressione aritmetica dell'epatte, ove i termini son 19, la differenza è 11 e si hanno già per ipotesi i due termini $30h + 24$, $30h' + 25$, non è possibile che si trovi il termine $30h'' + 26$; cioè concorrendo in un ciclo lunare l'epatte 24, 25, non può nel ciclo stesso aver luogo l'epatta 26.

942. IX. Trovare il giorno x, x' del novilunio di

Marzo o d' Aprile in un anno dato n secondo i due Calendarj Giuliano e Gregoriano.

Poichè Gennajo e Febbrajo presi insieme formano appunto due mesi lunari, uno pieno e l'altro cavo (912), l'età della Luna nella sera ultima di Febbrajo eguaglierà l'epatta corrente p (913); dunque aggiungendole i giorni $x - 1$ precedenti al novilunio, si avrà per Marzo un mese pieno $p + x - 1 = 30$, onde $x = 31 - p$. Quindi preso 1 per ciclo lunare e perciò $p = 11$ (937), verrà il dì $x = 20$ di Marzo per il giorno del novilunio: ma attesa la casual formazione del Calendario Giuliano, il novilunio cade 3 giorni più tardi cioè nel dì 23 (918); dunque aggiunto 3 alla formula ritrovata e tolti se occorra i mesi pieni (937), il novilunio si avrà nel dì $x = 34 - p - 30h = R\frac{34 - p}{30}$: perciò quando $p = 3$, sarà del pari $x = 1$ ed $x = 31$, perchè Marzo ha giorni 31.

943. Ora Marzo formando un altro mese pieno con l'avanzo d'1 giorno, aggiunto a p questo giorno e i giorni $x - 1$ precedenti al novilunio, si avrà per Aprile un mese cavo $p + 1 + x - 1 = 29$ ed $x = 29 - p$; e presi quì pure i soliti 3 giorni come sopra, $x = 32 - p$. Tale sarebbe la formula per il novilunio d'Aprile se Dionisio, che volle di 29 giorni tutte le Lune pasquali, non avesse fatte di 30 tutte le non pasquali fuorchè l'ultima: per queste dunque è necessaria l'aggiunta d'un altro giorno, e però $x = 32 + 1 - p - 30h = R\frac{33 - p}{30}$, formula di quel novilunio d'Aprile che adopreremo tra poco.

944. Quanto al Calendario Gregoriano, poichè egli non è soggetto alle casualità del Giuliano, l'aggiunta dei 3 giorni non avrà luogo e il novilunio di Marzo si avrà come sopra (942) nel dì $x' = R\frac{34 - 3 - p'}{30} = R\frac{31 - p'}{30}$, come quello d'Aprile nel dì $x' = R\frac{33 - 3 - p'}{30} = R\frac{30 - p'}{30}$ (943): per altro se mai la Luna di Marzo sia l'ul-

sia l'ultima non pasquale, o se concorrano insieme $l > 11$ e $p' = 25$, il novilunio sarà nel dì $x' = \mathrm{R}\,\frac{29 - p'}{30}$ d'Aprile (943 . 940).

945. Nasce di quì la regola per trovar l'età y della Luna in un dato giorno m d'un dato mese k contato inclusivamente da Marzo. Poichè come supposto x' il giorno del novilunio, si ha $p' + 1 + x' - 1 = 29$ per Marzo ovvero $p' + 2 + x' - 1 = 30$ per il secondo mese o per Aprile (943), così si avrà $p' + 3 + x' - 1 = 30$ per il terzo mese o per Maggio, e in generale $p' + k + x' - 1 = 30$ per il dato mese k; dunque il novilunio di questo mese sarà nel dì $x' = 31 - p' - k$, e però tolti da m i giorni $x' - 1$ precedenti il novilunio, si avrà l'età cercata $y = m - x' + 1 = m - 31 + p' + k + 1$, o togliendo i mesi pieni (937), $y = m - 30 + p' + k - 30h = \mathrm{R}\,\frac{m + p' + k}{30}$. Suole adattarsi a tutti i mesi la regola fingendo che l'epatta cominci da Marzo per cui $k = 0$, e continui fino a tutto il seguente Febbrajo per cui $k = 12$: ma se nella formula $y = \mathrm{R}\,\frac{m + p' + k}{30}$ si faccia $k = 0$ per Gennajo e Marzo, $k = 1$ per Febbrajo, $k = 2$ per Aprile ec. l'età della Luna così trovata corrisponderà più spesso al Calendario, da cui per altro differirà talvolta d'un giorno, atteso specialmente il caso di $l > 11$ quando $p' = 25$ (940). Si avverta frattanto che per aver con sicurezza la Pasqua dopo l'equinozio di Marzo e non mai prima (921 . 923) i novilunj son notati nel Calendario quasi un giorno più tardi dei veri; onde la regola per trovar l'età della Luna non dee tenersi per astronomica ed accurata.

946. Del resto con la formula $y = \mathrm{R}\,\frac{m + p' + k}{30}$ si ha facilmente la lettera del Martirologio per un anno dato n (926); poichè indicandosi da quella lettera l'età della Luna in un dato giorno, se si trovi l'epatta p' dell'anno dato e si faccia $k = 0$, $m = 30$, l'età della Luna nel dì 30 di Gennajo o di Marzo (945) sarà $y = p'$: ma nel dì 30 di Gennajo la disposizion delle lettere e

dei numeri a lor sottoposti è nel Martirologio la seguente

a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	p	q	r	s	t	u
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
A	B	C	D	E	F	F	G	H	M	N	P							
20	21	22	23	24	25	25	26	27	28	29	30							

dunque la lettera che quì corrisponde alla corrente epatta p' dell'anno, sarà la cercata: per altro se $l > 11$ quando $p' = 25$ (940). la lettera sarà *F corsiva* (nel Martirologio suol esser *nera* mentre tutte l'altre son *rosse*) che è destinata apposta per questo caso. L'origine di tali lettere, la disposizione dei numeri che le accompagnano, e le piccole avvertenze che talvolta son necessarie per pronunziare esattamente l'età della Luna da essi indicata, non appartengono al nostro soggetto.

947. X. Trovare il giorno t della Quartadecima pasquale di un anno dato n secondo i due Calendarj Giuliano e Gregoriano.

La Quartadecima pasquale è quella che cade o nel dì 21 di Marzo, giorno dell'equinozio, o dopo il dì 21 (921): ma sottraendo 13 dal giorno della Quartadecima, si ha il giorno del novilunio; dunque poichè $21 - 13 = 8$, bisogna che il novilunio cada almeno nel dì 8 di Marzo affinchè la Quartadecima sia pasquale, e quello che cade nel dì 7 sarà l'ultimo non pasquale. Trovata dunque l'epatta corrente p (939), e il giorno x del novilunio di Marzo (942), 1°. se $x > 7$ ma < 19, aggiunto 13 ad x, si avrà la Quartadecima pasquale nel dì $t = 13 + 34 - p - 30h = \mathrm{R}\,\frac{47 - p}{30}$ di Marzo: 2°. se $x < 8$, la Quartadecima non sarà pasquale e converrà cercare il seguente novilunio di Aprile nel dì $x = 33 - p - 30h$ (943), la cui Quartadecima caderà nel dì $t = 13 + 33 - p - 30h = \mathrm{R}\,\frac{46 - p}{30}$: 3°. se $x > 18$, il novilunio sarà in Marzo nel dì $x = 34 - p - 30h$ (942), ma la Quartadecima sarà in Aprile nel dì $t = 13 + 34 - p - 31 - 30h = \mathrm{R}\,\frac{16 - p}{30} = \mathrm{R}\,\frac{46 - p}{30}$ (928) come prima. Lo stesso raziocinio vale per il Calendario Gregoriano (938, 944) se si cangi x, p, t in x', p', t', e si avrà $x' = \mathrm{R}\,\frac{44 - p'}{30}$

nel primo caso, ed $x' = \mathrm{R}\,\frac{43 - p'}{30}$ nel secondo; e nei casi o dell' ultimo novilunio non pasquale o di $l > 11$ quando $p' = 25$, si faccia per Aprile $t' = \mathrm{R}\,\frac{42 - p'}{30}$ (944). Riunendo pertanto insieme tutti i varj casi, dovrà concludersi come segue, cioè:

$$\left.\begin{array}{l}\text{I se } x > 7 \text{ ma } < 19 \\ \text{II se } x < 8, \text{ o } x > 18\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{sarà nel}\\ \text{Cal. Giu-}\\ \text{liano}\end{array} \left\{\begin{array}{l} t = \mathrm{R}\,\frac{47 - p}{30} \text{ di Marzo} \\ t = \mathrm{R}\,\frac{46 - p}{30} \text{ d' Aprile}\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{III se } x' > 7 \text{ ma } < 19 \\ \text{IV se } x' < 8, \text{ o } x' > 18 \\ \text{V se } x' = 7, \text{ o } l > 11 \text{ con } p' = 25\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{sarà}\\ \text{nel}\\ \text{Cal.}\\ \text{Grego-}\\ \text{riano}\end{array} \left\{\begin{array}{l} t' = \mathrm{R}\,\frac{44 - p'}{30} \text{ di Marzo} \\ \left.\begin{array}{l} t' = \mathrm{R}\,\frac{43 - p'}{30} \\ t' = \mathrm{R}\,\frac{42 - p'}{30}\end{array}\right\} \text{ d' Aprile}\end{array}\right.$$

Queste equazioni diconsi *termini pasquali*.

948. XI. Trovare il giorno z di Pasqua in un anno dato n secondo i due Calendarj Giuliano e Gregoriano.

Poichè supposto l'equinozio nel dì 21 di Marzo, la Pasqua cade nella Domenica immediatamente posteriore alla Quartadecima che si ha o nel giorno stesso o dopo il giorno dell' equinozio (921), si cerchi il termine pasquale t del dato anno (947), la lettera quotidiana q che questo giorno ha di fianco (934) e la lettera domenicale u, u' dell' anno dato (935. 936). Ora o le lettere q, u son le stesse, e allora la Quartadecima t sarà in Domenica, onde la Pasqua anderà alla Domenica seguente; o le lettere q, u son diverse, e allora procedendo da q fino ad u nell' ordine delle lettere quotidiane, si avrà la Pasqua nella Domenica u. Ecco pertanto le formule che determinano il dì z di Pasqua, intendendo che per la Gregoriana si cangi t, u, q in t', u', q'.

$$\text{se} \left\{\begin{array}{l} u > q \\ u = q \\ u < q \end{array}\right. \text{ sarà } \left\{\begin{array}{l} z = t + u - q \\ z = t + 7 \\ z = t + 7 + u - q \end{array}\right.$$

Esempio. Sia $n = 1799$; dunque nel Calendario Giu-

liano il ciclo lunare $l = \text{R}\,\frac{1800}{19} = 14$ (929), l'epatta $p = \text{R}\,\frac{11.14}{30} = 4$ (937), il novilunio di Marzo $x = \text{R}\,\frac{34-4}{30} = 30$ (942), la Quartadecima (poichè $x > 18$) $t = \text{R}\,\frac{46-4}{30} = 12$ d'Aprile (947), la lettera quotidiana del 12 d'Aprile $q = \text{R}\,\frac{02}{7} = 4 = \text{D}$ (934), la domenicale $u = 2 = \text{B}$ (934); e poichè $u < q$, ($\text{B} < \text{D}$), si avrà la Pasqua nel dì $z = 12 + 7 + 2 - 4 = 17$ d'Aprile.

Ma nel Calendario Gregoriano il ciclo lunare $l = 14$, l'epatta $p' = \text{R}\,\frac{154 + 27 - 17 + 4 + 5}{30} = 23$ (938), il novilunio di Marzo $x' = \text{R}\,\frac{31 - 23}{30} = 8$ (944), la Quartadecima (poichè $x' > 7$ ma < 19) $t' = \text{R}\,\frac{44 - 23}{30} = 21$ di Marzo (947), la lettera quotidiana del 21 di Marzo $q' = \text{R}\,\frac{80}{7} = 3 = \text{C}$ (934), la domenicale $u' = 6 = \text{F}$ (934); e poichè $u' > q'$ ($\text{F} > \text{C}$), si avrà la Pasqua nel dì $z' = 21 + 6 - 3 = 24$ di Marzo.

949. Per maggior comodo degli studiosi aggiungiamo qui una Tavola del rapporto tra i giorni nostri volgari e quelli degli antichi Romani, ove si deve avvertire che i giorni contrassegnati dalle *Calende* (fuorchè il dì primo dei mesi) portano sempre il nome del Mese che segue: così il dì 20 di *Giugno* cui corrisponde per fianco XII, è indicato col *XII. Kalendas Iulii*; il 29 di *Gennajo* col *IV. Kal. Februarii*, il 29 di *Novembre* col *III Kal. Decembris* ec.: onde per passare all'opposto dall'espressione latina delle Calende ai giorni comuni, convien portarsi al mese precedente a quello che vi è indicato; così *XVI. Kal. Februarii* deve cercarsi in *Gennajo* e darà il dì 17 che gli è di fianco; *XVI. Kal. Martii* si cercherà in *Febbraio* e darà il dì 14 ec.

Gennajo Agosto Dicemb.	Marzo Maggio Luglio Ottobre	Aprile Giugno Settem. Novem.	Febbrajo *comune*	Febbrajo *bisestile*	
1	1	1	1	1	Kalendis
.	2	.	.	.	VI. Nonas
.	3	.	.	.	V.
2	4	2	2	2	IV.
3	5	3	3	3	III.
4	6	4	4	4	Pridie Nonas
5	7	5	5	5	Nonis
6	8	6	6	6	VIII. Idus
7	9	7	7	7	VII.
8	10	8	8	8	VI.
9	11	9	9	9	V.
10	12	10	10	10	IV.
11	13	11	11	11	III.
12	14	12	12	12	Pridie Idus
13	15	13	13	13	Idibus
14	.	.	.	.	XIX. Kalendas
15	.	14	.	.	XVIII.
16	16	15	.	.	XVII.
17	17	16	14	14	XVI.
18	18	17	15	15	XV.
19	19	18	16	16	XIV.
20	20	19	17	17	XIII.
21	21	20	18	18	XII.
22	22	21	19	19	XI.
23	23	22	20	20	X.
24	24	23	21	21	IX
25	25	24	22	22	VIII.
26	26	25	23	23	VII.
27	27	26	24	24, 25	VI.
28	28	27	25	26	V.
29	29	28	26	27	IV.
30	30	29	27	28	III.
31	31	30	28	29	Pridie Kalendas

950. Termineremo col proporre al solito alcuni Problemi per esercizio degli Studiosi.

I. Date le quantità g ed f della gravità e della forza centrifuga sotto l'equatore, e supponendosi che le particelle componenti la Terra, presa come omogenea per tutto, gravitin verso il centro in ragione della potenza n delle lor distanze dal centro stesso, si cerca la quantità della compression dell'asse terrestre. *Ris.* Chiamando a, b i due raggi massimo e minimo, si avrà $a : b ::$

$(2g)^{\frac{1}{n+1}} : (2g - (n+1)f)^{\frac{1}{n+1}}$.

II. Data la declinazione δ di una stella e la latitudine geografica l, si cerca a quale altezza a ed in qual momento il suo moto comparirà verticale. *Ris.* $sen\ a = \frac{sen\ l}{sen\ \delta}$; e chiamando h l'angolo orario corrispondente, si avrà $\cos h = tang\ l \cot \delta$.

III. Data l'altezza apparente a' di un astro, la sua declinazione δ e l'ora in cui il suo moto è verticale, determinarne la refrazione. *Ris.* Se sia h l'angolo orario nel momento in cui la stella esce dal dato verticale, ed a la sua vera altezza, si troverà $sen\ a = \frac{\cos h}{\sqrt{(\cos^2 \delta + \cos^2 h\ sen^2 \delta)}}$ e quindi la refrazione $a' - a$.

IV. Data la latitudine l, cerco la declinazione δ di quelle fisse che passano più velocemente delle altre tra due date altezze a, a' cioè tra due dati almicantarat, *Ris.* $sen\ \delta = sen\ l \times \frac{sen \frac{1}{2}(a + a')}{\cos \frac{1}{2}(a - a')}$.

V. Poste le stesse cose e fatto $a' = 0$, cercasi il tempo x che impiega una stella a giunger colla massima velocità dall'orizzonte alla data altezza a. *Ris.* Chiamando h', h gli angoli orarj della stella nei momenti in cui si ritrova nell'orizzonte e all'altezza a, troveremo $sen \frac{1}{2}(h' - h) = \frac{sen \frac{1}{2} a}{\cos l}$.

VI. Coi medesimi dati e fatta a negativa $= -18°$, cercare il giorno del minimo crepuscolo per Firenze e la sua durata. *Ris.* Il giorno cercato è il dì 4 di Marzo o il dì 9 d'Ottobre, e la durata del crepuscolo sarà di 1^or^ 40′ 6″.

VII. Incerti del luogo ove Zoroastro istituì le sue osservazioni astronomiche, leggiamo nelle sue Opere che il più lungo giorno dell'estate era ivi doppio precisamente del più breve giorno d'inverno. Cerco la latitudine l di tal luogo, supponendo che l'obliquità dell'eclittica fosse ai suoi tempi (cioè 11 secoli in circa prima di Gesù Cristo) $= 23° 50' 30''$. *Ris.* $l = 48° 31' 42''$ settentrionale, ovvero $66° 9' 30''$ australe; ma il secondo risultato non ha quì luogo.

VIII. Data l'ascensione retta A della Stella *Aldebaran* $= 66° 4' 16''$, la sua declinazione *boreale* $\delta = 16° 5' 24''$, l'obliquità dell'eclittica $O = 23° 28'$ e la latitudine di un Paese $= l = 43° 46' 30''$, trovare 1°. l'*ascensione obliqua* di questa Stella cioè (supposta la medesima nell'orizzonte in F ed immaginando concavo l'emisfero PSP'ML onde la parte SLM sia l'orientale) l'ascensione retta A' del punto L dell'equatore che nasce con lei; 2°. la longitudine λ' del *punto coascendente* K dell'eclittica. *Ris.* 1°. LY $= - 50° 1' 38''$ cioè il punto di ♈ è al di sopra di FL; perciò $A' = 50° 1' 38''$; 2°. $\lambda' = 74° 49' 57''$. 74

IX. Date le stesse cose si cerca in qual giorno o a qual longitudine Λ del ☉ la Stella *nascerà eliacamente*, cioè potrà per la prima volta esser visibile ad occhio nudo avanti al nascer del ☉, supponendo che ciò accada allorchè il ☉ si trova al nascer di essa depresso ancora sotto l'orizzonte ad una distanza $b\Delta = 12°$. *Ris.* $\Lambda = 96° 5' 40''$, longitudine che conviene al ☉ circa il dì 28 di Giugno.

X. Data l'altezza e di un piano verticale di cui sia nota la declinazione d e data la latitudine l del paese, si cerca l'altezza x dello stile GC e la lunghezza y dell'asse VG affinchè l'ombra o raggio solare non esca dal piano nel solstizio estivo e vi si comprenda anche il centro. *Ris.* Se si chiami u l'angolo dell'obliquità dell'eclittica aumentato del semidiametro solare, sarà 91

$$x = \frac{e \cos l \cos d \,\mathrm{sen}\,(l - u)}{\cos u}, \quad y = \frac{e \cos d \,\mathrm{sen}\,(l - u)}{\cos u}.$$

XI. Determinare i valori dello stile e dell'asse per l'orologio orizzontale, riguardo al punto del solstizio d'inverno e al centro.

$$Ris.\ x = \frac{e \,\mathrm{sen}\, l \cos (l + u)}{\cos u}, \quad y = \frac{e \cos (l + u)}{\cos u}.$$

XII. Descriver sul piano orizzontale VMB l'orologio solare alla latitudine geografica di $43° 46' 40''$, determinando in parti dello stile o gnomone CG 1°. la distanza del piede C dello stile dal *centro orario* V; 2°. il raggio AG $=$ AD del circolo equatoriale (832); 3°. la direzione delle linee orarie nV ec. per mezzo della misura delle tangenti An, AN, AN' ec. condotte al circolo equatoriale e di quella delle normali Dt' ec. con- 89

89 dotte sopra CM dal punto D, per supplire se occorra alla mancanza del centro orario allorchè caderebbe fuori del piano dato; 4°. le distanze Cs, CS dei limiti solstiziali s, S dal piede C, presa l'obliquità dell'eclittica (aumentata del semidiametro solare) $= 23° 44'$. *Ris.* Chiamando A.I, A.II, D I, D II ec. le distanze cercate tra i punti A, D e le linee orarie I o XI, II o X, III o IX ec., e facendosi CG $= 1000000$, si avrà VG $= 1445372$, VC $= 1043600$ e quindi

CA		= 958221	Cs	= 364841
AG	= AD	= 1384987	CS	= 2415539
A.I.	= A.XI.	= 371106	D.I. = ec.	= 627861
A.II.	= A.X.	= 799622	D.II.	= 1352852
A.III.	= A.IX.	= 1384987	D.III.	= 2343281
A.IV.	= A.VIII.	= 2398867	D.IV.	= 4058556
A.V	= A.VII.	= 5168840	D.V.	= 8744974

La linea oraria delle VI sarà una parallela $i\,i'$ condotta dal centro orario alla sezione NN' dell'equatore; e le linee delle ore V della mattina e delle VII della sera saranno un prolungamento Vu' delle linee dell'ore V della sera e VII della mattina.

XIII. Trovar l'Epatta Gregoriana p' per l'anno $n = 16825$. *Ris.* $p' =$ XVI.

XIV. Qual fu il giorno di Pasqua negli anni di G. C. 1000 e 1696? *Ris.* 31 Marzo e 22 Aprile.

XV. Trovare 1°. i *limiti della Pasqua* cioè i due giorni, prima e dopo dei quali la Pasqua non può cadere: 2°. assegnar la lettera domenicale e l'epatta che convengono agli anni in cui la Pasqua cade nell'uno o nell'altro limite. *Ris.* 1°. i due limiti sono il dì 22 di Marzo e il dì 25 d'Aprile; 2°. cadendo la Pasqua nel primo, la lettera domenicale è D e l'epatta è XXIII; cadendo nel secondo, la lettera domenicale è C e l'epatta ora è XXV ed ora è XXIV.

Fine dell' Astronomia.

INDICE
DEI CAPITOLI

E d' alcune cose principali

Del Secondo Tomo.

ELEMENTI D' OTTICA

ELEMENTI D' ASTRONOMIA.

PARTE I. TEORÌA DEI CORPI CELESTI

PARTE II. TEORÌA DELLE MACCHINE E DELLE APPLICAZIONI ASTRONOMICHE.

Natura delle Macchine e applicazioni Astronomiche. Definizioni dell' une e dell' altre 209.

Orologio Astronomico. Modo di assicurarsi della sua esattezza 210.

Meridiana. Modo di segnarla 212. Meridiana filare 214. Meridiano d' una Provincia ec. 215. e *seg.*

Telescopio. Avvertimenti 218. Misura del suo campo ottico 219.

Quadranti Murale e Mobile. Avvertimenti 220. Nonio o Vernier 220. 221. Altre avvertenze sul Quadrante 222. Caso del passaggio degli Astri fuor della linea di collimazione *ivi*. Macchina Parallattica 223. Circolo Repetitore 223. e *seg.*

Tavole Astronomiche. Loro usi pratici 226. Metodo d' interpolazione 227.

Gnomonica. Suo Oggetto 228. Metodo di descrivere un Orologio sopra un piano Orizzontale o Verticale 229. e *seg.*

Calendario. Parte Storico-teorica del Calendario 238. e *seg.* Parte pratica colla soluzione di tutte le questioni relative al Calendario 246. e *seg.* Problemi Astronomici da sciogliersi per esercizio 261. e *seg.*

CORREZIONI ED AVVERTIMENTI

TOMO I.

Pag.	Verso	ERRORI	CORREZIONI
46	17	$c' = \frac{ds}{dt}$	$c' = \frac{dx}{ds}$
47	14	CSM	SCM
66	17	(L. 284)	(L. 584)
67	12 e 17	(L. 930)	(L. 935)
72	22	dall'	dell'
74	2	(L. 744. 745)	(L. 644. 645)
ivi	7	$f'' = 0$:	$f' = 0$,
94	6	mov mente	movimento
97	23	$x = 438', 52 \ldots x = 1', 86$	$x = 436', 65 \ldots x = 3', 73$
108	10	stato	strato
127	10	macchna	macchina
132	1	o della	e della
158	14	è doversi	e doversi
216	8	. . . . 38928 *	. . . . 22751 *
ivi	9	. . . . 61072	 77249

TOMO II.

Pag.	Verso	ERRORI	CORREZIONI
16	13	$\frac{b}{p}$	$\frac{b}{p'}$
48	7	bcq	bcq^2

50 29 e *seg.* *Avvertimento*. Nel decorso di questa edizione si è creduto bene di preferire alle Tavole del Sig. La-Lande, da cui si presero e le refrazioni e i fattori per gli esempj addotti (535) (e che era nostro disegno di riportare interamente) le Tavole colle refrazioni e fattori pubblicati nell'Efemeridi Milanesi del 1808. La più esatta proporzione indagata dei volumi dell'aria a 0° e 80° del Termometro Reaumuriano ec. le rende più pregevoli e più sicure; mentre il fondamento, il raziocinio e il modo di farne uso è precisamente lo stesso.

Pag.	Lin.	Errori	Correzioni
74	6	della	dalla
91	14	$b < r''$	$b < r'$
112	26	50″,054	50″,254
115	27	(618)	(623)
120	23	$\sqrt{\frac{r}{g'}} = \sqrt{\frac{r'}{g}}$	$\sqrt{\frac{r}{g}} = \sqrt{\frac{r'}{g'}}$
131	16	$\cos\lambda \cos x$	$\cos\lambda \,\mathrm{sen}\, x$
138	*ult.*	$\mathrm{sen}\,O$	$\mathrm{sen}\,O'$
164	24	Giove	G, ove
178	22	$\cot u \times \frac{1}{\cos^2 u}$	$\cot u \times \frac{1}{\cos u}$
214	2	Mg . . . . n, g	MB . . . . n, B
217	*marg.*	. . . . manca	Fig. 89
ivi	6	MVB $= g$	MVB $= a$
220 e 221	*marg.*	Fig. 91	Fig. 94
222	5	r''	r^2
224	28	Cm	ad
ivi	31	ACa	SCa
225	31	$\left(\frac{t^2}{100}\right)^4$	$\left(\frac{t^2}{100}\right)^2$
230	*penult.*	$\mathrm{sen}\,x$	$\mathrm{sen}\,q$
232	32	si alzerà Cq ec.	si alzerà Cq normale a CV e si farà colla retta qV l'angolo CqV $= l$, latitudine del paese. Chiamando p l'angolo CVE della sustilare col a verticale VM condotta per qualunque suo punto V (e perciò anche colla meridiana (898)) se si scriva una lettera x nell'intersezione di VM e Cq e si supponga CV $= 1$, si avrà C$q = \cot l$, C$x = \mathrm{tang}\, p$, e chiamando d la declinazione del piano, si troverà come in breve (903. III°.) Cq : Cx :: 1 : $\mathrm{sen}\, d = \mathrm{tang}\, l\, \mathrm{tang}\, p$
234	1	$\mathrm{tang}^2 d$	$g^2 \mathrm{tang}^2 d$
263	27	$y = \frac{e \cos d\, \mathrm{sen}(l-u)}{\cos u}$	$y = \frac{e\, \mathrm{sen}(l-u)}{\cos u}$

TAVOLE ASTRONOMICHE

E

LORO SPIEGAZIONE ED USI.

AVVERTIMENTO

Le seguenti Tavole Astronomiche sono state ridotte nella presente forma per uso dell' Osservatorio Ximeniano delle Scuole Pie di Firenze, e per servir di corredo alla 3ª. edizione dei nostri Elementi di Fisica-Matematica. L' esempio dato dal celebre Astronomo Sig. *Barone di Zach*, di concentrare in una piccola mole non solamente quanto di più interessante contengono le famose Tavole dei Sigg. *De-Lambre e Bürg*, ma quanto anche di più ingegnoso e più comodo per facilitare e perfezionare i calcoli ha immaginato Egli stesso, è stato un potente stimolo per imitarlo: tanto più che la mole del Libro e varie altre circostanze non permettevano il riprodurre in intero le preziose Tavole Solari e Lunari da Lui pubblicate in Firenze nel 1809. Quindi è che fin da principio la nostra idea era solamente di dare i mezzi onde ottenere con queste Tavole una mediocre approssimazione dei risultati, che bastasse per l' esercizio delli Studenti; i quali poi consultando Tavole più estese ed esatte, ottener potessero le soluzioni complete dei lor Problemi.

Ma come avviene, che non di rado tra mano cangia natura il lavoro, e passo passo si incontrano con delle nuove difficoltà, nuovi mezzi di spianarle e di dare all' Opera quella perfezione che prima non si sperava: così appunto nel caso nostro si è colla pratica rilevato, che anche in limiti sì ristretti e per il numero e per il taglio delle pagine, non era impossibile di procurare alle nostre Tavole il pregio di una rigorosa esattezza, senza nemmeno moltiplicar di soverchio quelle avvertenze, che pure son necessarie per ottenerla da così abbreviati elementi.

Un tal merito, che si deve al singolar genio ed instancabil travaglio del Professore aggiunto di Astronomia, *P. Giovanni Inghirami*

e dei suoi studiosissimi allievi *Pedralli*, *Linari*, *Bonelli*, *Cantini* e *Doveri*, non si è esteso soltanto a ciò che riguarda il Sole e la Luna, ma anche a ciò che riguarda i Pianeti, le Tavole dei quali sono state in gran parte calcolate di nuovo sulle più moderne ed assicurate teorie. Quanto ai quattro più recentemente scoperti, non sembrano finora raccolti, rispetto ad essi, tanti elementi che possan somministrare la stessa facilità e la precisione medesima, e ci siam perciò contentati di quanto se ne accenna nella Tavola o *Quadro Generale dei Pianeti* (pag. 60 e 61), di cui ci confessiam debitori all'egregio *Efemeridista* di Milano, Sig. *Francesco Carlini*.

Frattanto era necessario il premettere le nozioni e i *dati* fondamentali o *comuni*, sui quali posano o con cui si trattano i calcoli. Quindi le Tavole sono state distinte in quattro classi, cioè *Generali*, *Solari*, *Lunari* e *Planetarie*.

Nella spiegazion di esse e nelle loro applicazioni parrà forse che abbiamo qualche poco dimenticata quella brevità che erasi tanto cercata nel compilarle: ma convien riflettere che trattandosi di assuefarvi dei Giovani principianti, per i quali principalmente si stesero gli Elementi suddetti, è importantissimo il non lasciar dubbj o equivoci circa il modo di farne uso, e non posson mai dettagliarsi troppo i mezzi di precisione e di sicurezza nei calcoli.

Avremmo voluto aggiungere qualche cosa riguardante il calcolo delle Comete, eccitati anche dal desiderio del Pubblico, risvegliato ora maggiormente dalla comparsa di quella che attualmente si vede. Ma oltrechè la mole del Libro e il tempo dell'impressione andava aumentandosi troppo sul concepito disegno, abbiamo creduto meglio di differirne l'esecuzione fino al momento in cui la Specola Ximeniana, corredata finora sol per metà, sia provvista di quanto occorre per soddisfar pienamente l'util curiosità dei nostri Studenti, con assuefarli a impiegare insieme l'occhio e l'ingegno coll'alternativo esercizio dell'osservazione e del calcolo; giacchè finora mancano in essa le Macchine necessarie per assoggettarvi quei Corpi che non si rendon visibili se non fuori del Meridiano.

SPIEGAZIONE

ED USI DELLE TAVOLE

Tavola I. (pag. 3 e 4). Contien questa Tavola la posizione Geografica dei principali luoghi della Terra, cioè di tutti gli Osservatorj esistenti a nostra notizia. Le Latitudini sono estratte fedelmente dalle *Tavole portatili* del Sig. Baron di *Zach*, da quelle pubblicate dal *Bureau* delle Longitudini, e dalla *Conoscenza dei Tempi*. Quelle della *Metropolitana*, dell'*Osservatorio nostro* e del *Museo* di Firenze ci vengono dal prelodato Sig. Baron di *Zach*, che le ha stabilite dopo diligentissime osservazioni fatte da se medesimo sulla faccia dei Luoghi Le iniziali A, B indicano se la Latitudine è Australe o Boreale, e si suppongono ripetute in tutti i versi seguenti: anzi avvertiamo ora per sempre che ciò si intende egualmente di tutte le lettere, segni e cifre che in qualsivoglia colonna si troveranno o isolate o scritte di fianco, e perciò son dette *comuni*. Si eccettua soltanto il caso della lettera B posta nella serie degli anni (pag. 11, 17, 23 ec.) destinata unicamente a segnare i *bisestili*. Le Longitudini son contate da Parigi, ed esprimono la distanza *in tempo* fra i Meridiani di ciascun Luogo e quello precisamente dall' Osservatorio Imperiale di detta Città, cioè notano l'angolo orario che questi Meridiani fanno al Polo, in ore, minuti e secondi. Le negative indicano che il Paese è orientale rispetto a Parigi, le positive che è occidentale.

Del resto questa Tavola è della maggior necessità, specialmente per l'oggetto di ridurre al Meridiano suddetto (che è generalmente quello per cui son calcolate tutte le Tavole) le osservazioni fatte in luogo diverso. Ne vedremo l'uso più volte nel corso di questa Spiegazione.

Tav. II. (pag. 5). Da questa Tavola si hanno gli angoli della verticale, e le dimensioni dei Gradi e Raggi Terrestri nell'ipotesi del rapporto di 310:309 tra gli Assi Equatoriale e Polare. Questo rapporto, fra i molti che si sono adottati fin qui, è quello che vien prescelto dal Sig. Baron Zach e che sembra risultare dalla gran misura della Meridiana Francese. Noi lo abbiamo adottato per questo doppio titolo. Frattanto la Tavola, chiara per se medesima, non ha bisogno di Spiegazione.

Tavole III e IV (pag. 6). La forma dai moderni Astronomi immaginata per gli Argomenti che regolano l' Equazioni di Longitudine e Latitudine, e che noi pure abbiamo addottata, suppone la circonferenza divisa in 1000 parti ed obbliga bene spesso a cangiare i gradi, minuti e secondi nelle parti millesime corrispondenti, e reciprocamente.

Le due Tavole che quì diamo rendono assai facile e pronta sì l' una che l' altra conversione. Se ne apprenderà l' uso dagli Esempj, e avvertiremo intanto 1°. che la Tavola III. suppone l' arco dato in gradi, minuti e secondi, espressi sotto le colonne G, M, S, e dà immediatamente le parti millesime per ciascuna di queste tre quantità nelle respettive colonne P: sarà facile per altro il dedurle ancora per i decimi di secondo, dividendo per 10 il valor delle parti corrispondenti ad un egual numero di secondi, o avanzandone di una cifra a destra la virgola, secondo la regola della division decimale; 2°. che reciprocamente la Tavola IV (nelle cui colonne le stesse lettere hanno lo stesso significato) suppone il numero delle parti date con tre sole cifre decimali; per la quarta, quando abbia luogo, potrà aversene il valore in secondi dividendo come sopra per 10 quello che corrisponderebbe alla medesima cifra considerata come terza decimale.

Esempio I. Si tratti di ridurre in parti millesime di circonferenza 328° 28′ 28″

La colonna G dei Gradi Tav. III dà	per 320°	888,8889
	per 8°	22 2222
La colonna M dei Minuti	per 28′	1 2963
La colonna S dei Secondi	per 28″	0 0216
In tutto per le parti cercate si avrà		912,4290

Esempio II. Si voglian ridurre in parti millesime 125°31′22″,4.

Abbiamo come sopra dalla colonna G	per 120°	333,3333
	per 5°	13 8889
dalla Colonna M	per 31′	1 4352
dalla Colonna S	per 22″	0 0170
	per 0″,4	0 0003
		348,6747

Osserv. Le parti corrispondenti a 22″, come si è insegnato di sopra, si ottengono colle cifre 0, 0 scritte di fianco, coll' 1 isolato che è di faccia a 13″, e col 698 che è di faccia ai 22″, le quali unite insieme fanno 0,01698, ovvero (rigettando l' ultima cifra) 0,0170. Così le parti di 0″,4 si hanno da quelle di 4″ che sono 0,00309 e che divise per 10 divengono 0,000309, ovvero 0,0003.

Esempio III. Si debban convertire in gradi le parti millesime 912,429.

Si avrà dalla Tavola IV	per 900 parti	324° 0′ 0″
	per 12	4 19 12
	per 0,400	8 38 ,40
	per 0,029	37 38
	In tutto, parti	328°28′27″,98

Esempio IV. Si cangino in gradi, parti 348,6747.

Avremo dalla stessa Tavola IV	per 300 parti	108° 0′ 0″
	per 48	17 16 48
	per 0,600	12 57 ,60
	per 0 074	1 35 90
	per 0 0007	0 91
		125°31′22″,41

Tavole V. VI. VII. VIII. (pag 7 e 8). Da queste Tavole si hanno i giorni in frazioni d' anno, la corrispondenza fra quelli di ciascun mese e quelli dell' anno, e le espressioni delle ore, minuti e secondi, in rotti di giorni o d' ore o di gradi. Il loro sistema è dei più comuni ed è facile l' applicarlo. Solo osserveremo che nella Tavola V. è supposto il giorno nel suo principio e non nel suo termine.

Tavole IX. X. XI. (pag. 9). Con la IX. si convertono in tempo le parti d' equatore, cioè si hanno le parti d' equatore che scorrono sotto un Meridiano qualunque nella durata di un determinato tempo sidereo. All' opposto la X. dà il tempo sidereo necessario al passaggio di un arco qualunque d' Equatore per il Meridiano. Questo è ciò che comunemente si chiama *convertire il tempo in parti, o le parti in tempo*. L' XI. somministra il modo di dedur prontamente (in gradi e decimali di grado) l' Ascensione retta *vera* del Sole dalla distanza del Sole (*in tempo*) da 0° di ♈, ove si osservi che per errore è stato scritto in cima della 4ª e 6ª colonna Min. in vece di Gradi. Questa Tavola divien tanto più vantaggiosa, quanto che nella *Conoscenza dei tempi*, la più comune fra tutte le Efemeridi, l' A. R. ☉. è soppressa, ed in suo luogo vi si costuma appunto di dar la distanza (*in tempo*) del Sole dal punto Equinoziale. Ma è da avvertirsi nel farne uso, che le ore e i minuti del tempo dato se vi sieno secondi, o le ore soltanto se i secondi manchino, debbon supporsi aumentati d' un' unità. Così pure deve avvertirsi rapporto alla Tav. IX. che una stessa colonna col doppio titolo M, S dà le quantità corrispondenti ai Minuti e ai Secondi; ma per i Minuti queste quantità risultano in

Gradi G, e Minuti M, per i Secondi risultano in Minuti M e Secondi S. Gli esempj rischiareranno meglio queste avvertenze.

I. Esempio. Si debbono convertire in parti d' Equatore $13^{or}51'38'',93$ di tempo sidereo.

Nella Tav. IX dalla 1ª. colonna si avrà	per 13^{or}	$195^\circ\ 0'\ 0'',0$
dalla 2ª.	per $51'$	12 45 0 0
dalla stessa	per $38''$	9 30 0
Inoltre per la frazione 0,9		13 5
per la frazione 0,03		0 45
In tutto per l'arco cercato		$207^\circ 54' 43'',95$

II. Esempio. Si debbano cangiare in tempo $207^\circ 54' 43'',9$ d' Equatore.

Si avrà dalla Tav. X.	per 200°	$13^{or}\ 20'\ 0'',00$
	per 7	0 28 0
	per $54'$	3 36
	per $43''$	2 87
	per 0,9	0 07
In tutto per il tempo cercato		$13^{or}51'38'',94$

Esempio III. Data la distanza dell' Equinozio dal Sole di $18^{or}15'23''$, dedurne l' A. R. del Sole.

Dovremo secondo l' avvertimento dato, aumentare l'ore e i minuti di un' unità (se non vi fossero i 23" si aumenterebbero le sole ore), e perciò ridurre il tempo dato a $19^{or}16'23''$;

Si avrà pertanto dalla Tav. XI.	per 19^{or}	75°, 00
	per $16'$	11 00
	per $23''$	0 15
		86°, 15

TAV. XII. XIII. XIV. (pag. 10). La XII e XIII cangiano le parti d' Equatore in tempo medio e il tempo medio in parti d' Equatore. Il loro sistema simile in tutto a quello delle Tavole IX e X, non ha bisogno di nuovo schiarimento.

La XIV. è di un uso assai comodo per il caso di un Orologio che montato sul tempo medio o sidereo, non ne segua esattamente l' andamento. La correzione da farsi in tal circostanza all' indicazione per un' ora qualunque si ottiene moltiplicando la quantità che si trae dalla Tavola per l' avanzamento o ritardo diurno dell' Orologio. Il prodotto si sottrarrà dal tempo dell' Orologio se questo anticipa, e si aggiungerà se ritarda. Tutto ciò suppone per altro che il moto diurno dell' Orologio sia esattamente uniforme. Si osservi, che nella Tavola dei secondi, le cifre comuni son sempre 0,000 anche oltre i primi due versi,

Esempio I. Anticipi l'Orologio di 6",5 per giorno sul tempo medio: se ne cerca la correzione per $15^{or}3'14''$.

La Tavola darà	per 15^{or}	0,62499
	per $3'$	0 00208
	per $14''$	0 00017
	Totale	0,62724

Prodotto per 6,5 correzione cercata $=4''08$
Ora esatta $15^{or}3'9'',92$.

Esempio II. Si supponga che l'Orologio ritardi di 4",4 sul tempo sidereo, e se ne voglia l'errore in $10^{or}56'52''$.

Si avrà	per 10^{or}	0,41666
	per $56'$	0 03886
	per $52''$	0 00061
		0,45613

prodotto per $4,4=2,01$. Ora siderea esatta $10^{or}56'54'',01$.

TAV. XV. La necessità di convertire il tempo medio Solare in sidereo, o il sidereo in Solare medio, si incontra in oggi assai spesso nei calcoli Astronomici, anche più elementari. I metodi che si sono immaginati finora per questo genere di operazioni, o richiedono che si abbiano alla mano delle buone Efemeridi, o che si debba almeno conoscere, mediante un calcolo preventivo, l'ascensione retta media del Sole. La Tavola XV. dispensa interamente dall'una e dall'altra necessità.

Si tratti in primo luogo di convertire in sidereo S il tempo medio M per un giorno qualunque G di un anno dato. Corretta l'Epoca M con la differenza D che è tra il Meridiano delle Tavole, o di Parigi (Tav. I.), e quello del luogo per cui si calcola, si determineranno i valori di A,B corrispondentemente all'Epoca dell'anno, quelli di C corrispondentemente ai giorni G, e quelli F, H, L corrispondenremente alle ore, minuti e secondi contenuti in $M+D$. Dopo ciò l'Equazione $S=M+A+C+F+H+L+0,0001\times BG$ darà il tempo sidereo richiesto: Si avverta per altro che se con D negativo si abbia $M<D$, dovrà diminuirsi G di un' unità: come all'incontro dovrà accrescersi di un' unità G, se avendosi D positivo, sia $M+D>24^{or}$.

Esempio I. Si voglia il tempo sidereo per il dì 18. Febbrajo 1811. a 6. ore di tempo medio in Milano.

Poichè si ha per Milano (Tav. I.) $D=-27'24''$, sarà $M+D=5^{or}32'36''$. Inoltre poichè (Tav. VI) il dì 18. Febbrajo di un'anno comune corrisponde al dì 49. dell'anno, sarà $G=49$; onde avendosi per il 1805. (Tav. XV.) $B=-10$, potremo immediatamente concludere il valore di $0,0001\times B\,G=-0,0049$. Ciò posto, abbiamo

Tempo medio dato M	=	6^{or} o′ o″,oo
A (per il 1811.)	=	18 36 58 72
C (per 40 giorni / per 9 giorni)	=	2 37 42 26
	=	35 29 60
F (per 5^{or})	=	49 28
H (per 32′)	=	5 26
L (per 36″)	=	o 10
Somma		3^{or}51′ 4″,02
o,oco1 × B G	=	— o oo
Tempo sidereo cercato		3^{or}51′ 4″,62

Dall' Efemeridi di Milano sotto questo giorno e per l'ora indicata verrebbe ad aversi 3^{or}51′4″,57.

Esempio II. Si cerchi il tempo sidereo corrispondente a 12^{or}2′6″,5 tempo medio, per il dì 24. Agosto dell'anno 1812. in Parigi.

Qui D = o, e l'anno dato essendo Bisestile si ha (Tav. VI) G = 237. Dunque M + D = 12^{or}2′6″,5, e 0,0001 × B G = — 0″,2133 per esser (Tav. XV.) B = — 9. Ciò premesso, avremo

M	=	12^{or} 2′ 6″,5o
A (per il 1812.)	=	18 36 1 05
C (per 230 giorni / per 7 giorni)	=	15 6 47 75
	=	27 35 89
F (per 12 ore)	=	1 58 28
H (per 2′)	=	o 33
L (per 6″,50)	=	o o2
Somma		22^{or}14′29″,82
o,0001 × B G	=	— o 21
Tempo cercato		22^{or}14′29″,61

La conoscenza dei tempi darebbe per questo medesimo istante 22^{or}14′29″,48.

Esempio III. Si determini il tempo sidereo per il dì 20. Febbrajo 1810. a mezzodì medio a Milano.

Avremo M = o^{or}o′o″, D (Tav. I) = — 27′24″ > M. Perciò, quantunque la Tav. VI. dia per il 20 Febbrajo G = 51, dovremo, secondo l'avvertenza, porre G = 50, che con B = — 10″ (Tav. XV.), darà o,ooo1×B G = — o,o5. Poichè intanto M+D = 23^{or}32′36″ si avrà

M = ...	=	o^{or} o′ o″,oo
A (per il 1810.)	=	18 37 56 40
C (per 50 giorni).	=	3 17 7 81
F (per 23. ore)	=	3 46 70
H (per 32′)	=	5 26
L (per 36″)	=	o 10
Somma		21^{or}58′56″,27
o,ooo1 × B G	=	— o o5
Tempo cercato		21^{or}58′56″,22
L' Efemeridi di Milano danno . . .		21 58 56 1

Sia ora da convertirsi in medio M un tempo sidereo dato S. Cercandosi il cangiamento per il punto del mezzogiorno, si potrà usar la formula indicata in piè della pagina ove l'*equinozio* indicato è quello di Primavera. Per qualunque altra ora, si calcolerà in primo luogo col metodo usato nell' Esempio III precedente il tempo sidereo S' per quel giorno a mezzodì medio. Presa in seguito per argomento la quantità S—S' si stabiliranno i valori di F', H, L e posto $N = F' + H + L$, sarà il tempo medio cercato $M = S - S' - N$.

Esempio I. Si voglia il tempo medio corrispondente a $3^{or}51'4'',62$ di tempo sidereo per il dì 18. Febbrajo 1811. in Milano.

Il tempo sidereo S' a mezzodì medio, calcolato per questo giorno si trova di $21^{or}50'5'',48$. Essendo dunque $S = 3^{or}51'4'',62$, sarà $S - S' = 6^{or}0'59'',14$. Avremo perciò

$F' = 0'58'',98$
$H = 0\ \ 0\ \ 00$
$L = \ \ \ 0\ \ 17$

$N = 0'59'',15$, e di quì $M = 6^{or}$, come doveva aversi. (Esempio I. prec.)

Esempio II. Si voglia il tempo medio equivalente a $23^{or}13'29'',61$ di tempo sidereo nel dì 24. Agosto 1812. in Parigi.

Il tempo sidereo a mezzodì medio si trova per giorno

S' $= 10^{or}10'24'',48$
Essendo adunque . . . . S $= 22\ \ 13\ \ 29\ \ 61$
Sarà . . . . S—S' $= 12\ \ 3\ \ 5\ \ 13$
In consequenza . . . $F' = 1'57'',95$
$H = \ \ 0\ \ 49$
$L = \ \ 0\ \ 02$
$N = 1'58'',46$
ed $M = S - S' - N =$. $12^{or}1'6'',67$

Termineremo con osservare che le colonne C, C' esprimono l'accelerazione delle fisse sul tempo medio solare per un numero qualunque di giorni, o il ritardo del moto medio rapporto a quello del primo mobile. Queste due ricerche occorrono bene spesso, ed è utile l'avere come soddisfarvi prontamente.

TAV. XVI. (pag. 12. 13.) Offre questa Tavola un Catalogo delle 36. principali e più celebri Stelle, conosciute volgarmente col nome di Stelle di *Maskelyne*, attese le delicate numerosissime osservazioni fattevi da questo famosissimo Astronomo. La certezza quasi assoluta a cui siamo oggimai giunti per rapporto alla precisa situazione di queste Stelle, le rende del più gran pregio, e quindi si ha sempre ricorso a queste allorchè

si voglia determinare con tutta esattezza il tempo, oggetto dei più interessanti in ogni osservazione Astronomica. Nel riportarne le posizioni, abbiamo prescelte quelle che vengono assegnate dal Chiarissimo *P. Piazzi*, come più moderne e più accreditate, e sul merito delle quali convengono quasi tutti gli Astronomi, specialmente in rapporto alle Declinazioni. Per comodo maggiore le abbiamo ridotte al 1810, epoca più vicina di quella di cui si è servito il celebratissimo Autore. Le Ascensioni rette sono espresse in tempo sidereo: ad ogni bisogno col mezzo della Tavola IX è facile di ridurle in gradi. I numeri di fianco ai Nomi delle Stelle dimostrano i luoghi che esse occupano nel gran Catalogo di *Flamsteed*; i caratteri Greci sono indici stati annessi da Bayer.

Ma la posizione delle Stelle, specialmente allorchè si rapporta all'Equatore, come è più in uso, cangia periodicamente, per necessaria conseguenza della precessione degli Equinozj. Inoltre il luogo apparente non combina quasi mai col vero se non si spogli di tutto l' effetto riunito dell' Aberrazione della luce e della Nutazione del ☊ Lunare. Perciò di fianco a ciascuna posizione abbiamo primieramente inserito il valore delle precessioni annue, nelle quali restano ancora compresi quei moti propri, che i confronti delle più recenti con le più antiche osservazioni hanno scoperti in molte di queste Stelle, e che noi abbiamo quì aggiunti in due colonne distinte. Le precessioni moltiplicate per il numero di anni di cui l' epoca data differisce dal 1810, e per la frazione d' anno corrispondente ai mesi e giorni che potranno contenersi nell' epoca stessa, e secondo il loro segno (che dovrà cangiarsi negli anni anteriori al 1810.) aggiunte o detratte dalle posizioni del Catalogo, daranno le posizioni *vere* (chiamate anche *medie*) ridotte all' epoca data. Per riguardo poi all' Aberrazione e Nutazione, seguitando l' originario pensiero del sempre celebre Sig. Barone di *Zach*, abbiamo introdotte in due respettive colonne e come sopra in linea a ciascuna stella, due quantità ausiliarie *Angolo* φ, e *Log* α, col mezzo delle quali, e con la longitudine media ⊙ del Sole, e ☊ del Nodo lunare prese dall' Efemeridi, l'Aberrazione sarà assai comodamente data dalla formola α sen (⊙$-\varphi$) e la Nutazione dalla formola α sen (☊$-\varphi$) come in piè della Tavola.

Nel caso possibile di mancanza di Efemeridi, le longitudini ⊙, e ☊ potranno determinarsi nel modo che segue. Dalle Tavole Solari I. III. e IV. (pag. 17 18. 19.) e precisamente dalla Colonna di esse intitolata *longitudine media del Sole* si deducano gli Elementi corrispondenti all' anno, mese e giorno per cui si calcola. La somma di tutti questi Elementi equivarrà alla longitudine media ⊙ che si richiede. Similmente dalle Tavole Lunari I. III. e IV. (pag. 23. 24. 25.) e particolarmente dalla colonna che ha in fronte *Arg.* E, si concludano le quantità corrispondenti

all' anno mese e giorno ec. come sopra. La somma di queste quantità sottratta da 1000., e convertita in arco (Tav. IV pag. 6.) darà la longitudine del ☊ Nodo lunare. Nell' uno e nell' altro resultato potranno liberamente trascurarsi le unità di secondo. E quanto alla Tavola IV. Lunare, dobbiamo avvertire a scanso d' equivoco, con la colonna dei bisestili non ha luogo che per i primi due mesi Gennajo e Febbrajo; ciò che si era già avvertito (pag. 18.) per la Tavola IV. Solare.

Calcolate che si avranno l' Aberrazione e la Nutazione, se si aggiungono con il loro segno alla posizione vera ridotta, si avrà la posizione apparente Se si aggiungono a questa con segno contrario si avrà la vera. Verifichiamo tutto questo con un esempio.

Si voglia la posizione apparente dell' α Toro il 14. Aprile 1812.

Calcolo della posizione media

La Tav. V. (pag. 7.) per il 14. Aprile di un Anno intercalare dà 0,285. Dunque 2,285. sarà il fattore per cui dovranno moltiplicarsi le precessioni annue dell' α Toro, onde estenderle al tempo assegnato. Avremo pertanto

Posizione in A. R. nel 1.° Gennajo 1810 . = $4^{or}25'1'',61$
Precessione = $3'',426 \times 2,285$ . . . . . . = + 7 83

A. R. media il 14. Aprile 1812. . . . . . = $4^{or}25'9'',44$

Posizione in declinazione nel 1. Gennajo 1810. = $16°7'\ 0'',8$
Precessione = $+7'',90 \times 2,285$ . . . . . . = 18 1

Declinazione media il 14. Aprile 1812. . . = $16°7'\ 18'',9$

Calcolo dell'Aberrazione = α sen $(\odot - \varphi)$

Longit. media $\odot$ per il 1812. (Tav. Sol. I. pag. 17.) = $9^s\ 9°59'29'',1$
Aumento per Aprile (Tav. Sol. III. pag. 18.) = 2 28 42 29 7
Aumento per 14. giorni (Tav. Sol. IV. pag. 19.) = 13 47 56 6

Somma = $\odot$ = $0^s22°29'55'',4$
Angolo φ per l' Ascensione retta . . . . = 5 7 51 0

$\odot - \varphi$ = $7^s14°38'55'',4$
= 224 38 55 4

Log. sen $(\odot - \varphi)$ = L—sen $44°39'$ = 9,84681
Log. α (per l' A. R.) . . . . . = 0 14207

Somma = Log. Aber. in A. R. = 9,98888 = Log.—$0'',97$
$\odot$ = $0^s22°29'55'',4$
Angolo φ per la Declinazione . . . . = 4 6 47 10

$\odot - \varphi$ = $8^s15°42'45'',4$
= 255 42 45 4

Log. sen $(\odot - \varphi)$ = L—sen $75°42'45''$ = 9,98635
Log. α (per la Declinazione) = 0 57756

omma = Log Aberr. in Declin. = 0 56391 = Log.—$3'',66$

CALCOLO DELLA NUTAZIONE = α sen (☊ — φ)

Arg. E per il 1812 (Tav. Lunari I. pag. 23.) . . = 552,830
Aumento per aprile (Tav. Lun. III. pag. 24.) . . = 13,239
Aumento per 14. giorni (Tav. Lun. IV. pag. 25) . = 2 059

Somma . . . . = 567 628
Complemento a 1000. . . . . = 432 372

Parti per 400. (Tav. Gen. IV. pag. 6.) . . = 144° 0′ 0″,00
per 32 . . . . = 11 31 12 00
per 0,300 . . . . = 6 28 80
per 0,072 . . . . = 1 33 31

☊ = 155°39′14″,11
= 5ˢ 5 39 14 11
Angolo φ per l' A R. . . . . = 5 26 28 50

☊ — φ = 11ˢ 9°10′24″,11
= 339 10 24 11

Log. sen (☊ — φ) = L — sen 20°49′36″ = 9,55089
Log. α (per l' A. R.) . . . . = 0 09037

Somma = Log. Nutazione in A. R. . . = 9,64126 = L-0″,44

☊ = 5ˢ 5°39′14″,11
Angolo φ (per la Declinazione) . . . . . = 8 11 52 10

☊ — φ = 8ˢ 23°47′ 4″,11
= 263 47 4 11

Log. sen (☊—φ) = Log. — sen 83°47′4″ = 9,99744
Log. α per la Declinazione . . . . . = 0 96815

Somma = Log. Nutazione in Declinazione = 0,96559 = L.—9″,24

A. R. media ridotta al 14. Aprile 1812. . . = 4°25′ 9″,44
Aberrazione . . . . = — 0 97
Nutazione . . . . = — 0 44

A. R. apparente . . . . = 4°25′ 8″,03

Declinazione media . . . . = 16°7′18″,9
Aberrazione . . . . = — 3 7
Nutazione . . . . = — 9 2

Declinazione apparente . . . . = 16°7′ 6″,0

Si può notare che le grandi Tavole di Aberrazione e Nutazione del Sig. Baron di *Zach* conducono precisamente a questi medesimi risultati.

TAV. XVII. (pag. 14. 15.) Nella spiegazione della Tavola precedente abbiamo notato che per determinare il tempo con esattezza, si suol far uso delle stelle Maskelyniane. Infatti osser-

vandosi alcuna di queste stelle nel suo passaggio al Meridiano, e notandone l'appulso col tempo dell' Orologio che vuol regolarsi (ridotto in sidereo, quando fosse medio solare) la differenza fra l' A. R. apparente della stella e l'ora dell'orologio ne darà manifestamente l'errore, o come suole anche dirsi, l'Equazione, con tanta maggior verità quanto più nota e meglio osservata sarà stata la Stella.

L' esser dunque avvertito del minuto preciso in cui avrà luogo alcuno dei suddetti passaggi, può esser di gran comodo ad un Astronomo che voglia disporsi in tempo per questa importante osservazione. La presente Tavola XVII. esibisce questo vantaggio. Di 7. in 7. giorni vi si trovan notati gli appulsi di 17. stelle di Maskelyne in Tempo Civile. Si sono omesse le altre, attesa la loro gran prossimità ad alcuna di quelle che abbiamo inserite. Nei giorni intermedj si supplirà agevolmente prendendo l'appulso per il più prossimo giorno precedente al dato, e sottraendone la quantità di accelerazione corrispondente alla differenza fra i due giorni. Si ha questa quantità dalla Colonna C' della Tavola XV. Ma se non bisogni un valor rigoroso, il calcolo potrà farsi immediatamente, sottraendo a ragione di 4' per giorno.

I resultati di questa Tavola appartengono propriamente agli anni intercalari o Bisestili. Per i comuni, in Gennajo e Febbrajo dovranno aumentarsi di 1' nel primo anno dopo l' intercalare, di 2. nel secondo, di 3 nel terzo; e di altretranto dovranno diminuirsi negli altri mesi. Infine le sigle S ed M distinguono le ore della sera o pomeridiane, e quelle della mattina.

Esempio. Si voglia il passaggio della Capra al Meridiano il dì 20. Aprile 1811.

Passaggio il dì 15. Aprile	$= 3^{or}28'5$
Accelerazione per 5. giorni (Tav. XV) . . .	$= -20$
Ritardo per il terzo anno dopo l' intercalare . .	$= +\ 3$
Ora del passaggio il dì 20. Aprile	$= 3^{or}11'5$

Tavola Generale dell' Aberrazione ec. (pag. 16.) Questa Tavola è del celebre *D. Gauss*, e serve per il calcolo dell' Aberrazione e della Nutazione di qualunque stella di cui sia nota l'Ascensione retta A. R. (in arco) e la Declinazione δ. Essa suppone nota altresì la longitudine λ del Sole, e la longitudine ☊ del Nodo lunare. In essa Tavola i numeri o cifre Romane superiori e inferiori indicano i *segni*, e richiamano i gradi lateralmente disposti nelle due estreme colonne, i primi cioè quelli della prima, e i secondi dell' ultima. Queste due colonne nella parte superiore della Tavola son comuni agli argomenti tanto di Aberrazione che di Nutazione. Con essi, cioè con λ e ☊ si troveranno nella parte superiore dell' una e dell' altra colonna le quantità ausiliarie φ, ed α ove si noti che il segno di φ inferiore deve cangiarsi, essendo

sempre negativo. Con l' argomento II $= \lambda + \delta$, e III $= \lambda - \delta$ si troveranno nella parte inferiore della colonna per l'Aberrazione le Equazioni II. e III. che servono per l' Aberrazione di Declinazione; e con l' Argomento ☊ si trova altresì nella parte inferiore della colonna per la Nutazione l' Equazione II. che serve per la Nutazione in A. R. Con questi dati l'Aberrazione e la Nutazione si hanno dalle seguenti formole ripertate ancora in piedi della pagina.

Aberr. A.R $= - \alpha \sec \delta \cos(\lambda + \phi - \text{A R}) = - \alpha \cos(\lambda + \phi - \text{A R}) : \cos \delta$ (L. 610. 3)

Aberr. Decl. $= - \alpha$ sen δ sen $(\lambda + \phi - \text{A R})$ + Eq. II. + Eq. III.

Nut. A. R $= - \alpha \tan \delta \cos(☊ + \phi - \text{A R})$ + Eq. II.

Nut. Decl. $= - \alpha$ sen $(☊ + \phi - \text{A R})$

Tutte queste quantità sono in secondi d' arco.

Esempio. Si vogliano l'Aberrazione e la Nutazione dell' α Toro il dì 14. Aprile 1812.

Per l' α Toro si ha come sopra sotto questo giorno A. R. $= 4^{\text{or}}25'9'',44$, cioè in gradi $= 66°17'21'',6$; $\delta = 16°7'18'',9$, e abbiamo già trovato sopra $\lambda = ⊙ = 0^s22°30'$ e $☊ = 5^s5°39'$; sarà dunque

Aberrazione

$\lambda = 22°30'$ $\lambda + \delta = 1^s8°37'$
$+\phi = +\ 1\ 47$ $\lambda - \delta = 0\ 6\ 23$
$-$A. R. $= -\ 66\ 17$

$\lambda + \phi -$ A. R. $= 318°00'$
Log. cos ($\lambda + \phi -$ A. R.)
= Log. sen. 48. . . = 9,8711
Log. sec. δ = colog cos δ = 0 0174
Log. $- \alpha$ . . . . = 1 2749

Log. Aberr. in A. R. . = 1,1634
= Log. $-$ 14'',57.

Log. sen. ($\lambda + \phi -$ A. R. =
Log. $-$ sen. 42°) . . . = 9,8255
Log. sen. δ . . . . . . = 9 4436
Log. $- \alpha$ . . . . = 1 2749

= 0 5140

= Log + 3,50
Eq. II. = $-$ 3 16
Eq. III. = $-$ 4 01

Aberraz. in Declinaz. = $-$ 3,67

Nutazione

☊ = 155°39'
$+\phi = +\ 5\ 43$
$-$ A. R. $= -\ 66\ 17$

☊ $+ \phi -$ A. R. = 95° 5
Log. cos ($\lambda + \phi -$ A. R) = 8,9475
Log. tang. δ . . . . . . = 9 4609
Log. $- \alpha$ . . . . = 0 9670

= 9,3754

= Log. + 0,24
Eq. II. . = + 6 82

Nutazione in A. R. . . = $-$ 6,58

Log. sen ($\lambda + \phi -$ A. R.) = 9,9983
Log $- \alpha$ . . . . = 0 9665

Log. Nutaz. in Declinaz. = 0,9648
= Log. $-$ 9,22

Le differenze di qualche decimo di secondo d'arco che si incontrano fra questi resultati e quelli della Tavola XV, non sono da attendersi nel presente stato dell' Astronomia. E' ben vero che quei della Tav. XV. son più rigorosi.

TAVOLE SOLARI.

Queste Tavole son similissime a quelle del celebratissimo Sig. Barone di *Zuch* con qualche leggiera varietà, sì nella distribuzione che abbiamo adattata al presente sesto, sì nell'estensione che abbiamo resa alquanto maggiore affin di ridurne l'uso più facile, avendone nel rimanente mantenuto tutto il rigore.

Il principale oggetto di queste Tavole è di determinare il luogo Solare per un istante qualunque. Questo per altro deve esser dato in tempo medio: che se non lo sia, nè si abbia mezzo di ridurvelo, deve in principio supporsi tale, e debbonsi correggere in seguito i resultati secondo il metodo che insegneremo. Deve inoltre ridursi al tempo che si conta nel momento stesso sotto il Meridiano delle Tavole, il che si ottiene sommandolo con la longitudine (*in tempo*) del luogo per cui si calcola (presa secondo il suo segno), come vedesi verificato nel Tipo stesso a pag. 22. che sempre supporremo sotto l'occhio di chi legge nel corso delle illustrazioni seguenti.

Tavole I. . . . . V. (pag. 17. 18. 19.) Allorchè vuol calcolarsi un luogo del Sole, conviene innanzi cercarne il *medio* e preparare i dati o *Argomenti* per l'*Equazioni* o quantità da aggiungersi ad esso medio onde concluderne il *vero*. Suppliscono a questo le Tavole I. . . . . V. La prima dà l'*Epoche* o luoghi medj e i valori degli Argomenti per il principio di ciascun anno; la III ne dà i moti o aumenti per i mesi, la IV per i giorni, e finalmente la V per le ore, minuti e secondi: cosicchè il luogo medio e il calcolo degli Argomenti per un'Epoca data dipenderà dalla somma di tutte le predette quantità, estratte respettivamente da ciascuna Tavola secondo gli anni, mesi, giorni ec. componenti l'Epoca stessa.

Ma deve avvertirsi 1.° che mentre la longitudine e anomalia media sono espresse in segni, gradi, minuti ec., tutti gli altri Argomenti lo sono in parti millesime della circonferenza: laonde se qualche somma sorpassi il mille, come 1489. (Arg. II.) se ne segnerà soltanto l'eccesso 489; nel modo stesso che per 390° si scriverebbero 30°; 2°. che le quantità riportate nelle Tavole I. e III. son propriamente quelle del mezzogiorno precedente, e che per il dì primo di un anno o di un mese, oltre le quantità che seco porta quel dato mese o anno, dee prendersi quella ancora che corrisponde a 1. fra i giorni; 3.° che la colonna per i Bisestili nella Tav. III. deve aver luogo soltanto nei mesi di Gennajo e Febbrajo, e che negli altri mesi, anche per gli anni *bisestili*, dovranno cercarsi i giorni nella colonna degli anni *comuni*.

Per comodo di quanto dovrà operarsi in seguito, gioverà il ridurre i secondi dell'Arg. I o Anomalia media, in decimi di minuto, e successivamente i minuti in decimi di grado. Si veda il Tipo, e la Tavola Generale VII. (pag. 8.)

Ci resta a parlar della Tav. II. Essa è introdotta per maggiormente estender la I. Esige l'uso di essa che si cerchi nel-

la prima parte l'epoca la più prossima ed anteriore a quella dell'anno proposto ; e divisa per 4 la differenza fra le due epoche, si moltiplichino per il quoziente i numeri della 2.ª parte ; il prodotto (secondo il suo segno) si unisca ai numeri della 3.ª indicati dai resti 1, 2, 3 della divisione, e sommato il tutto coll' epoche della 1.ª si avranno quelle per l'anno proposto.

Esempio. Si vogliano l'Epoche e gli Argomenti per l'anno 1812. L'anno più prossimo e anteriore al dato è il 1803; la differenza 9 tra questi due anni divisa per 4, dà 2 di quoziente e 1 di resto. La disposizione del calcolo sarà perciò la seguente

	Long. media ⊙	Arg. I. An. media ⊙	Ar. II	Ar. III	Ar. IV	Ar. V	Ar. VI	Ar. VII	Ar. VIII	Ar. IX	Ar. X	Ar. XI	Ar. ☊	⊙
1803 1.ª p.ᵉ	9ˢ9°11′ 0″,57	5ˢ29°38′53″	234	001	035	794	727	205	480	728	453	314	069	776
2.ª p.ᵉ per 2	3 39 84	— 4 36.14	948	004	746	325	009	508	675	013	014	650	429	000
1.resi.3.ᵈp.ᵉ	44 48 73	+ 43 46 73	394	627	470	918	252	063	084	879	877	834	054	002
Epoca per il 1812.	9ˢ9°59′29.14	6 0 18 3,59	576	632	251	037	988	776	239	620	344	798	552	778

Esattamente come si ha nella Tavola I.

TAV. VI. (pag. 20.) La più considerabile fra l'Equazioni Solari è l'Equazione detta dell'Orbita o del centro, che procede dal moto Ellittico della Terra, ed ha per Argomento l'Anomalia media del Sole. Si chiami ϵ, ed avremo per determinarla l'espressione semplicissima $\log. \epsilon = 3{,}8405326 + \log. \text{sen} (\text{An. m.} ⊙ + \varphi)$, eve φ è dato dall'attual Tavola VI con l'Argomento suddetto An. media ⊙. In questa Tavola i numeri o Cifre Romane superiori ed inferiori indicano i *Segni* dell'Anomalia ; i superiori richiamano al solito i Gradi della prima colonna a sinistra, gli inferiori quelli dell'ultima colonna a destra. Il + e il — che vi si vedono annessi, appartengono propriamente all'angolo φ da trovarsi, e debbon darsi ancora al valor finale di ϵ che ha sempre un segno stesso con φ. Del resto per chi sa usare le Tavole logaritmiche non occorre altra avvertenza nè sul ricavar da questa i valori cercati, nè sulle proporzionali dei valori intermedj ec. ed è solo da notarsi rapporto ai segni inferiori, che qualora con essi non si trovin gradi nell'argomento, ma si vi trovino i minuti, (come se si avessero $7^s 0° 13'$) si permuterà l'argomento in $6^s 30° 13'$, e le parti per i 13′ si faranno proporzionali alla differenza fra $0° 36' 44''$ (valor di φ corrispondente ai $6^s 30°$) e $0° 37' 50''$ (valor corrispondente a 7^s e $1°$).

Ma l'equazion del centro è soggetta ad una piccola equazione diminutiva, il cui valor secolare (di natura sua sottrattivo e perciò di segno contrario ad ϵ) si ha dalla formola $\log. \text{eq. secol.} = \log. \epsilon - 2{,}5644915$: ed essendo la Tavola VI. da cui ϵ dipende, calcolata pei il 1810, la variazione per un'epoca che ne differisca di un

numero n di anni risulterà dal prodotto dell' eq. secolare per $0{,}01 \times n$ ove per gli anni anteriori al 1810. dovrà farsi n negativa come può vedersi nel Tipo, o (che è lo stesso) dovrà darsi ad s e alla variazione un segno comune: così nel Tipo si è fatta n negativa, il cui valore si ha dalla Tav. V gen. (pag. 7.) ove corrispondendo al 28. Maggio il numero 0,403, il suo complemento a 1,000 (cioè 0,597) è la distanza cercata.

TAV. VII. (*ivi*) Succedono in questa Tavola le rimanenti equazioni solari, dette di *perturbazione* perchè dipendenti quasi tutte dall' azione dei Pianeti sopra la Terra, e che mediante l' aggiunta industriosa di una costante, da togliersi in fondo al calcolo, si son potute render per tutti i casi positive. La colonna segnata N serve in comune per gli Argomenti; le altre per l' equazioni; e il numero che portano in fronte oltre al fissarne le denominazioni, richiama l' Argomento da cui ciascuna dipende. Basta quest' avvertenza e l'uso solito delle proporzionali, per costruir facilmente tutte l' Equazioni che si hanno nel Tipo. Queste sommate in seguito con la longitudine media, detratta quindi dalla somma la costante 1', e aggiunta infine l'equazione del centro corretta colla variazione, si ottiene la longitudine vera λ, o luogo vero del Sole. Nel Tipo si ha per l'istante dato $\lambda = 2^s 7^\circ 6' 14'',02$. Con le Tavole di Delambre si ha $2^s 7^\circ 6' 14'',5$, non giungendo la differenza a $0'',5$.

TAV. VIII. (*ivi*). *Latitudine del Sole*. E' affatto moderno l' uso di tener conto di quest'Elemento; in vista della gran precisione che comportano oggidì le osservazioni Astronomiche, specialmente quelle dei Solstizj ed Equinozj fatte con un buon Circolo ripetitore. Risulta da 4. Equazioni con gli Argomenti VI — III, VI + III (differenza e somma del III e VI di longitudine), V — VIII (differenza fra il V e VIII.) e II + ☉ + ☊ (somma del II, ☉, e ☊). Nel resto la maniera di dedurla dalla Tav. VIII è affatto simile a quella data per la Tav. VII, con che dall'avvenuto finale si detragga la costante 1'',18 e si consideri come Australe la latitudine se si avrà un resto negativo.

TAV. IX. (*ivi*) Abbiamo da questa Tavola gli effetti della latitudine sulla Longitudine, A. R e Declinazione Solari osservate. Gli Argomenti sono i segni e gradi di longitudine, e i gradi di declinazione. La Tavola dà dei resultati medj per la latitudine ☉ = 1'' che dovranno moltiplicarsi per la latitudine effettiva affin di cangiarli in veri, e saranno al solito positivi o negativi, secondo la qualità dei segni che accompagnano l' Argomento. Così essendosi trovato nel Tipo, longitudine ☉ ovvero $\lambda = 2^s 7^\circ$, e declinazione ovvero $\delta = 20^\circ 31'$ B, gli effetti medj per la latitudine 1'' sarebbero sulla longitudine ovvero sull' A. R. *osservate* $+0'',16$ e sulla declinazione $-0'',97$, che moltiplicati per la latitudine calcolata $0'',16$ B, diverranno $+0'',02$, e $-0'',15$. Si veda la spiegazione della Tavola VI.

TAV. X. (pag. 21.) Comprende questa Tavola i moti orarj e il semidiametro del Sole. Ciascuna delle quattro parti, nelle quali è divisa, vien regolata da Argomenti diversi, ed è presso a poco disposta come la Tavola VI se non che i segni dell'Argomento qui sono scritti per tutte nella prima colonna verticale, e i gradi procedono di 10 in 10 orizzontalmente di fronte. Si avverta alle costanti segnate in alto e che debbono respettivamente unirsi alla quantità della Tavola.

Così nel Tipo ove abbiamo An. m. ⊙ $= 10^s 26^\circ,41$, risulta per la parte variabile del moto orario in longitudine $0''79$, a cui aggiunta la parte costante $143'' = 2'23''$, si ha per il moto richiesto $2'23''79$.

TAV. XI. (*ivi*). L'uso di regolare il tempo osservando due altezze eguali del Sole diviene in molti casi prezioso, specialmente se non si sia a portata di un Osservatorio stabile e ben corredato. La Tavola XI. dà la celebre equazione detta delle *altezze corrispondenti*, da apporsi alla metà dell'intervallo scorso tra le due osservazioni per concludere il mezzodì vero. Ha quest' equazione due parti date dalle due formule riportate a piè della Tavola e nelle quali α e β sono archi di circonferenza ed hanno per argomento la metà del suddetto intervallo; α e β son secondi di tempo, ed han per argomento la longitudine vera o anche media del Sole. Queste quantità dovran prendersi positivamente o negativamente secondo il segno che si troveranno aver nella Tavola. Infine *tang. lat.* esprime la tangente della Latitudine Geografica del luogo. Si riscontri per esercizio e per maggiore intelligenza il calcolo disteso nel Tipo, per la latitudine $43^\circ 46' 41''$.

TAV. XII. (*ivi*). Da quest' ultima Tavola si ha infine l'obliquità apparente dell' Eclittica. Si deduce per un anno qualunque, diminuendo in ragion di $5'',21$ per ogni dieci anni l'obliquità estiva del 1809 e apponendo le due equazioni della Tavola, diminuite delle respettive costanti. Si veda il Tipo, ove il calcolo è sufficientemente dettagliato.

Nel Tipo oltre i fin qui esposti elementi solari, si hanno l'ascensione retta A, la declinazione δ, e l'equazione detta del tempo. Il calcolo di A e di δ è istituito sulle due formule $tang\ A = tang\ long.\ V.\ \odot\ cos\ obliq$; $sen\ \delta = sen\ long.\ V.\ \odot \times sen\ obliq$. L'Equazione del tempo si ha sottraendo dall' A. R. la longitudine media, e convertendo la differenza in tempo con la Tav. X. (pag. 9). Quest' equazione aggiunta col suo segno al tempo medio, lo cangia in vero; aggiunta al vero con segno contrario, lo cangia in medio. Onde se nel calcolo del luogo del Sole si sia usato il tempo vero in luogo del medio, dovrà correggersi la longitudine avuta di quanto darebbe la Tav. V, preso per Argomento il tempo dell' Equazione; dovendo farsi la correzione in + se l'equazione sarà negativa e in meno se sarà positiva.

TAVOLE LUNARI.

Le prime sei Tavole Lunari (pag. 23. e seg.), sistemate precisamente sul piede delle prime cinque Solari, non presentano veruna nuova difficoltà che meriti ulteriore schiarimento. Ripeteremo soltanto rapporto alla IV, che la colonna dei Bisestili non ha luogo che per i soli mesi di Gennajo e Febbrajo, avvertenza che crediamo esser in questo luogo tanto più necessaria, quanto che si è omesso di riportarla nella Tavola. E nella II. è osservabile l'aggiunta di una IV e V parte per l'Equazioni secolari della longitudine e degli Argomenti, e per l'Equazione a *lungo periodo*. I precetti che sull' uso di quest' Equazioni si hanno nella Tavola son per altro chiari da se medesimi.

Le seguenti Tavole VII, VIII, e IX. comprendono l'Equazioni di longitudine, di latitudine e della parallasse Equatoriale. Differentemente dall'Equazioni Solari, che a riserva di quella del centro si son vedute in ogni caso positive, queste risulteranno nei diversi casi positive e negative. Nelle grandi Tavole di *Delambre* e in quelle del Sig. Baron di *Zach*, che sono in somma le originali delle nostre, questa specie d'inconveniente è evitato. Noi non lo abbiamo creduto opportuno: sì perchè per adottare il nuovo sistema conveniva estender del doppio le Tavole, contro le leggi di quella brevità che ci siamo prefissa; sì perchè la piccola attenzione alla qualità del segno non sembra cosa che non possa facilmente esigersi da dei giovani i quali appunto amiamo di esercitare in questo genere di operazioni per abituarli alla riflessione, e disporli per tempo alle spinosità di calcoli più severi.

Intanto noteremo in generale 1° che l'Equazioni di queste Tavole s'intenderanno sempre date in secondi d'arco, se non sia altrimenti notato, 2° che le colonne laterali estreme contrassegnate con l' N o con il G, appartengono all' Argomento; 3° che se son contrassegnate con N, l'Argomento è supposto essere in parti millesime della circonferenza, se con G è supposto in parti sessagesimali; 4° che per queste ultime il calcolo delle equazioni corrispondenti segue precisamente lo stesso andamento di quello dell' angolo φ nella Tavola VI Solare. Se ne veda il dettaglio al suo proprio luogo, 5° che per le altre, trattandosi d'equazioni divise in più colonne (come sono le prime cinque di longitudine, la seconda di latitudine e le tre ultime della Parallasse) i numeri all'alto e al basso di ciascuna colonna rappresentano le iniziali o *centinaja* dell' Argomento, quelli delle colonne N ne rappresentano il rimanente fino alle unità inclusive. Talvolta la disposizione è inversa, come nella Tavola XIX; 6° che costantemente la colonna N a sinistra di chi legge richiama le iniziali superiori coi loro segni, l'altra le inferiori, e il metodo per inferir l'equazioni in questo sistema è precisamente simile a quello che si usa pei logaritmi; 7° che se si trovino più equazioni contenute tra due colonne N, queste si riferiscono a tutte in comune. Tale è il caso della II e III di lon-

gitudine, della VI fino alla XIII parimente di longitudine ec.; 8°. che se l' equazioni occupano ciascuna una sola colonna, ed hanno per conseguenza tutto intero l' Argomento nelle due colonne N laterali, la laterale a sinistra richiama sempre i segni di fronte, quella a destra richiama i segni di fondo. Va eccettuata la XIII di longitudine nella quale manca il segno di fondo, e se ne trovano due superiormente. Per determinarne la scelta si osserverà, che le due colonne N comuni anche alle sette precedenti equazioni son divise ciascuna in una doppia linea di numeri, la prima che va crescendo dall' alto al basso della Tavola, e l' altra dal basso all' alto. Ora rapporto all' Equazione XIII. il primo segno o il + avrà sempre luogo per la prima delle due linee, il secondo o il — per la seconda: così per il 100. dovrà prendersi il +, per il 400 il —; e parimente per il 660 il +, per l' 840 il —; 9° che incontrandosi una colonna con doppio segno in alto ed in basso, il segno superiore appartiene costantemente alla parte di essa che resta al di sopra della linea di separazione, l' inferiore all' altra: così nell' Eq. IV di longitudine (pag. 27.) il 210 darà — 7,5 e il 220 + 0,5; il 780 renderà — 0,5 e il 790 darà + 7,5; 10° che ovunque manchi il segno è sempre sottinteso il positivo; 11° che i segni son regolati bensì dagli Argomenti, ma debbono riferirsi all' Equazioni, cui di lor natura appartengono Quanto alle piccole equazioni con cui termina la pagina 29, è da notarsi che sebbene omesse da *Delambre*, il Ch. *Zach* ha voluto produrle. Noi lo abbiamo in questo, come nel resto imitato, tenendone a suo esempio per dir così, conto a parte. Il loro sistema è consimile alle precedenti. e solo si osserverà che una stessa colonna appartiene quì a più equazioni, e si è fatt' uso delle cifre arabiche per numerarle.

Meriterebbero infine una speciale avvertenza le ultime otto equazioni di latitudine per la particolarità della loro disposizione; ma si comprende con poco, che tutte hanno in comune sì la linea degli Argomenti che quì è orizzontale e al di sopra, sì quella della quantità corrispondenti, parimente orizzontale e al di sotto.

Noteremo piuttosto rapporto alla XXIV di longitudine che l' Argomento di essa serve ancora per la I di latitudine; e questo è appunto ciò che si vuol significare nel titolo dell' Equazione,

Seguono nelle Tavole X e XI i moti orarj della ☽ in longitudine e in latitudine, che per altro sono soltanto approssimati, giacchè di troppo avremmo dovuto estenderci per dare i veri. Alla mancanza di questi si supplisce con facilità e forse con maggior sicurezza ripetendo il calcolo lunare per due ore consecutive: mentre l' aver con un qualche mezzo più pronto i moti orarj approssimati può essere utile non poche volte, specialmente se come nel nostro caso, l' errore non vada che a pochi secondi. La prima Tavola divisa in tre parti richiama gli Argomenti che avran servito per l' Equazioni XXI, XXII e V di longitudine; l' altra in due parti richiama il primo e secondo di latitudine.

Finalmente nella Tav. XII. si hanno due facili formule per il calcolo del semidiametro orizzontale lunare e suo aumento ad un'altezza qualunque della ☽. L'aumento dipende dall' altezza e da una quantità che è costante per qualunque altezza, ma varia col semidiametro orizzontale. Perciò la Tavola dà diversi valori di questa costante secondo le diverse grandezze del semidiametro.

Premessi questi compendiosi precetti sul calcolo dell' Equazioni, niente altro bisognerà per la ricerca di un luogo lunare che seguir tratto tratto l' andamento del Tipo steso a pag. 32. e segg. a cui abbiam cercato di dar tutto il maggior dettaglio e la più gran chiarezza possibile, cosicchè resti facile a chiunque non solo il concepirne il sistema, ma il poterlo prender per guida in tutti i calcoli consimili. Se si avrà la premura di verificarlo nella sua totalità, quest' utile esercizio darà da se medesimo maggior lume di una lunga spiegazione che se ne volesse premettere. Raccomandiamo perciò questa diligenza: ma pure per esser più abbondanti che scarsi nelle avvertenze e prevenir qualunque ombra di difficoltà che possa incontrarsi, osserveremo:

1.° Che gli Argomenti A,B,C,D,E,F si deducono dalle Tavole con lo stesso metodo che abbiam tenuto per gli Argomenti Solari.

2.° Che l' espressioni B°, C°, D° ec. indicano gli Argomenti precedenti ridotti in gradi, mediante la Tav. Generale IV, pag. 6.

3.° Che l' angolo ϕ si trova nella Tavola VI Solare, preso per Argomento B°.

4.° Che la quantità *s* rappresenta in parti millesime della circonferenza l' equazion del centro Solare, e quindi per rapporto al segno va soggetta alla regola che si ha nella suddetta Tavola VI.

5.° Che gli Argomenti dell'Equazioni, tutti numerati secondo l' ordine dell' Equazione che ciascuno richiama, debbon costruirsi secondo l' espressione che se ne assegna in linea del num. respettivo, e che sempre risulta dalla somma o differenza di quantità che immediatamente gli precedono o che si trovano poco al disopra.

6.° Che i numeri o Cifre Romane, che spesso s' incontrano nella costruzione degli Argomenti, richiamano gli Argomenti corrispondenti già calcolati.

7.° Che l' espressioni 2ª, 3ª, 4ª parte ec. che han luogo talora fra i numeri degli Argomenti, si rapportano più precisamente all' Equazioni, e mostrano che l' Equazione ha più d' una parte, onde più volte deve tornarsi sul di lei calcolo e sempre con diverso Argomento. Così l' equazione XVII. di longitudine ha due parti, l' una dipendente dall' Argomento 152,2, l' altra dall' Argomento 673,8. Per la prima si ha 3″,9, per l' altra 0″,3.

8.° L' Equazioni e i logaritmi costanti rimangon tali, qualunque sia l' Epoca per cui si calcola il luogo lunare.

9.° Il +, o il — che precedono il vocabolo *costante* sotto il segno logaritmico, spiegano se la costante sia di natura sua positiva o negativa; e ciò per regolar giustamente il segno del resul-

tato finale. Così per il nostro caso nel valor di γ la costante dovrà considerarsi come negativa, e siccome è positivo sen B°, (giacchè fin dal principio del Calcolo abbiam trovato $B^\circ = 2^s\ 10^\circ\ 42'$.ec.,) perciò il valor di γ sarà negativo. All' opposto nel calcolo dell' Argomento XXI di longitudine si ha parimente la costante negativa, ma siccome con $M+\varphi' = 210^\circ\ 35'\ 1'',0$ si ha sen $(M+\varphi')$ negativo, così il prodotto o il valor di ϵ risulterà positivo.

10.° Il valor di β e di $\frac{1}{2}\beta$ deve sempre sommarsi con la quantità precedente qualunque ne sia il segno.

11.° Infine nella costruzione degli Argomenti per le piccole Equazioni, i numeri romani richiamano gli Argomenti corrispondenti di longitudine; il che segue ancora nel calcolo della Parallasse.

TAVOLA per le *Lunazioni* (pag. 35 e 36.) Per render più complete che fosse possibile le presenti Tavole Lunari, ne abbiamo voluta aggiungere una per lo stabilimento delle Lunazioni sì medie che vere. Si sa quanto inesattamente corrispondano a questa ricerca anche le più accreditate Tavole Anomalistiche. Qualunque possa esser l' accuratezza delle nostre in un' assunto, in cui per verità è inutile, (perchè senza oggetto) qualunque scrupolo troppo inoltrato, egli è certo che esse risponderanno con assai più di precisione di quel che faccia il metodo di De-Lambre nell' introduzione alle Tavole della Luna, e raramente si scosteranno di troppo dai risultati delle più corrette Efemeridi quando si suppongano in questa parte ben calcolate. Possiamo distinguer questa nostra Tavola in due parti, una dell' *Epoche* per gli anni, che con gli opportuni *aumenti per i mesi* dà luogo allo stabilimento delle Lunazioni medie, e degli Argomenti per concluder le vere; l' altra dell' Equazioni che in numero di 7, compresa quella che per comodo nominiamo equazione del tempo, perchè ne dipende, cangiano le medie in vere. Nell' Epoche la prima colonna intitolata Lunaz., cioè *Lunazioni*, indica il giorno, l'ora e il minuto in cui avrà luogo la prima fase o lunazione media dell' anno. La seconda segnata F mostra la qualità di essa prima fase, con questo metodo che il o mostra il novilunio, l' 1, 2, 3 mostrano il primo quarto, il plenilunio e l'ultimo quarto. Così per esempio nel 1813 la prima lunazione media avverrà il 1. dell' anno a $20^{or}\ 27',8$ e sarà un novilunio, ciò esprimendosi dal o che si trova nella colonna F in linea al 1813. Le colonne B, C, G appartengono agli Argomenti. Gli aumenti per i mesi servono per stabilimento di qualunque altra lunazione di un dato mese nel corso dell' anno. Per usarne, fissata la lunazione da stabilirsi (e per conseguenza quello fra i numeri o, 1, 2, 3 che come abbiamo detto le corrisponde) si cerchi tra gli aumenti, e precisamente nel quadro del mese dato, quella linea o verso in cui la fase F sia tale che sommata con quella dell' anno, e detratte quando si possa 4 unità dalla somma, si abbia per resto il numero corrispondente alla lunazione assegna-

ta. Così nel primo dei due esempj che abbiamo posti al piè della pag. 36, essendo la fase richiesta il Novilunio di Settembre, il numero che la rappresenta è lo zero: onde avendosi 1 per la fase dell'anno, si è scelto negli aumenti per i mesi (al Settembre) il verso con la fase 3, la cui somma con 1 fa appunto 4; e tolto 4, secondo la regola, rimane zero. E nel secondo esempio la fase dell' anno essendo 3, la richiesta 1, la scelta dev' esser 2, che sommata con 3 e tolto 4 rende appunto 1. Determinata in tal guisa la scelta per gli aumenti, la lunazione media cercata si avrà disponendo tutto ed operando come nei due esempj addotti. Per passare alla vera si dovranno prima preparare gli Argomenti delle sei prime Equazioni in conformità degli esempj medesimi, e per dedurre l' Equazioni si praticheranno precisamente gli stessi metodi che abbiamo esposti indietro. All'Equazione detta *del Tempo* si darà per Argomento il mese e giorno in cui cade la lunazione media, e la solita riduzione dal Meridiano delle Tavole a quello per cui si calcola, si adatterà con segno contrario.

Si notino frattanto quattro interessanti precetti. 1°. Che negli anni bisestili si deve togliere un giorno o dagli aumenti per i mesi o dall' ultimo resultato, eccettuate le lunazioni che cadono in Gennajo e Febbrajo. 2°. Che tutte le Equazioni a riserva della seconda, sono applicabili egualmente e per le sizigie e per le quadrature. Nella seconda vi sono due parti distinte per ognuna di queste specie di fasi. 3°. Che se sommando la lunazione dell' anno con l' aumento per il mese assegnato, si abbia un numero maggiore dei giorni che competono a questo mese, la lunazione apparterrà propriamente al mese dopo: e per averla nel mese dato converrà operare come se dovesse cercarsi per il precedente. 4°. Che l' Epoche per un anno qualunque si hanno sommando quelle del precedente con l'ultimo degli aumenti per Dicembre, e defalcando dalla lunazione 32 giorni nel primo anno dopo il bisestile, e 31 nei rimanenti. Se poi i giorni della lunazione così ottenuta non superano i 31, si aggiungerà ancora il primo aumento per Gennajo e si defalcherà in seguito come sopra. Con questo sistema potrà estendersi ad arbitrio il limite della Tavola.

L' Argomento G guida ancora a distinguere se le sizigie saranno o no con ecclissi. Eccone brevemente le regole

1ª. Nei nov., se l'Arg. G è $\begin{cases} \leq 76 \\ > 106 \end{cases}$ l' Ecclisse del Sole è $\begin{cases} \text{sicura} \\ \text{impossibile} \end{cases}$

2ª. Nei plen., se l'Arg. G è $\begin{cases} \leq 50 \\ > 70 \end{cases}$ l'Ecclisse della Luna è $\begin{cases} \text{sicura} \\ \text{impossibile} \end{cases}$

Fra 76 e 106, e fra 50 e 70 vi è del dubbio, e bisogna un calcolo più esatto. Può osservarsi che nel primo esempio della pag. 36, il Novilunio è eclittico, perchè si ha $G = 51$.

TAVOLE DEI PIANETI

Queste Tavole disposte per ogni Pianeta in due pagine, l' una destinata al calcolo dei Luoghi medj e degli Argomenti, l'altra a quello delle corrispondenti equazioni, sistemate con metodo uniforme, e analogo, per quanto è stato possibile, a quello delle Tavole del ☉ e della ☽, non han bisogno di una diffusa Spiegazione, dopo avere illustrate le precedenti. Faremo perciò sul loro uso, quelle sole avvertenze che ci sembrano indispensabili.

L' oggetto di queste Tavole è di dare immediatamente i luoghi Eliocentrici dei Pianeti. Quanto ai Geocentrici, sono sì semplici e di tal facilità le formule per dedurli dagli Eliocentrici, che non abbiam creduto necessario di ridurle in Tavole, ed imbarazzar di più col loro numero questa compendiosa raccolta. Rapporto all' Epoche dei luoghi medj ed agli Argomenti per un anno qualunque, esse si concludono precisamente nel modo stesso che abbiamo esposto spiegando la Tavola II Solare, e ci riportiamo perciò a quanto si è detto e verificato in quel luogo. Riguardo poi a moti medj, mensuali, diurni ed orarj, si dedurranno facilmente per ciascun Pianeta dalle respettive Tavole II e III, purchè con la Tav. *Generale* VI si riducano i giorni del mese in giorni dell' anno diminuendoli di una unità se l' anno è bisestile; e per il numero delle ore, minuti e secondi contenuti nell' Epoca per cui si calcola, si moltiplichino le quantità che la Tav. III dà per 1ʺ, 1ʹ, 1ʺ. Si eccettuino da questa regola Giove e Saturno, per cui le Tavole in vece dei moti diurni ed orarj danno il logaritmo della lor somma: onde per aver questi moti (permutati come sopra i giorni del mese in giorni dell' anno, e cangiate le ore minuti e secondi in decimali di giorno) dovrà cercarsi il logaritmo della quantità che ne risulta, e sommatolo con quelli della Tavola, i numeri corrispondenti a questa somma daranno i moti medj cercati in gradi e decimali di grado. Si vedano a questo proposito i due Tipi che riportiamo sul fondo a pag. 54. 55 per esempj di un calcolo Planetario.

Ma in Giove e Saturno ha luogo un particolare elemento che non si richiede negli altri Pianeti, e che deve applicarsi per correggerne tanto la Longitudine ed Anomalia media, quanto gli altri Argomenti. E' conosciuto col nome di *grande Equazione*, o *grande ineguaglità*, celebre in oggi per i sublimi e felici tentativi dei sommi Geometri in determinarne l' Espressione e il Periodo. Le Tavole danno quest' Elemento di 10. in 10. anni dal 1750 al 1900. Quella parte di esso che deve applicarsi in comune e secondo il suo segno alla Longitudine e Anomalia media, ha di fianco in una stessa colonna le sue prime e seconde differenze: le prime danno luogo allo stabilimento delle opportune proporzionali, le seconde correggono le proporzionali date dalle prime per mezzo della Tavoletta susseguente, in cui l' argomento di fronte richiama il numero degli anni dei quali l' Epoca data ecceda una qualunque delle decadi della Tavo-

la, e quello di fianco corrisponde al valore della seconda differenza.

Le quantità di questa Tavola sono tutte additive, cioè debbono aggiungersi alla *grande ineguaglità* sia questa positiva come in Giove, o negativa come in Saturno. Così nel Tipo di Giove calcolato per il 1. Aprile 1806, si è presa la grande ineguaglità 20'3'',3 che appartiene al 1800; se ne è tolta la proporzionale 3'',6 corrispondentemente alla prima differenza negativa 5'',9 e dei 6 anni e ¼ scorsi dal 1800 al 1. Aprile 1806, e si è aggiunta la correzione 0'',6 per ciò che rende in 6 anni la seconda differenza 5'',4 a tenore della Tavola. Con ciò è risultato per la grande ineguallità 20'0'',3. Nel resto per un numero qualunque *i* di Anni Giuliani scorsi dopo il 1800 si avrà la grande equazione colle seguenti espressioni generali, ove ♂, ♃ e ♄ indicano la Longitudine media di Marte, Giove e Saturno.

Per Giove

$$+(20'3'',36 - i.0'',03269 + i^2.0,0000356)\ \mathrm{sen}\ (5\text{♄} - 2\text{♃} + 3^\circ 25'36'' - i.77'',26 + i^2.0'',012276) - 13'',17\ \mathrm{sen}\ 2(5\text{♄} - 2\text{♃} + 3^\circ 25'36'' - i.77'',26 + i^2.0'',012276)$$

Per Saturno

$$-49'7',865 - i\,0'',8050 + i^2\,0,0000821\ \mathrm{sen}\ (5\text{♄} + 2\text{♃} + 3^\circ 27'51'' - i\,75'',877 + i^2\,0',011777) + 31'',025\ \mathrm{sen}\ (3\text{♂} - \text{♄} - 85^\circ 34'12'') + \ldots\ldots ;\ (30'',604 - i\,00172)\ \mathrm{sen}\ (5\text{♄} - 2\text{♃} + 3^\circ 27'51'' + i\,75'',877 + i^2\,0,011777).$$

Finalmente in queste stesse Tavole di Giove e Saturno si osserva un ultima particolarità Come gli Argomenti che regolano l'equazioni di perturbazione per questi due Pianeti sono in assai gran numero, ed in alcuni (come nel II e III di Giove ec.) convien tener conto ancora della prima decimale, così il sesto della pagina si è trovato troppo ristretto per poterli contener tutti in disteso; onde dopo esserci limitati a dar soltanto di alcuni il valore immediato, non abbiam assegnato, rapporto ai rimanenti, che il metodo di dedurli facilmente dai primi. Così il IV di Giove si ha unendo 210,5 alla somma del II e III, il V unendo 400,5 alla somma del III e del IV. Si avverta, che queste operazioni debbon farsi dopochè gli Argomenti che dà la Tavola, saranno stati pienamente calcolati per l'Epoca data; e corretti dell'effetto della grande ineguglità. Vedansi per sicura regola i due Tipi di cui abbiamo più volte parlato.

Quanto all' equazioni di perturbazione che come abbiam detto, occupano la seconda delle due Pagine destinate a ciascun Pianeta, avvertiremo di nuovo che come quelle del ⊙ e della ☽ così ancor queste son tutte valutate in secondi d'arco, e ad eccezione della I, cioè di quella dell' Orbita, e di alcune di quelle di Saturno, tutte le altre son sempre positive. E qui ripeteremo anche una volta il troppo necessario precetto, che debbon sempre supporsi positive tutte quelle equazioni o quantità d'altro genere, che non troveremo affette da verun segno, e dovranno valutarsi in secondi quando mancheranno di indicazione.

L' Equazion I è negativa nei primi sei segni dell' Anomalia, positiva nei seguenti; segue perciò il segno dell' angolo φ, come abbiamo quasi sempre avvertito sul luogo. Si calcola precisamente secondo la formula che per ogni Pianeta abbiamo ripetuta, e come insegnammo per l' Equazione dell' orbita Solare. Si avverta

che in Giove e Saturno l'espressione *Anomalìa corretta* significa l'*Anomalìa media* corretta della grande inegualità. Le variazioni secolari si sono aggiunte, secondo l'opportunità, o immediatamente di fianco alla Tavola dell'angolo φ, come in ♂ ed ♅, o per via di un equazione Logaritmica molto facile a calcolarsi. Si è trascurata in ♀, perchè si è creduta insensibile: frattanto queste variazioni essendo secolari si riducono per un anno dato, moltiplicandole per la differenza fra esso e il 1800, e dividendo il prodotto per 100 Se la variazione è addittiva, si unisce sempre all' Eq. I qualunque ne sia il segno, si toglie se è sottrattiva. Del resto si converrà che l'ingegnosa introduzione dell'angolo ausiliare φ per l' Eq. I oltre il vantaggio di presentare in uno spazio strettissimo quanto occorre per calcolar facilissimamente questa interessante equazione, offre ancor quello di un risultato e più sicuro e più pronto, poichè dispensa affatto dall'aver riguardo alle seconde differenze nello stabilimento delle proporzionali.

L' Equazioni II, III, IV e V di Giove hanno la particolarità di esser divise come in tanti piccoli quadri, distinti in 5 colonne, ognuna delle quali appartiene all'Equazione richiamata sulla sommità della Tavola. Le centinaja che si trovano in fronte a ciascun quadro e le diecine della colonna N marginale, appartengono in comune all' Argomento di ciascuna equazione: onde se suppongasi per esempio che si abbia 560 per Argomento V di Giove (pag. 44.), dovremo cercare il quadro con 500 in fronte, e scendendo lungo la V. colonna fino all' incontro del verso che nella colonna marginale N ha il 60, troveremo 266,7 per la corrispondente equazione.

L' istessa avvertenza ha luogo per la II e III equazione di Saturno; ove per altro ciascun quadro è intitolato con doppio numero, e perciò appartiene insieme a un doppio argomento; e l'uno dei numeri essendo seguitato dal segno +, l'altro dal —, spiega che l'equazione corrispondente all' uno deve esser positiva, e quella che corrisponde all' altro negativa.

Queste due equazioni sono soggette ad una variazione secolare che vien regolata dal loro stesso Argomento, e a cui abbiamo dato luogo immediatamente presso di esse. L' uso del doppio segno di fronte si è già spiegato trattando dell' Equazioni Lunari.

L'equazinni che in ♄ posson derivar negative, han la stessa disposizione, e debbon perciò trattarsi col metodo di quell' Equazioni Lunari che abbiam vedute trovarsi nel caso stesso. Bisogna ricordarsi che i numeri dell' Argomento a sinistra di chi legge richiamano i segni superiori, e quelli a destra gli inferiori. Si osservi poi che per ogni equazione che risulterà negativa deve sempre aggiungersi una delle particolari *costanti* che si veggono espressamente riportate in due opportuni luoghi della Tavola, e di cui ciascuna richiama in fianco l'equazione relativa. Queste costanti o dovranno immediatamente sommarsi con l'Equazioni negative corrispondenti, (che allora si renderebbero positive) o potranno aggiungersi alla somma ridotta delle positive e negative come abbiamo per più facilità praticato nel Tipo da riscontrarsi

su questo proposito, per maggiore intelligenza di queste regole.

Tutte la altre equazioni, disposte come le Solari e Lunari, non presentan difficoltà. La somma di tutte insieme si unisce alla longitudine media, e tolta la costante indicata a parte per ogni Pianeta, si ottiene la longitudine Eliocentrica vera sull' Orbita. Ma poichè è necessario, come vedremo, per il confronto del calcolo colle osservazioni, di ridur questa longitudine sull' Eclittica, abbiamo perciò aggiunte delle formule che assai facilmente determinano la quantità opportuna per tale riduzione. Due cose sono frattanto da osservarsi rapporto a queste formule; 1ª. che per *Argomento di latitudine* (espressione che si trova in alcuna di esse) si intenda la longitudine vera del Pianeta diminuita di quella del Nodo, cioè diminuita dell' Arg. ☊ ridotto in gradi; 2ª che il resultato si sottragga dalla longitudine sull' orbita nei segni I°, II°, III°, VI°, VII°, VIII° dell' Argomento o differenza suddetta; e si aggiunga negli altri sei.

Dopo l' Equazioni di longitudine si trova per ciascun Pianeta in fondo alla seconda pagina l' espressione della latitudine, con la sua variazione secolare, che dee trattarsi nel sistema delle altre variazioni di questo genere, di cui abbiamo parlato. Per ♃ e per ♄ son dati ancora gli effetti delle perturbazioni sulla latitudine (insensibili negli altri Pianeti) ridotti in quattro equazioni i cui argomenti o sono gli stessi che quelli per la longitudine, come in ♄, o facilmente ne derivano come in ♃, ove il sistema è precisamente quello tenuto nelle piccole Equazioni Lunari, e s' intende senza difficoltà.

La latitudine è generalmente Boreale quando il resultato della formula è positivo, Australe quando è negativo; l' Equazioni son sempre positive, e sempre negativa la costante.

Alle Tavole delle Longitudini e Latitudini ne segue una assai vasta, che dà le distanze medie dei Pianeti dal Sole o i loro raggi vettori ellittici, in parti della distanza media della Terra, che si suppone = 1. Le diminuzioni o variazioni secolari di queste distanze son tutte raccolte nella Tavola seguente, esclusa quella di ☿ che si è creduta insensibile o di piccolissimo momento. Debbono applicarsi secondo i loro segni dopo il 1800, contrariamente avanti; e trattarsi nel resto come le altre variazioni secolari.

Una terza Tavola dà variamente distribuite l' equazioni di *Perturbazione* per queste distanze, escluse al solito quelle per Mercurio. L' Equazioni per ♀, la ♁ e ♂ son classate separatamente, e ciascuna è regolata dagli Argomenti di longitudine del medesimo nome. Ma per ♃, ♄ ed ♅ si trovano promiscuate, e di più in ♃ e ♄ gli Argomenti hanno bisogno di qualche piccola costruzione, come può vedersi nei due Tipi. In fine quest' Equazioni, escluse quelle per la ♁, sono tutte frazioni decimali naturali, e debbon sempre applicarsi in modo che l' ultima loro cifra cada sotto l' ultima del raggio vettore.

Quelle poi della Terra sono cifre finali di quantità logaritmiche, ed è perciò necessario applicarle non al raggio vettore, ma bensì al suo logaritmo che dovrà essere espresso con 7 decimali.

L' esatta determinazione del raggio vettore è di assoluta necessità, volendosi cangiare in Geocentrica la posizione Eliocentr. del Pianeta.

S'immagini a tal' effetto un triangolo rettilineo (*Fis. Mat.* 753) coi vertici al Sole S, alla Terra T ed al luogo Γ del Pianeta sull' eclittica. In questo triangolo si conoscerà l'angolo al Sole o di *commutazione*, differenza tra la longitudine della ♃ ($= \odot + 6^s$) e la longitudine del Pianeta ridotta all' Eclittica. Si conosceranno inoltre i due lati ST, SΓ che comprendon quest' angolo cioè il raggio vettore della Terra e la *distanza accorciata del Pianeta dal Sole*. Sarà dunque facile trovar l'angolo T d' *Elongazione* o di differenza tra la longitudine del Pianeta e quella del Sole: e poichè questa può sempre aversi, sarà perciò nota anche l'altra.

Si chiami ora R il raggio vettore della Terra, r e ρ quelli del Pianeta nell' orbita e nell' Eclittica, Λ la longitudine della Terra, eguale a quella del Sole più 6^s., λ' ed L' la longitudine *sull' Eclittica* e la latitudine del Pianeta. Avremo 1ª. $S = \Lambda \backsim \lambda'$; 2ª. $180 - S = T + \Gamma$. 3ª $\rho = r \cos L'$, e fatta $tang\, \beta = \frac{\rho}{R}$, 4ª. $tang \frac{1}{2} (T - \Gamma) = tang \frac{1}{2} (T + \Gamma)\, tang (\beta - 45^\circ)$. Nota così la semisomma e la semidifferenza dei due angoli, quello alla Terra sarà sempre determinato, e dovrà aggiungersi alla longitudine del Sole se questa sia minore di quella del Pianeta; sottrarsene se ne sia maggiore.

Nel Tipo di Giove abbiamo $\lambda' = 3^s\, 26^\circ 27' 57'',6$; $L' = 0^\circ 16' 21'',1$ B, $r = 5,25974$, e per quell' Epoca le nostre Tavole darebbero $\Lambda = 0^s 11^\circ 48' 36'',9$, $\log R = 0,0001576$. Dunque..... $S = 2^s 14^\circ 39' 20'',7$; $T + \Gamma = 3^s 15^\circ 20' 39'',3$; $\frac{1}{2}(T + \Gamma) = 1^s 22^\circ 40' 19'',6$

$$
\begin{aligned}
\log r &= 0,7209643 \\
l. \cos L' &= 9\,9999951 \\
\hline
\log \rho &= 0\,7209594 \\
\log R &= 0\,0001576 \\
\hline
l. tang\, \beta &= 0,7208018 = l.\, tang\ 79^\circ 13' 52'',7 \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad - 45 \\
\beta - 45^\circ &= 34^\circ 13' 52'',7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l. tang \tfrac{1}{2} (T + \Gamma) &= 10,1177229 \\
l. tang\, (\beta - 45^\circ) &= \ 9\,8327630 \\
\hline
l. tang \tfrac{1}{2} (T - \Gamma) &= 9\,9504859 = l. tang\ 1^s\, 11^\circ 44' 27'',2 \\
\tfrac{1}{2} (T + \Gamma) \ldots\ldots\ldots\ldots &= 1\ 22\ 40\ 19\ 6 \\
\hline
\text{Somma o angolo T} \ldots\ldots &= 3\ \ 4\ 24\ 46\ 8 \\
\text{Longitudine del Sole} \ldots\ldots &= 0^s\, 11^\circ 48' 36'',9 \\
\hline
\text{Longitudine geocentrica } \lambda \text{ di Giove} &= 9^s\ \ 7^\circ 23' 50'',1
\end{aligned}
$$

Può avvertirsi che questa longitudine non differisce che di $0'',6$ da quella che per il medesimo esempio trova *M. Bouvard* colle sue Tavole di Giove.

Quanto alla latitudine, la formula ordinaria che cangia l'eliocentrica L' in geocentrica L è (*Fis. Mat.* 754) $tang\, L = tang\, L' \times \frac{sen\, (\lambda \backsim \odot)}{sen\, (\lambda' \backsim \odot)} = tang\, L' \times \frac{sen\, T}{sen\, S}$. Nel nostro esempio si avrà $L = 0^\circ 16' 54'',3$. *M. Bouvard* trova $0^\circ 16' 54'',1$.

La parallasse e il semidiametro sono altresì due elementi importanti nella Teoria dei Pianeti, e la Tavola del Sig. *Baron di Zach* che riportiamo in intero li somministra con sufficiente precisione. Ma quando interessi l'averli con l'estremo rigore dovran dedursi immediatamente dalle due seguenti formule

$$\text{Parall. oriz.} = \frac{8'',7\ sen\, L}{\rho\ sen\, L'}\ ; \quad \text{Semid. app}^{e}. = \text{par. oriz} \times D.$$

ove L, ρ ed L' han lo stesso significato che sopra, e D è una costante che per altro varia ad ogni Pianeta, e il cui logaritmo è

per Mercurio = 9,5383252 ⁏ per Giove = 1,0244804
Venere = 9 9635707 ⁏ Saturno = 0 9323740
Marte = 9 7136932 ⁏ Urano = 0 6341099

Dal Sig. Baron di *Zach* abbiamo anche la Tavola dell' aberrazion dei Pianeti in longitudine e in latitudine. Ecco l' esempio del Calcolo che Egli stesso ne istituisce per Mercurio

Si faccia l'Elongazione del Pianeta = T; e si supponga T = 0ˢ26°,8
la longitud. Geocentrica = G . . . . G = 6 8 8
la longit. dell' Apogeo ⊙ = A . . . . A = 3 9 2
la lon. dell'Afelio del Pian. = φ . . . . φ = 8 14 1
la parall annua del Pianeta = P . . . . P = 2 20 6
l' Argomento di latitudine = l . . . . l = 7 14 0
la latitudine Geocentrica = L . . . . L = 0 2 3 A

Dalla Tav. I con l' Argomento T si avrà . . . . — 18″,08
Dalla Tav. II con l'Argom. G — A = 2ˢ29°,6 si avrà + 0 00

Parte comune a tutti i Pianeti . . . . — 18″,08

Dalla Tavola I con l' Arg. P si ha — 3″,31
log — 3″.31 = 0.5198280
log Cost. A = 0 2090472
0,7288750 = *log* — 5″,36 Par. I

Dalla I con l'Arg. (G — φ) = 9ˢ24°,7 si ha — 8″,46
log — 8″,46 = 0,9273704
log Cost. — B = 9,5227716
0,4501420 = *log* + 2″,82 Par. II

Dalla I con l'Arg. (2l + P) = 5ˢ18°,6 si ha + 19″,85
Dalla stessa con l' Arg (2l — P + VIˢ) = 6ˢ7°,4 . . . . + 20 08
+ 39″,93
log + 39″,93 = 1,6012993
log Cost. C = 7 7726491
9,3739484 = *log* + 0″,24 Par. III

Somma di tutte le Parti . . . . — 20″,38
log — 20″,38 = 1.3092042
l cos L. . . . = 9 9996500

log dell' Aberr. tot. in longitud. 1,3088542 = *log* — 20″,40.

La terza Parte non ha luogo che per Mercurio; ed in fatti la Tavola non dà per gli altri Pianeti la costante C.

Per l' aberrazione in latitudine

Dalla Tav. I con l' Arg. T + IIIˢ = 3ˢ26°,8 si ha — 9″,14
log — 9″,14 = 0,9609462
log sen L . . = 8 6034886
9,5644348 = l — 0″,37. Part. Com.

Dalla Tav. I con l'Arg. P + IIIˢ = 5ˢ20°,6 si ha + 19″,99
log + 19,99 = 1,3008128
l cost. A . . = 0 2090472
log sen L . . = 8 6034886
9,1133486 = *log* + 1″,30. Par. I

Somma della Parte I^a e della Parte Comune . . + 0″,93

Dalla T^a. I con l'Arg. G − φ − 111′ = 0^{s}24°,7 si ha − 18″,40

log − 18″,40 = 1,2648178
log Cost. B . . = 9 5227716
log sen L . . . = 8 6034886
9,3910780 = log − 0″,25. Par. II

Dalla Tav. I con l'Arg L = 7^s.14°,0 si ha + 14″,57

l 14,57 . . . = 1,1634596
log Cost. D = 9 2981910
0,4616506 = log + 2″,90. Par. III

Dalla Tav. III Termine Costante per Mercurio = . . − 0 71

Somma di tutte le Parti . . . . + 2″,87
log 2″,87 . . = 0,4578819
l cos L . . . . = 9 9996500

log dell'Aberraz. in latitudine = 0,4575319 = log + 2″,87 Boreale.

Le Tavole dei Pianeti terminano con un Prospetto generale di tutti i loro principali Elementi, raccolti, corretti, e a noi gentilmente trasmessi dal Chiariss. Sig. Carlini Astronomo di Milano. Solo abbiamo ritenuto $\frac{1}{310}$ per la compressione della ♁, in vece di $\frac{1}{305}$, per esser la prima stata adottata nella nostra Fisica, che era già impressa allorchè ci pervenne il detto Prospetto.

Gli Elementi Ellittici sono presi: per Mercurio da *La-Lande* (*Conn. des tems*. an VI.); per ♀ da *Lindenau* (*Monat. corr.* 1810 Marzo). Per la ♁ da *De-Lambre* (*nuove Tavole*); per ♂ dalle Efemer. di Vienna 1802; per ⚳, ⚴, ⚵ dai XIII, VIII e IV, Elementi di *Gauss*. Per ⚶ dall'Efem. di Milano 1808; per ♃ e ♄ dalla Prefazione alle nuove Tavole di *Bouvard*, per ♅ dalle Tav. di *De-Lambre*, correggendo l'inclinazione secondo le ultime determinazioni dello stesso Autore.

I Diametri sono presi: per ☿ da *Wurm* (*Efemeridi di Berlino* 1802), medio fra un gran numero di misure; per ♀ da *Schroeter* nel 1790; per la ♁ dalla parallasse Equatoriale 8″,7, media fra quelle che danno i passaggi di Venere e quella data dall'Equazion parallattica della ☾; per ♂ secondo *Herschel*, Trans. fil 1804, per ♃ secondo *Wurm* (II supplemento all'Efem. di Berlino) medio fra varie osservazioni micrometriche, ed occultazioni; per ♄ secondo *Zach*; per ♅ secondo Herschel.

Le masse son calcolate: per ☿, supponendone la densità = dens. di ♃ $\frac{dist.\ med.\ ♃\ al\ ☉}{dist.\ med.\ ☿\ al\ ☉}$, per ♀ posta la parallasse Equatoriale = 8″,7 lo schiacciamento = $\frac{1}{310}$ e la lunghezza del Pendolo a Parigi = metri 0,993827; le altre secondo *La-Place* Mecc. cel. T. IV.

Si trova infine la Tavola delle *Refrazioni Astronomiche*. Tra le molte adottiamo quella del prelodato Sig. *Carlini* come più esatta. La piccola varietà indottavi è per la più opportuna disposizione. Il titolo delle sue 4 parti ne manifesta abbastanza l'uso, e non esige altra spiegazione.

TAVOLE
ASTRONOMICHE

TAVOLE GENERALI

TAVOLA I. *Longitudine e Latitudine degli Osservatorj e Luoghi più rimarchevoli della Terra.*

Nomi dei Luoghi	Latitudine				Longitudine da Parigi in tempo		
Alessandria, *Faro*	31°	13′	5″	B	— 1^or	50′	22″
Amsterdam, *Felice Meritis*	52	22	17		— 0	10	11
Barcellona	41	23	8		+ 0	0	33
Basilea	47	33	34		— 0	21	1
Berlino, *Osservatorio Reale*	52	31	45		— 0	44	5
Blenheim, *Duca di Marlborough*	51	50	29		+ 0	14	44
Bologna, *Università*	44	29	56		— 0	36	2
Brema, *D. Olbers*	53	4	46		— 0	25	51
Brest, *Prefettura*	48	23	14		+ 0	27	16
Breslavia, *Università*	51	6	30		— 0	58	50
Brunsvvic, *D. Gauss*	52	15	29		— 0	32	47
Bruxelles	50	50	59		— 0	8	8
Buda, *Osservatorio Reale*	47	29	44		— 1	6	49
Cadice, *Osservatorio della Marina*	36	32	1		+ 0	34	31
. . . . *Osservatorio su l' Isola del Leone*	36	27	45		+ 0	34	9
Cairo, *Istituto*	30	2	21		— 1	55	54
Cambridge	52	12	36		+ 0	9	3
Canton	23	8	9		— 7	22	50
Capo di Buona Speranza	33	55	15	A	— 1	44	15
Carcassona	43	12	45	B	— 0	0	3
Coimbra, *Osservatorio Reale*	40	12	30		+ 0	42	58
Costantinopoli, *S. Sofia*	41	1	27		— 1	46	20
Copenhagen, *Osservatorio Reale*	55	41	4		— 0	40	57
Cracovia, *Università*	50	3	52		— 1	10	23
Cremsmunster, *Abbazzia*	48	3	29		— 0	47	11
Cristiania	59	55	20		— 0	33	54
Danzica, *Osservatorio del D. Wolff*	54	20	48		— 1	5	11
Dorpat, *Università*	58	22	48		— 1	37	34
Dresda, *Salone Matematico*	51	3	9		— 0	45	29
Dublino, *Osservatorio Reale*	53	21	11		+ 0	34	46
Dunkerque	51	2	10		— 0	0	10
Edimburgo	55	57	57		+ 0	22	2
Eisemberg, *Bar. di Zach*	50	57	58		— 0	38	29
Firenze, *Osservatorio*, Scuole Pie	43	46	41		— 0	35	42
. . . . . *Cupola della Metropolitana*	43	46	36		— 0	35	42,5
. . . . . *Museo*	43	46	4		— 0	35	40,2
Genova, *Università*	44	24	59		— 0	26	31
Ginevra	46	12	0		— 0	15	14
Goa	15	31	0		— 4	45	40
Gotha, *Friedenstein*	50	57	4		— 0	33	28
. . . . *Seeberg*	50	56	7		— 0	33	35
Gottinga, *Università*	51	31	54		— 0	30	21
Greenvvich, *Osservatorio Reale*	51	28	39		+ 0	9	21
Hyeres, *Portalet*	43	7	2		— 0	15	10
Ispahan	32	24	34		— 3	18	0
Kevv, *Osservatorio*	51	28	37		+ 0	10	24
Leida, *Università*	52	9	30		— 0	8	34
Lilienthal, *D. Schroeder*	53	8	25		— 0	26	14
Lipsia, *Università*	51	20	44		— 0	39	59
Lisbona, *Osservatorio al Collegio dei Nobili*	38	42	50		+ 0	45	55
Livorno	43	33	2		— 0	31	46
Lione	45	45	52		— 0	9	57
Londra, *S. Paolo*	51	30	49		+ 0	9	43
. . . . *Argyle Street*	51	30	53		+ 0	9	53
. . . . . *Dover Street*	51	30	45		+ 0	9	54
Madrid, *Osservatorio Reale*	40	25	18		+ 0	24	8

Segue la TAVOLA I.

Nomi dei Luoghi	Latitudine	Longitudine da Parigi in tempo
Madrid, *Piazza Maggiore*	40° 24′ 58″ B	+ 0ʰ 24′ 8″
Malta, *Città*	35 53 41	− 0 48 42
Manheim, *Osservatorio del G. Duca di Bade*	49 29 18	− 0 24 32
Marsilia, *Osservatorio Imperiale*	43 17 50	− 0 12 8
Messico	19 25 50	+ 6 45 28
Milano, *Osservatorio Reale di Brera*	45 28 2	− 0 27 24
Mirepoix, *Osservatorio Imperiale*	43 5 19	+ 0 1 51
Mittau, *Osservatorio Imperiale*	56 39 6	− 1 25 33
Montauban, *Osservatorio*	44 0 50	+ 0 3 57
Montpellier, *Osservatorio dell' Accademia*	43 36 29	− 0 6 10
Mosca, *Osservatorio Imperiale*	55 45 45	− 2 20 51
Monaco, *S. Maria*	48 8 20	− 0 36 59
Napoli, *Osservatorio Reale*	40 50 15	− 0 47 44
Norimberga	49 26 55	− 0 34 56
Orleans	47 54 10	+ 0 1 42
Oxford, *Osservatorio di Ratclif*	51 45 40	+ 0 14 21
Padova, *Università*	45 24 2	− 0 38 10
Palermo, *Osservatorio Reale*	38 6 44	− 0 44 6
Parigi, *Osservatorio Imperiale*	48 50 13	0 0 0
. . . . *Collegio di Francia*	48 50 58	− 0 0 2
. . . . *Sig. Ab. Delambre*	48 51 38	− 0 0 5
. . . . *Sig. Lemonnier*	48 52 3	+ 0 0 2
Parma	44 48 1	− 0 32 0
Pavia	45 10 47	− 0 27 18
Pekin, *Osservatorio Imperiale*	39 54 13	− 7 36 30
Perpignano	42 41 53	− 0 2 14
Pietroburgo, *Osservatorio Imperiale*	59 56 23	− 1 51 52
Pisa, *Università*	43 43 11	− 0 32 15
Pondicherì	11 55 41	− 5 10 6
Praga, *Osservatorio Reale*	50 5 19	− 0 48 20
Quito	0 13 17 A	+ 5 21 0
Ratisbona, *S. Emmeran*	49 0 58 B	− 0 38 53
Roma, *S. Pietro*	41 53 54	− 0 40 30
. . . . *Collegio Romano*	41 53 56	− 0 40 36
. . . . *Osservatorio del Principe Gaetani*	41 53 54	− 0 40 35
Siam	14 20 40	− 6 34 0
Siena	43 22 0	− 0 35 20
Slough, *D. Herschel*	51 30 20	+ 0 11 45
Smirne	38 28 7	− 1 39 6
Stockholm, *Osservatorio Reale*	59 20 31	− 1 2 52
Strasburgo	48 34 56	− 0 21 38
Tolone	43 7 16	− 0 14 22
Tolosa, *Sig. Vidal*	43 35 46	+ 0 3 35
Turino, *Osservatorio Imperiale*	45 3 59,8	− 0 21 21,2
Upsal	59 51 50	− 1 1 15
Utrect, *Università*	52 5 12	− 0 11 6
Varsavia	52 14 28	− 1 14 49
Venezia, *S. Marco*	45 25 54	− 0 40 3
Verona, *Sig. Cagnoli*	45 26 6	− 0 34 40
Versailles	48 48 21	+ 0 0 52
Vienna, *Università*	48 12 40	− 0 56 10
. . . . *Osservatorio di Marinoni*	48 12 48	− 0 56 7
Vilna, *Università*	54 41 2	− 1 31 49
Viviers, *Sig. Flaugergues*	44 29 19	− 0 9 24
Volterra, *S. Giusto*	43 26 32	− 0 33 58
Yorck	53 57 45	+ 0 13 45

TAVOLA II.

Angoli della Verticale, misura dei Gradi di Latitudine e Longitudine (in Tese Francesi), e Logaritmi dei Raggi Terrestri per ogni Grado di Latitudine apparente della Terra, nell' ipotesi Ellittica, supposti i Raggi Equatoriale e Polare tra loro : : 310 : 309

Latitudine	Ang. della Verticale	Log. del Raggio Terrestre	Gradi di Latitud.	Gradi di Longitud.	Latitudine	Ang. della Verticale	Log. del Raggio Terrestre	Gradi di Latitud.	Gradi di Longitud.
0°	0'. 0'',00	0,0000000	56729',18	57099',47	45°	11'. 6'',44	9,9993032	57006',80	40440',61
1	0 23 18	9,9999996	29 35	57091 33	46	11 5 96	2788	16 49	39730 90
2	0 46 34	9983	29 86	57066 93	47	11 4 97	2544	26 17	39009 35
3	1 9 44	9962	30 71	57021 65	48	11 3 01	2300	35 82	38275 14
4	1 32 45	9933	31 88	56959 96	49	11 0 25	2057	45 44	37529 53
5	1 55 36	9895	33 40	56883 59	50	10 56 69	1815	55 01	36772 40
6	2 18 12	9848	35 25	56788 65	51	10 52 32	1575	64 52	36004 02
7	2 40 72	9794	37 43	56676 58	52	10 47 16	1338	73 96	35224 43
8	3 3 12	9732	39 93	56547 33	53	10 41 19	1099	83 32	34434 12
9	3 25 31	9660	42 77	56400 94	54	10 34 45	0865	92 59	33633 20
10	3 47 34	9582	45 93	56237 50	55	10 26 94	0633	57101 75	32821 92
11	4 8 90	9495	49 40	56057 00	56	10 18 66	0404	10 80	32000 53
12	4 30 26	9401	53 18	55853 08	57	10 9 63	0178	19 71	31169 13
13	4 51 36	9298	57 28	55645 09	58	9 59 85	9,9989955	28 50	30327 93
14	5 11 99	9102	61 68	55413 83	59	9 49 32	9823	37 14	29478 27
15	5 32 29	8994	66 37	55165 79	60	9 38 09	9599	45 61	28618 80
16	5 52 19	8879	71 37	54900 85	61	9 26 14	9379	53 91	27687 00
17	6 11 67	8756	76 64	54619 53	62	9 13 50	9163	62 04	26874 14
18	6 30 70	8627	82 20	54321 53	63	9 0 18	8952	69 98	25989 15
19	6 49 25	8492	88 03	54007 06	64	8 46 20	8745	77 72	25096 16
20	7 7 32	8349	94 13	53676 20	65	8 31 58	8544	85 25	24195 37
21	7 24 87	8191	56800 49	53329 12	66	8 16 33	8348	92 56	23287 12
22	7 41 89	7993	07 10	52965 66	67	8 0 47	8210	99 65	22371 56
23	7 58 32	7938	13 95	52586 50	68	7 44 04	7919	57206 50	21449 20
24	8 14 15	7728	21 04	52190 80	69	7 27 01	7793	13 11	20520 31
25	8 29 46	7546	28 35	51769 42	70	7 9 44	7621	19 47	19584 95
26	8 44 12	7367	35 88	51352 46	71	6 51 34	7456	25 57	18643 52
27	8 58 13	7184	43 62	50909 82	72	6 32 74	7297	31 40	17696 33
28	9 11 50	6995	51 66	50451 66	73	6 13 67	7146	36 96	16743 66
29	9 24 31	6801	59 69	49978 17	74	5 54 13	7001	42 23	15785 80
30	9 36 23	6601	67 99	49489 44	75	5 34 15	6866	47 23	14823 20
31	9 47 54	6397	76 46	48985 69	76	5 13 77	6738	51 92	13856 01
32	9 58 15	6095	85 10	48466 97	77	4 52 10	6712	56 32	12884 04
33	10 8 03	5864	93 89	47933 47	78	4 31 86	6607	60 42	11908 40
34	10 17 16	5650	56902 80	47385 35	79	4 10 40	6511	64 20	10929 12
35	10 25 56	5423	11 85	46822 79	80	3 48 62	6422	67 67	9446 33
36	10 33 19	5193	21 01	46245 90	81	3 26 57	6342	70 83	8960 57
37	10 40 05	4959	30 28	45654 43	82	3 4 26	6270	73 67	7971 93
38	10 46 14	4724	39 64	45050 01	83	2 41 74	6206	76 17	6980 86
39	10 51 44	4487	49 08	44431 36	84	2 19 00	6150	78 35	5987 62
40	10 55 95	4247	58 59	43799 06	85	1 56 10	6103	80 20	4992 53
41	10 59 65	4005	68 16	43153 39	86	1 33 05	6065	81 72	3995 88
42	11 2 57	3764	77 78	42494 52	87	1 9 89	6034	82 89	2998 00
43	11 4 67	3520	87 40	41822 62	88	0 46 63	6013	83 74	1999 14
44	11 6 11	3276	97 11	41137 92	89	0 23 33	6000	84 25	999 89
45	11 6 44	3032	57006 80	40440 61	90	0 0 00	5996	84 41	000 00

TAV. III. *Gradi, Minuti e Secondi in parti millesime della Circonferenza*

G	P	M	P	S	P
1	2,7778	1	0,0463	1	0 0077
2	5 5556	2	0926	2	154
3	8 3333	3	1389	3	231
4	11 1111	4	1852	4	309
5	13 8889	5	2315	5	386
6	16 6667	6	2778	6	463
7	19 4444	7	3241	7	540
8	22 2222	8	3704	8	617
9	25 0000	9	4167	9	694
10	27 7778	10	4630	10	772
11	30 5555	11	5093	11	849
12	33 3333	12	5556	12	926
13	36 1111	13	6019	13	0 1003
14	38 8889	14	6481	14	080
15	41 6667	15	6944	15	157
16	44 4444	16	7407	16	235
17	47 2222	17	7870	17	312
18	50 0000	18	8333	18	389
19	52 7778	19	8796	19	466
20	55 5556	20	9259	20	543
30	83 3333	21	9722	21	620
40	111 1111	22	1,0185	22	698
50	138 8889	23	0648	23	775
60	166 6667	24	1111	24	852
70	194 4444	25	1574	25	929
80	222 2222	26	2037	26	0 2006
90	250 0000	27	2500	27	083
100	277 7778	28	2963	28	160
110	305 5556	29	3426	29	238
120	333 3333	30	3889	30	315
130	361 1111	31	4352	31	392
140	388 8889	32	4815	32	469
150	416 6667	33	5278	33	546
160	444 4444	34	5741	34	623
170	472 2222	35	6204	35	701
180	500 0000	36	6667	36	778
190	527 7777	37	7130	37	855
200	555 5555	38	7593	38	932
210	583 3333	39	8056	39	0 3009
220	611 1111	40	8518	40	086
230	638 8889	41	8981	41	164
240	666 6667	42	9444	42	241
250	694 4444	43	9907	43	318
260	722 2222	44	2,0370	44	395
270	750 0000	45	0833	45	472
280	777 7778	46	1296	46	549
290	805 5556	47	1759	47	627
300	833 3333	48	2222	48	704
310	861 1111	49	2685	49	781
320	888 8889	50	3148	50	858
330	916 6667	51	3611	51	935
340	944 4444	52	4074	52	0,4012
350	972 2222	53	4537	53	089
360	1000 0000	54	5000	54	167
		55	5463	55	244
		56	5926	56	321
		57	6389	57	398
		58	6852	58	475
		59	7315	59	552

TAVOLA IV. *Parti millesime della Circonferenza in Gradi, Minuti e Secondi*

P	G. M. S.	P	G. M. S.	P	S	P	M. S.
1	0 21 36	60	21 36 00	0,001	1,30	0,060	1 17,76
2	0 43 12	61	21 57 36	02	2 59	61	19 06
3	1 4 48	62	22 19 12	03	3 89	62	20 35
4	1 26 24	63	22 40 48	04	5 18	63	21 65
5	1 48 0	64	23 2 24	05	6 48	64	22 94
6	2 9 36	65	23 24 0	06	7 78	65	24 24
7	2 31 12	66	23 45 36	07	9 07	66	25 54
8	2 52 48	67	24 7 12	08	10 37	67	26 83
9	3 14 24	68	24 28 48	09	11 66	68	28 13
10	3 36 0	69	24 50 24	10	12 96	69	29 42
11	3 57 36	70	25 12 0	11	14 26	70	30 72
12	4 19 12	71	25 33 36	12	15 55	71	32 02
13	4 40 48	72	25 55 12	13	16 85	72	33 31
14	5 2 24	73	26 16 48	14	18 14	73	34 61
15	5 24 0	74	26 38 24	15	19 44	74	35 90
16	5 45 36	75	27 0 0	16	20 74	75	37 20
17	6 7 12	76	27 21 36	17	22 03	76	38 50
18	6 28 48	77	27 43 12	18	23 33	77	39 79
19	6 50 24	78	28 4 48	19	24 62	78	41 09
20	7 12 0	79	28 26 24	20	25 92	79	42 38
21	7 33 36	80	28 48 0	21	27 22	80	43 68
22	7 55 12	81	29 9 36	22	28 51	81	44 98
23	8 16 48	82	29 31 12	23	29 81	82	46 27
24	8 38 24	83	29 52 48	24	31 10	83	47 57
25	9 0 0	84	30 14 24	25	32 40	84	48 86
26	9 21 36	85	30 36 0	26	33 70	85	50 16
27	9 43 12	86	30 57 36	27	34 99	86	51 46
28	10 4 48	87	31 19 12	28	36 29	87	52 75
29	10 26 24	88	31 40 48	29	37 58	88	54 05
30	10 48 0	89	32 2 24	30	38 88	89	55 34
31	11 9 36	90	32 24 0	31	40 18	90	56 64
32	11 31 12	91	32 45 36	32	41 47	91	57 94
33	11 52 48	92	33 7 12	33	42 77	92	59 23
34	12 14 24	93	33 28 48	34	44 06	93	2 0 53
35	12 36 0	94	33 50 24	35	45 36	94	1 82
36	12 57 36	95	34 12 0	36	46 66	95	3 12
37	13 19 12	96	34 33 36	37	47 95	96	4 42
38	13 40 48	97	34 55 12	38	49 25	97	5 71
39	14 2 24	98	35 16 48	39	50 64	98	7 01
40	14 24 0	99	35 38 24	40	51 84	99	8 30
41	14 45 36	100	36 0 0	41	53 14	0,100	9 60
42	15 7 12	200	72 0 0	42	54 43	200	4 19 20
43	15 28 48	300	108 0 0	43	55 73	300	6 28 80
44	15 50 24	400	144 0 0	44	57 02	400	8 38 40
45	16 12 0	500	180 0 0	45	58 32	500	10 48 00
46	16 33 36	600	216 0 0	46	59 62	600	12 57 60
47	16 55 12	700	252 0 0	47	60 91	700	15 7 20
48	17 16 48	800	288 0 0	48	62 21	800	17 16 80
49	17 38 24	900	324 0 0	49	63 50	900	19 26 40
50	18 0 0			50	64 80	1,000	21 36 00
51	18 21 36			51	66 10		
52	18 43 12			52	67 39		
53	19 4 48			53	68 69		
54	19 26 24			54	69 98		
55	19 48 0			55	71 28		
56	20 9 36			56	72 58		
57	20 31 12			57	73 87		
58	20 52 48			58	75 17		
59	21 14 24			59	76 46		

TAVOLA V. *Giorni dei mesi in parti millesime d' Anno.*

Giorni	Gennajo	Febbrajo	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settemb.	Ottobre	Novemb.	Decem.
1	0,000	0,085	0,162	0,246	0,329	0,414	0,496	0,581	0,666	0,747	0,832	0,914
2	003	088	164	249	331	416	499	583	668	750	835	917
3	006	091	167	252	334	419	502	586	671	753	838	920
4	008	093	170	255	337	422	504	589	673	755	840	922
5	011	096	173	258	340	425	507	592	675	758	843	925
6	014	099	175	260	342	427	509	594	678	760	845	928
7	017	102	178	263	345	430	512	597	681	763	848	931
8	019	104	181	266	348	433	515	600	684	766	851	933
9	022	107	184	269	351	436	518	602	687	769	854	936
10	025	109	186	271	353	438	520	605	689	772	856	939
11	028	112	189	274	356	441	523	608	692	775	859	942
12	030	115	192	277	359	444	526	610	695	777	862	944
13	033	118	195	280	362	447	529	613	698	780	865	947
14	036	120	197	282	364	449	531	616	701	782	867	950
15	039	123	200	285	367	452	534	619	703	785	870	953
16	041	125	203	288	370	455	537	622	706	788	873	955
17	044	129	206	291	373	458	540	625	709	791	876	958
18	046	131	208	293	375	460	542	627	711	793	878	961
19	049	134	211	296	378	463	545	630	714	796	881	964
20	052	137	214	299	381	465	548	633	717	799	884	966
21	056	140	217	302	383	468	551	636	720	802	887	969
22	057	142	219	304	386	471	553	638	722	804	890	971
23	060	145	222	307	389	473	556	641	725	807	893	974
24	063	148	225	309	392	476	559	644	728	810	895	977
25	066	151	227	312	395	479	562	647	731	813	898	980
26	068	153	230	315	397	482	564	649	733	815	900	983
27	071	156	233	318	400	485	567	652	736	818	903	985
28	074	159	236	320	403	487	570	655	739	821	906	988
29	077	162	239	323	406	490	573	657	742	824	909	991
30	079		241	326	408	493	575	660	744	826	911	994
31	082		244		411		578	663		829		997

TAVOLA VI. *Corrispondenza fra i giorni dei mesi e quelli dell' Anno*

Giorni	Gennajo	Febbrajo	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settemb.	Ottobre	Novemb.	Decem.
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
29	29	60	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
31	31		90		151		212	243		304		365

Negli anni Bisestili si aumentino del valore di un giorno tutte le quantità di queste Tavole, eccettuate quelle di Gennajo, e Febbrajo.

TAVOLA VII

Minuti e Secondi in Decimali di Grado e d'Ora

′		″	
1′	0°,0166667	1″	0,0002778
2	0333333	2	5556
3	05	3	8333
4	0666667	4	0,0011111
5	0833333	5	13889
6	0 ,1	6	0,0016667
7	1166667	7	19444
8	1333333	8	22222
9	15	9	25
10	1666667	10	27778
11	0 ,1833333	11	0,0030556
12	2	12	33333
13	2166667	13	36111
14	2333333	14	38889
15	25	15	41667
16	0 ,2666667	16	0,0044444
17	2833333	17	47222
18	3	18	5
19	3166667	19	52778
20	3333333	20	55556
21	0 ,35	21	0,0058333
22	3666667	22	61111
23	3833333	23	63889
24	4	24	66667
25	4166667	25	69444
26	0 ,4333333	26	0,0072222
27	45	27	75
28	4666667	28	77778
29	4833333	29	80556
30	5	30	83333
31	0 ,5166667	31	0,0086111
32	5333333	32	88889
33	55	33	91667
34	5666667	34	94444
35	5833333	35	97222
36	0 ,6	36	0,01
37	6166667	37	102778
38	6333333	38	105556
39	65	39	108333
40	6666667	40	111111
41	0 ,6833333	41	0,0113889
42	7	42	116667
43	7166667	43	119444
44	7333333	44	122222
45	75	45	125
46	0 ,7666667	46	0,0127778
47	7833333	47	130556
48	8	48	133333
59	8166667	49	136111
50	8333333	50	138889
51	0 ,85	51	0,0141667
52	8666667	52	144444
53	8833333	53	147222
54	9	54	15
55	9166667	55	152778
56	0 ,9333333	56	0,0155556
57	95	57	158333
58	9666667	58	161111
59	9833333	59	163889

TAVOLA VIII

Ore, Minuti e Secondi in Decimali di Giorno

or		′		″	
1or	0,0416667	1′	0,0006944	1″	0,0000116
2	0833333	2	13889	2	232
3	125	3	20833	3	347
4	1666667	4	27778	4	463
5	2083333	5	34722	5	579
6	0,25	6	0,0041667	6	0,0000694
7	2916667	7	48611	7	810
8	3333333	8	55556	8	926
9	375	9	625	9	0,0001042
10	4166667	10	69444	10	1157
11	0,4583333	11	0,0076389	11	0,0001273
12	5	12	83333	12	1389
13	5416667	13	90278	13	1505
14	5833333	14	97222	14	1620
15	625	15	104167	15	1736
16	0,6666667	16	0,0111111	16	0,0001852
17	7083333	17	118056	17	1968
18	75	18	125	18	2083
19	7916667	19	131944	19	2199
20	8333333	20	138889	20	2315
21	0,875	21	0,0145833	21	0,0002431
22	9166667	22	152778	22	2546
23	9533333	23	159722	23	2662
24	1	24	166667	24	2778
		25	173611	25	2894
		26	0,0180556	26	0,0003009
		27	1875	27	3125
		28	194444	28	3241
		29	201389	29	3356
		30	208333	30	3472
		31	0,0215278	31	0,0003588
		32	22222	32	3701
		33	29167	33	3819
		34	36111	34	3935
		35	43056	35	4051
		36	0,025	36	0,0004167
		37	56944	37	4282
		38	63889	38	4398
		39	70833	39	4514
		40	77778	40	4630
		41	0,0284722	41	0,0004745
		42	91667	42	4861
		43	98611	43	4977
		44	0,0305556	44	5093
		45	125	45	5208
		46	0,0319444	46	0,0005324
		47	26389	47	5440
		48	33333	48	5556
		49	40278	49	5671
		50	47222	50	5787
		51	0,0354167	51	0,0005903
		52	61111	52	6019
		53	68056	53	6134
		54	70	54	6250
		55	81944	55	6366
		56	0,0388889	56	0,0006481
		57	95833	57	6597
		58	0,0402778	58	6713
		59	09722	59	6829

TAVOLA IX.
Tempo Sidereo in parti d' Equatore

Ore	Gradi
1	15
2	30
3	45
4	60
5	75
6	90
7	105
8	120
9	135
10	150
11	165
12	180
13	195
14	210
15	225
16	240
17	255
18	270
19	285
20	300
21	315
22	330
23	345
24	360

Frazioni di secondo

0,1	1'',5
2	3 0
3	4 5
4	6 0
5	7 5
6	9 0
7	10 5
8	12 0
9	13 5
0,01	0'',15
02	0 30
03	0 45
04	0 60
05	0 75
06	0 90
07	1 05
08	1 20
09	1 35

M S.	G M. M.S.
1	0. 15
2	0 30
3	0 45
4	1 0
5	1 15
6	1 30
7	1 45
8	2 0
9	2 15
10	2 30
11	2 45
12	3 0
13	3 15
14	3 30
15	3 45
16	4 0
17	4 15
18	4 30
19	4 45
20	5 0
21	5 15
22	5 30
23	5 45
24	6 0
25	6 15
26	6 30
27	6 45
28	7 0
29	7 15
30	7 30
31	7 45
32	8 0
33	8 15
34	8 30
35	8 45
36	9 0
37	9 15
38	9 30
39	9 45
40	10 0
41	10 15
42	10 30
43	10 45
44	11 0
45	11 15
46	11 30
47	11 45
48	12 0
49	12 15
50	12 30
51	12 45
52	13 0
53	13 15
54	13 30
55	13 45
56	14 0
57	14 15
58	14 30
59	14 45

TAVOLA X.
Parti d' Equatore in tempo Sidereo

Gradi	O.M.
1	0. 4
2	8
3	12
4	16
5	20
6	24
7	28
8	32
9	36
10	40
20	1 20
30	2 0
40	2 40
50	3 20
60	4 0
70	4 40
80	5 20
90	6 0
100	6 40
110	7 20
120	8 0
130	8 40
140	9 20
150	10 0
160	10 40
170	11 20
180	12 0
190	12 40
200	13 20
210	14 0
220	14 40
230	15 20
240	16 0
250	16 40
260	17 20
270	18 0
280	18 40
290	19 20
300	20 0
310	20 40
320	21 20
330	22 0
340	22 40
350	23 20
360	24 0

Frazioni di secondo

0,1	0'',01
2	02
3	03
4	03
5	04
6	05
7	05
8	06
9	07

M	M.S.	M S	Sec.
1	0. 4	1	0, 07
2	8	2	13
3	12	3	20
4	16	4	27
5	20	5	33
6	24	6	40
7	28	7	47
8	32	8	53
9	36	9	60
10	40	10	67
11	44	11	73
12	48	12	80
13	52	13	87
14	56	14	93
15	1. 0	15	1, 00
16	4	16	07
17	8	17	13
18	12	18	20
19	16	19	27
20	20	20	33
21	24	21	40
22	28	22	47
23	32	23	53
24	36	24	60
25	40	25	67
26	44	26	73
27	48	27	80
28	52	28	87
29	56	29	93
30	2. 0	30	2, 00
31	4	31	07
32	8	32	13
33	12	33	20
34	16	34	27
35	20	35	33
36	24	36	40
37	28	37	47
38	32	38	53
39	36	39	60
40	40	40	67
41	44	41	73
42	48	42	80
43	52	43	87
44	56	44	93
45	3. 0	45	3, 00
46	4	46	07
47	8	47	13
48	12	48	20
49	16	49	27
50	20	50	33
51	24	51	40
52	28	52	47
53	32	53	53
54	36	54	60
55	40	55	67
56	44	56	73
57	48	57	80
58	52	58	87
59	56	59	93

TAVOLA XI. *A. R. del Sole dedotta dalla distanza in tempo dell' Equinozio al Sole*

O.	Gradi
1	345
2	330
3	315
4	300
5	285
6	270
7	255
8	240
9	225
10	210
11	195
12	180
13	165
14	150
15	135
16	120
17	105
18	90
19	75
20	60
21	45
22	30
23	15
24	0

Frazioni di secondo

0,1	0, 22
2	20
3	17
4	15
5	12
6	10
7	07
8	05
9	02

M	Min.	S.	Min.
1	14, 75	1	0, 25
2	14 50	2	24
3	14 25	3	24
4	14 0	4	23
5	13 75	5	23
6	13 50	6	22
7	13 25	7	22
8	13 0	8	22
9	12 75	9	21
10	12 50	10	21
11	12 25	11	20
12	12 0	12	20
13	11 75	13	19
14	11 50	14	19
15	11 25	15	19
16	11 0	16	18
17	10 75	17	18
18	10 50	18	17
19	10 25	19	17
20	10 0	20	17
21	9 75	21	16
22	9 50	22	16
23	9 25	23	15
24	9 0	24	15
25	8 75	25	15
26	8 50	26	14
27	8 25	27	14
28	8 0	28	13
29	7 75	29	13
30	7 50	30	13
31	7 25	31	12
32	7 0	32	12
33	6 75	33	11
34	6 50	34	11
35	6 25	35	10
36	6 0	36	10
37	5 75	37	10
38	5 50	38	09
39	5 25	39	09
40	5 0	40	08
41	4 75	41	08
42	4 50	42	07
43	4 25	43	07
44	4 0	44	07
45	3 75	45	06
46	3 50	46	06
47	3 25	47	05
48	3 0	48	05
49	2 75	49	05
50	2 50	50	04
51	2 25	51	04
52	2 0	52	03
53	1 75	53	03
54	1 50	54	03
55	1 25	55	02
56	1 0	56	02
57	0 75	57	01
58	0 50	58	01
59	0 25	59	00

TAVOLA XII.
Tempo medio in parti d' Equatore

G. M. S.	M.	G. M. S.	″	M. S.
15. 2.27,8	1	0.15. 2.5		0.15,0
30 4 55 7	2	0 30 4 9		0 30 1
45 7 23 5	3	0 45 7 4		0 45 1
60 9 51 4	4	1 0 9 9		1 0 2
75 12 19 2	5	1 15 12 3		1 15 2
90 14 47 1	6	1 30 14 8		1 30 2
105 17 14 9	7	1 45 17 2		1 45 3
120 19 42 8	8	2 0 19 7		2 0 3
135 22 10 6	9	2 15 22 2		2 15 4
150 24 38 4	10	2 30 24 6		2 30 4
165 27 6 3	11	2 45 27 1		2 45 5
180 29 34 1	12	3 0 29 6		3 0 5
195 32 2 0	13	3 15 32 0		3 15 5
210 34 29 8	14	3 30 34 5		3 30 6
225 36 57 7	15	3 45 37 0		3 45 6
240 39 25 5	16	4 0 39 4		4 0 7
255 41 53 4	17	4 15 41 9		4 15 7
270 44 21 2	18	4 30 44 4		4 30 7
285 46 49 1	19	4 45 46 8		4 45 8
300 49 16 9	20	5 0 49 3		5 0 8
315 51 44 7	21	5 15 51 7		5 15 9
330 54 12 6	22	5 30 54 2		5 30 9
345 56 40 4	23	5 45 56 7		5 45 9
360 59 8 3	24	6 0 59 1		6 1 0
	25	6 16 1 6		6 16 0
	26	6 31 4 1		6 31 1
	27	6 46 6 5		6 46 1
	28	7 1 9 0		7 1 1
	29	7 16 11 5		7 16 2
	30	7 31 13 9		7 31 2
	31	7 46 16 4		7 46 3
	32	8 1 18 8		8 1 3
	33	8 16 21 3		8 16 3
	34	8 31 23 8		8 31 4
	35	8 46 26 2		8 46 4
	36	9 1 28 7		9 1 5
	37	9 16 31 2		9 16 5
	38	9 31 33 6		9 31 6
	39	9 46 36 1		9 46 6
	40	10 1 38 6		10 1 6
	41	10 16 41 0		10 16 7
	42	10 31 43 5		10 31 7
	43	10 46 46 0		10 46 8
	44	11 1 48 4		11 1 8
	45	11 16 50 9		11 16 8
	46	11 31 53 4		11 31 9
	47	11 46 55 8		11 46 9
	48	12 1 58 3		12 2 0
	49	12 17 0 7		12 17 0
	50	12 32 3 2		12 32 1
	51	12 47 5 7		12 47 1
	52	13 2 8 1		13 2 1
	53	13 17 10 6		13 17 2
	54	13 32 13 0		13 32 2
	55	13 47 15 5		13 47 3
	56	14 2 17 9		14 2 3
	57	14 17 20 4		14 17 3
	58	14 32 22 8		14 32 4
	59	14 47 25 4		14 47 4

TAVOLA XIII.
Parti d' Equatore in tempo medio

G.	O. M. S.		M.S.	″ S.
1	0. 3.59.3	1	0. 4,0	0,1
2	7 58 7	2	8 0	1
3	11 58 0	3	12 0	2
4	15 57 4	4	16 0	3
5	19 56 7	5	19 9	3
6	23 56 1	6	23 9	4
7	27 55 4	7	27 9	5
8	31 54 7	8	31 9	5
9	35 54 1	9	35 9	6
10	39 53 4	10	39 9	7
20	1 19 46 9	11	43 9	7
30	1 59 40 3	12	47 9	8
40	2 39 33 8	13	51 9	9
50	3 19 27 2	14	55 8	9
60	3 59 20 6	15	59 8	1.0
70	4 39 14 1	16	1. 3 8	1
80	5 19 7 5	17	7 8	1
90	5 59 1 0	18	11 8	2
100	6 38 54 4	19	15 8	3
110	7 18 47 8	20	19 8	3
120	7 58 41 3	21	23 8	4
130	8 38 34 7	22	27 8	5
140	9 18 28 2	23	31 7	5
150	9 58 21 6	24	35 7	6
160	10 38 15 0	25	39 7	7
170	11 18 8 5	26	43 7	7
180	11 58 1 9	27	47 7	8
190	12 37 55 4	28	51 7	9
200	13 17 48 8	29	55 7	9
210	13 57 42 2	30	59 7	2.0
220	14 37 35 7	31	2. 3 7	1
230	15 17 29 1	32	7 6	1
240	15 57 22 6	33	11 6	2
250	16 37 16 0	34	15 6	3
260	17 17 9 4	35	19 6	3
270	17 57 2 9	36	23 6	4
280	18 36 56 3	37	27 6	5
290	19 16 49 8	38	31 6	5
300	19 56 43 2	39	35 6	6
310	20 36 36 6	40	39 6	7
320	21 16 30 1	41	43 5	7
330	21 56 23 5	42	47 5	8
340	22 36 17 0	43	51 5	8
350	23 16 10 4	44	55 5	9
360	23 56 3 8	45	59 5	3.0
		46	3.3 5	1
		47	7 5	1
		48	11 5	2
		49	15 5	3
		50	19 4	3
		51	23 4	4
		52	27 4	5
		53	31 4	5
		54	35 4	6
		55	39 4	7
		56	43 4	7
		57	47 4	8
		58	51 4	9
		59	55 4	9

T. XIV. *Diff. tra il tempo medio e quel di un Pendolo che anticipa giornalmente 1″.*

O.	S.	M.	S.
1	0,04167	1	0,0 069
2	08333	2	139
3	12500	3	208
4	16666	4	278
5	20833	5	347
6	25000	6	416
7	29166	7	486
8	33333	8	555
9	37499	9	625
10	41666	10	694
11	45832	11	763
12	49999	12	833
13	54166	13	902
14	58332	14	972
15	62499	15	0,1 041
16	66666	16	110
17	70832	17	180
18	74999	18	249
19	79165	19	319
20	83332	20	388
21	87499	21	457
22	91665	22	527
23	95832	23	596
24	1,00000	24	666
S	S	25	735
		26	804
3	0,0003	27	874
6	7	28	943
9	10	29	0,2 013
12	14	30	082
15	17	31	151
18	21	32	221
21	24	33	290
24	28	34	360
27	30	35	430
30	35	36	498
33	38	37	568
36	41	38	638
39	45	39	704
42	49	40	776
45	52	41	845
48	56	42	914
51	59	43	984
54	63	44	0,3 054
57	66	45	123
60	69	46	192
		47	262
		48	331
		49	401
		50	470
		51	539
		52	609
		53	678
		54	748
		55	817
		56	886
		57	956
		58	0,4 025
		59	095

TAV. XV. *Per convertire il tempo medio* M *in sidereo* S, *e reciprocamente.*

Arg Anni	A Or. M. S.	B S
1804 B	18 35 48,24	+ 6
1805	38 42 70	3
1806	37 49 79	− 1
1807	36 52 46	4
1808 B	35 55 01	7
1809	38 54 03	9
1810	37 56 40	10
1811	36 58 72	10
1812 B	36 1 05	9
1813	38 59 97	7
1814	38 2 42	4
1815	37 4 98	1
1816 B	36 8 69	+ 3
1817	39 6 99	6
1818	38 9 90	8
1819	37 12 89	10
1820 B	36 15 94	10
1821	39 15 56	9
1822	38 18 60	7
1823	37 21 56	5
1824 B	36 25 44	2
1825	39 27 74	− 2
1826	38 26 37	5
1827	37 28 88	8
1828 B	36 31 40	10
1829	39 20 20	10
1830	38 32 52	10
1831	37 34 87	9
1832 B	36 36 17	6
1833	39 36 30	3
1834	38 38 89	+ 1
1835	37 41 61	4
1836 B	36 44 45	7
1837	39 43 95	9
1838	38 46 98	10
1839	37 50 08	10
1840 B	36 53 08	9
1841	39 52 65	7
1842	38 55 58	4
1843	37 58 42	0
1844 B	37 1 13	− 3
1845	40 0 26	6
1846	39 2 72	9
1847	38 5 10	10
1848 B	37 7 45	10
1849	40 6 33	9
1850	39 8 69	7
1851	38 11 11	5
1852 B	37 16 65	2
1853	40 12 83	+ 1
1854	39 15 59	8
1855	38 18 48	5
1856 B	37 11 45	8
1857	40 21 03	10
1858	39 24 11	10
1859	38 27 15	10
1860 B	37 30 14	9
1861	40 29 59	7
1862	39 32 37	4

Arg giorni	C Or. M. S.	C′ Or. M. S.
1	0 3 56,96	0 3 55,91
2	7 53 11	7 51 82
3	11 49 67	11 47 72
4	15 46 22	15 43 63
5	19 42 78	19 39 54
6	23 39 33	23 35 45
7	27 35 89	27 31 37
8	31 32 44	31 27 28
9	35 29 00	35 23 19
10	39 25 57	39 19 11
20	1 18 51 15	1 18 38 23
30	1 58 16 71	1 57 57 33
40	2 37 42 26	2 37 16 43
50	3 17 7 81	3 16 35 51
60	3 56 33 34	3 55 54 58
70	4 35 58 87	4 35 13 65
80	5 15 24 41	5 14 32 73
90	6 54 49 93	5 53 51 79
100	6 34 15 46	6 33 10 97
110	7 12 40 99	7 12 29 94
120	7 53 6 54	7 51 49 05
130	8 32 32 09	8 31 8 11
140	9 11 57 65	9 10 27 21
150	9 51 23 22	9 49 46 33
160	10 30 48 79	10 29 5 44
170	11 10 14 37	11 8 24 56
180	11 49 39 95	11 47 43 68
190	12 29 5 53	12 27 2 80
200	13 8 31 09	13 6 21 92
210	13 47 56 65	13 45 41 02
220	14 27 22 21	14 25 0 13
230	15 6 47 75	15 4 19 21
240	16 46 13 29	16 43 38 29
250	16 25 38 82	16 22 57 37
260	17 5 4 35	17 2 16 43
270	17 44 29 87	17 41 35 50
280	18 23 55 41	18 20 54 57
290	19 3 20 94	19 0 13 65
300	19 42 46 48	19 39 32 73
310	20 22 12 03	20 18 51 82
320	21 1 37 59	20 58 10 92
330	21 41 3 16	21 37 30 03
340	22 20 28 73	22 16 49 14
350	22 59 54 31	22 56 8 26
360	23 39 19 89	23 35 27 37
365	23 59 2 68	23 55 6 93

Arg ore	F M. S.	F′ M. S.
1	0 9,86	0 9,83
2	19 71	19 66
3	29 57	29 49
4	39 42	39 32
5	49 28	49 15
6	59 14	58 98
7	1 9 00	1 8 81
8	18 85	18 64
9	28 71	28 46
10	38 56	38 29
11	48 42	48 12
12	58 28	57 95
13	2 8 13	2 7 78
14	17 99	17 61
15	27 85	27 44
16	37 70	37 27
17	47 56	47 10
18	57 42	56 93
19	3 7 27	3 6 76
20	17 13	16 59
21	26 98	26 42
22	36 84	36 25
23	46 70	46 08

Arg Sec	L S
3	0,01
6	02
9	02
12	03
15	04
18	05
21	05
24	06
27	07
30	08
33	09
36	10
39	10
42	11
45	12
48	13
51	14
54	15
57	16
60	17

Arg M.	H S
1	0,17
2	33
3	49
4	66
5	82
6	99
7	1 15
8	31
9	48
10	64
11	81
12	97
13	2 14
14	30
15	46
16	63
17	79
18	96
19	3 12
20	28
21	44
22	61
23	77
24	94
25	4 10
26	27
27	43
28	59
29	76
30	93
31	5 09
32	26
33	42
34	59
35	75
36	92
37	6 08
38	24
39	41
40	57
41	73
42	90
43	7 06
44	23
45	39
46	56
47	72
48	88
49	8 05
50	21
51	37
52	54
53	70
54	87
55	9 03
56	20
57	36
58	52
59	69

Il tempo M distinto in anni, giorni ore ec. e corretto colla differenza D dei meridiani (Tav. I) diverrà S colla formula $S = A + C + F + H + L + M + 0{,}0001.BG$, ove G è il numero dei Giorni contenuti in M.

Il tempo S (preso per Argomento $S - A + D$ avanti l'equinozio ed $S - A + D + 1$ dopo di esso) diverrà nel modo medesimo $M = S - (A + C' + F' + H + L + 0{,}0001.BG)$.

Posizioni medie di 36. principali Stelle secondo le ultime Osservazioni del
ni annue, altezza meridiana nella latitudine di 43° 40, e con le quantità

NOME DELLE STELLE	GRANDEZZA	ASCENSIONE RETTA IN TEMPO		DECLINAZIONE		MOTO PROPRIO	
		1810	Precess. annua	1810	Precess. annua	in A. R.	in Dec.
		Or. M. S.	S. +	Gr. M. S.	S.	S.	S.
88. γ Pegaso, *Algenib* .	2.3	0 3 27,78	3,072	14 7 36, 4 B	+ 19,97	− 0,002	− 0,09
13. α Ariete	2.3	1 56 29 12	3 352	22 33 29 9 B	+ 17 34	+ 0 013	− 0 20
92. α Balena, *Menkar* . .	2.3	2 52 21 45	3 117	3 20 14 3 B	+ 14 52	− 0 005	− 0 15
87. α Toro, *Aldebaran* .	1	4 25 1 61	3 426	16 7 0 8 B	+ 7 90	+ 0 003	− 0 20
13. α Cocchiere, *Capra* .	1	5 2 40 15	4 409	45 47 23 4 B	+ 4 57	+ 0 008	− 0 43
19. β Orione, *Rigel* . . .	1	5 5 24 58	2 877	8 25 49 0 A	− 4 71		− 0 04
120. β Toro	2	5 14 17 24	3 778	28 26 3 4 B	+ 3 80	− 0 001	− 0 20
58. α Orione.	1	5 44 53 25	3 242	7 21 38 6 A	+ 1 35		
9. α Cane mag.^e *Sirio* .	1	6 36 46 38	2 643	16 27 49 3 A	+ 4 29	− 0 036	+ 1 10
66. α Gemelli, *Castore* .	3	7 23 27 37	3 850	32 17 33 9 B	− 7 14	− 0 011	− 0 10
10. α Cane min.^e *Procione*	1	7 29 20 91	3 146	5 42 12 9 B	− 8 58	− 0 047	− 0 98
78. β Gemelli, *Polluce* .	2	7 33 40 20	3 689	28 28 26 3 B	− 8 06	− 0 047	− 0 11
30. α Idra, *Alphard* . . .	2	9 18 14 75	2 940	7 50 27 2 A	+ 15 21	− 0 015	− 0 05
32. α Leone, *Regolo* . . .	1	9 58 14 30	3 207	12 53 29 0 B	− 17 28	− 0 018	
94. β Leone, *Denebola* .	3	11 39 21 47	3 067	15 38 4 1 B	− 20 06	− 0 036	− 0 08
5. β Vergine	3.4	11 40 47 78	3 127	2 50 7 7 B	− 20 24	+ 0 052	− 0 25
67. α Vergine, *Spiga* . .	1	13 15 11 88	3 146	10 9 54 1 A	+ 18 97		− 0 03
16. α Boote, *Arturo* . .	1	14 6 59 77	2 733	20 10 38 0 B	− 19 05	− 0 078	− 1 96
8. α. 1. Bilancia	6	14 40 11 61	3 293	15 11 53 6 A	+ 15 36		
9. α. 2. Bilancia	2.3	14 40 23 21	3 297	15 14 38 1 A	+ 15 22	− 0 006	− 0 14
5. α Corona, *Gemma* .	2.3	15 26 38 48	2 530	27 21 41 9 B	− 12 58	+ 0 003	− 0 12
24. α Serpente	2.3	15 34 54 87	2 938	7 1 54 6 B	− 11 90	+ 0 002	− 0 01
21. α Scorpione, *Antares*	1	16 17 46 75	3 660	25 59 53 0 A	+ 8 61	+ 0 003	− 0 07
64. α Ercole	3.4	17 5 59 11	2 730	14 37 0 7 B	− 4 65		+ 0 05
55. α Serpentario	2	17 26 7 02	2 778	12 42 30 9 B	− 3 20	+ 0 007	− 0 22
3. α Lira, *Wega*	1	18 30 30 16	2 028	38 36 49 5 B	+ 2 90	+ 0 017	+ 0 25
50. γ Aquila	3	19 37 13 50	2 847	10 9 34 2 B	+ 8 26	− 0 004	+ 0 02
53. α Aquila, *Atair* . .	1.2	19 41 30 62	2 925	8 22 34 8 B	+ 8 91	+ 0 034	+ 0 38
60. β Aquila	3.4	19 45 58 63	2 944	5 56 29 2 B	+ 8 40	− 0 001	− 0 53
5. α. 1. Capricorno . .	4	20 7 6 41	3 336	13 5 6 8 A	− 10 55	+ 0 001	
6. α. 2. Capricorno . .	3	20 7 30 22	3 338	13 7 25 7 A	− 10 46	+ 0 004	+ 0 12
50. α. Cigno, *Deneb* . . .	1.2	20 34 57 26	2 044	44 36 24 6 B	+ 12 44	+ 0 004	− 0 10
34. α Aquario	3	21 56 1 19	3 077	1 14 14 2 A	− 17 24	− 0 008	− 0 05
34. α Pesce Aust *Fomalhaut*	1	22 47 7 54	3 340	30 37 31 2 A	− 19 32	+ 0 022	− 0 27
54. α Pegaso, *Markab* . .	1.2	22 55 18 13	2 976	14 11 8 9 A	+ 19 18	+ 0 001	− 0 08
21. α Andromeda	1.2	23 58 35 16	3 072	28 2 26 6 B	+ 19 80	+ 0 008	− 0 26
Polare 1810	3	0 54 33 18	13 627	88 17 40 8	+ 19 48		
Polare 1820 . . .	3	0 56 52 96	14 427	88 20 55 4	+ 19 43		

N. B. *I moti proprj sono già compresi nelle Precessioni annue.*

Chiariss. P. PIAZZI ridotte al 1° Gennajo 1810, coi loro moti proprj, precessio-
ausiliarie per calcolarne l' Aberrazione e la Nutazione.

ALTEZZA	ABERRAZIONE				NUTAZIONE			
	ASCENSIONE RETTA		DECLINAZIONE		ASCENSIONE RETTA		DECLINAZIONE	
	Angolo φ	Log. α	Angolo φ	Log. α	Angolo φ	Log. α	Angolo φ	Log. α
G. M.	S. G. M. S.		S. G. M. S.		S. G. M. S.		S. G. M. S.	
62 21	3 0 48 10	0,10653	4 2 31 0	0,96355	5 21 42 0	0,04766	6 1 9 50	0,85619
68 46	4 1 6 50	0 13735	4 29 37 0	0 89590	5 19 3 10	0 08707	7 6 48 30	0 89412
49 34	4 15 23 50	0 11059	3 6 42 50	0 86714	5 28 36 50	0 04805	7 21 29 10	0 92548
62 20	5 7 51 0	0 14207	4 6 47 10	0 57756	5 26 28 50	0 09037	8 11 52 10	0 96815
92 1	5 16 37 30	0 28473	8 3 48 40	0 91085	5 24 3 30	0 20030	8 19 13 50	0 97842
37 47	5 17 17 20	0 13307	8 26 13 40	1 02731	6 1 14 50	0 01420	2 19 45 10	0 97898
74 40	5 19 21 40	0 18443	7 9 34 10	0 39427	5 27 2 0	0 13284	8 21 26 30	0 98060
53 35	5 26 25 40	0 13374	3 1 44 30	0 75024	5 29 42 10	0 06559	8 27 11 10	0 98402
29 46	6 8 20 0	0 14786	9 4 3 20	1 11282	5 28 12 50	9 98384	3 6 52 20	0 98195
78 31	6 18 54 50	0 19901	10 27 1 10	0 65722	6 5 51 40	0 14415	9 15 38 30	0 97209
51 56	6 20 30 50	0 12777	2 23 5 50	0 80377	6 1 11 40	0 03966	9 17 0 30	0 96998
74 42	6 21 35 10	0 18115	11 14 51 30	0 59944	6 5 51 50	0 12985	9 17 52 10	0 96858
8 23	7 16 55 0	0 11323	9 12 20 20	0 99295	5 26 22 40	0 02617	4 11 8 10	0 91956
9 7	7 27 10 50	0 11413	1 25 56 10	0 84235	6 6 15 20	0 06613	10 21 42 40	0 89702
61 51	8 24 14 20	0 09321	1 23 23 10	0 95979	6 9 8 10	0 05274	11 23 4 50	0 85764
9 3	8 24 35 0	0 09341	2 22 52 0	0 90332	6 1 40 0	0 04315	11 23 33 40	0 85747
56 3	9 20 16 10	0 10415	9 26 10 50	0 88478	5 24 29 40	0 05480	6 24 34 30	0 87368
6 24	10 3 51 20	0 13164	2 1 30 0	1 09547	6 11 16 40	0 01252	1 9 44 0	0 89993
31 1	10 12 31 10	0 12485	10 11 9 10	0 79038	5 23 31 30	0 07629	7 18 28 30	0 91850
59	10 12 34 0	0 12498	10 11 18 40	0 79068	5 23 32 10	0 07624	7 18 31 10	0 91879
73 35	10 24 0 0	0 16808	2 7 23 0	1 17655	6 12 50 20	9 96902	1 29 30 50	0 94357
3 15	10 25 55 50	0 12134	2 21 31 10	0 99771	6 2 35 40	0 02370	2 1 21,10	0 94760
0 13	11 6 11 10	0 17005	0 1 26 40	0 58329	5 24 10 10	0 12041	8 10 24 20	96563
0 51	11 17 28 40	0 14250	2 24 29 10	1 09396	6 2 17 40	9 99202	2 19 51 50	0 97909
8 56	11 22 8 50	0 14018	2 26 50 40	1 07662	6 1 12 50	9 99792	2 23 40 20	0 98233
64 50	0 6 54 40	0 23692	3 5 23 0	1 25223	5 24 43 30	9 86062	3 5 41 30	0 98273
56 22	0 22 27 30	0 13170	3 7 39 50	1 04237	5 27 19 10	0 01078	3 18 35 0	0 96758
24 35	0 23 26 0	0 12853	3 6 55 0	1 02120	5 27 50 0	0 01651	3 19 27 0	0 96588
52 9	0 24 27 50	0 12582	3 5 29 0	0 99076	5 28 26 0	0 02465	3 20 21 30	0 96428
33 8	0 29 32 0	0 13227	8 0 34 0	0 69149	6 3 46 50	0 07904	9 24 45 20	0 95578
33 6	0 29 35 30	0 13238	8 0 22 50	0 69152	6 3 46 10	0 07834	9 24 50 20	0 95360
2 49	1 6 10 10	0 26366	3 29 12 30	1 26101	5 1 36 0	9 92081	4 0 51 50	0 94285
44 59	1 26 41 50	0 10884	8 27 16 0	0 89578	6 0 6 40	0 04415	10 21 5 50	0 89825
15 36	2 10 4 40	0 16227	6 22 6 50	1 02442	6 16 52 50	0 09581	11 6 8 50	0 87271
32 2	2 12 21 20	0 10961	3 27 40 50	1 01126	5 21 42 10	0 03321	5 8 42 40	0 86936
74 15	2 29 28 10	0 14708	4 23 0 30	1 07633	5 12 44 10	0 06157	5 29 31 20	0 85609
44 31	3 14 49 0	1 62159	0 11 52 50	1 30332	3 13 7 40	1 33322	6 18 3 10	0 86577
44 34	3 15 26 40	1 63572	0 12 26 30	1 30316	3 13 29 0	1 34708	6 18 48 0	0 86652

Poste ☉ *e* ☊ *le Longitudini del Sole e del Nodo Lunare, si ha tanto in Ascensione retta che in Declinazione)* Aber $= \alpha \operatorname{sen}(☉ - \varphi)$, Nut $= \alpha \times \operatorname{sen}(☊ - \varphi)$.

TAVOLA XVII. *Culminazione di 17 Stelle, in tempo vero, per i Bisestili.*

	Polare Pas. sup.	Polare Pas. inf.	α Ariete	Aldebaran	Capra	α Orione	Sirio	Castore	Regolo
	or '	or '	or '	or '	or '	or '	or '	or '	or '
Gen. 1	6 10 S	6 12M	7 13 S	9 40 S	10 18 S	11 0 S	11 51 S	0 41M	3 16M
8	5 39	5 41	6 41	9 9	9 47	10 29	11 20	0 10	2 46
15	5 9	5 11	6 11	8 39	9 17	9 59	10 50	11 35 S	2 15
22	4 39	4 41	5 41	8 9	8 47	9 29	10 21	11 6	1 46
29	4 10	4 12	5 12	7 40	8 18	9 0	9 52	10 37	1 16
Febb. 5	3 42	3 44	4 44	7 12	7 49	8 31	9 23	10 9	0 48
12	3 14	3 16	4 16	6 44	7 21	8 4	8 55	9 41	0 20
19	2 47	2 49	3 49	6 17	6 54	7 36	8 28	9 14	11 49 S
26	2 20	2 22	3 22	5 50	6 28	7 10	8 2	8 46	11 26
Mar. 4	1 54	1 56	2 56	5 24	6 2	6 44	7 35	8 21	10 56
11	1 28	1 30	2 30	4 58	5 36	6 18	7 10	7 55	10 30
18	1 3	1 5	2 5	4 33	5 10	5 52	6 44	7 30	10 6
25	0 37	0 39	1 39	4 7	4 45	5 27	6 19	7 4	9 40
Apr. 1	0 12	0 14	1 14	3 42	4 19	5 1	5 53	6 39	9 14
8	11 47 M	11 45 S	0 48	3 16	3 54	4 36	5 27	6 13	8 49
15	11 21	11 19	0 23	2 51	3 28	4 10	5 12	5 48	8 23
22	10 55	10 53	11 57M	2 25	3 2	3 44	4 36	5 22	7 57
29	10 29	10 27	11 31	1 59	2 36	3 18	4 10	4 56	7 31
Mag. 6	10 2	10 0	11 4	1 32	2 9	2 51	3 44	4 29	7 4
13	9 35	9 33	10 37	1 5	1 42	2 24	3 16	4 2	6 37
20	9 7	9 5	10 9	0 37	1 15	1 57	2 48	3 34	6 09
27	8 39	8 37	9 41	0 9	0 47	1 29	2 20	3 6	6 41
Giug. 3	8 11	8 9	9 12	11 41M	0 18	1 10	1 52	2 37	5 13
10	7 42	7 40	8 44	11 12	11 49M	0 31	1 23	2 9	4 44
17	7 13	7 11	8 15	10 43	11 20	0 2	0 54	1 40	4 15
24	6 44	6 42	7 46	10 14	10 51	11 33M	0 25	1 11	3 46
Lug. 1	6 15	6 13	7 17	9 45	10 22	11 4	11 56M	0 42	3 17
8	5 46	5 44	6 48	9 16	9 54	10 32	11 27	0 13	2 48
15	5 18	5 16	6 19	8 48	9 25	10 7	10 59	11 45M	2 20
22	4 50	4 48	5 51	8 20	8 57	9 39	10 31	11 17	1 52
29	4 22	4 20	5 24	7 52	8 30	9 12	10 3	10 49	1 24
Ago. 5	3 55	3 53	4 57	7 25	8 2	8 44	9 36	10 22	0 57
12	3 28	3 26	4 30	6 58	7 36	8 18	9 10	9 55	0 31
19	3 2	3 0	4 4	6 32	7 10	7 52	8 44	9 29	0 5
26	2 36	2 35	3 38	6 6	6 44	7 26	8 18	9 3	11 39M
Sett. 2	2 11	2 9	3 13	5 41	6 19	7 1	7 52	8 38	11 13
9	1 46	1 44	2 48	5 16	5 53	6 35	7 27	8 13	10 48
16	1 21	1 19	2 23	4 51	5 28	6 16	7 2	7 48	10 23
23	0 55	0 54	1 57	4 26	5 3	5 45	6 37	7 23	9 58
30	0 30	0 29	1 32	4 0	4 38	5 20	6 12	6 57	9 33
Ott. 7	0 5	0 3	1 7	3 35	4 13	4 55	5 46	6 32	9 7
14	11 35 S	11 37M	0 41	3 9	3 47	4 29	5 21	6 6	8 42
21	11 9	11 11	0 15	2 43	3 21	4 3	4 54	5 40	8 15
28	10 42	10 44	11 44 S	2 16	2 54	3 36	4 28	5 13	7 49
Nov. 4	10 15	10 17	11 17	1 49	2 27	3 9	4 0	4 46	7 21
11	9 47	9 49	10 49	1 21	1 59	2 41	3 32	4 18	6 53
18	9 18	9 20	10 20	0 53	1 30	2 12	3 4	3 49	6 25
25	8 49	8 51	9 51	0 23	1 1	1 43	2 34	3 20	5 55
Dice. 2	8 19	8 21	9 21	11 49 S	0 31	1 13	2 4	2 50	5 25
9	7 49	7 50	8 50	11 18	11 56 S	0 42	1 34	2 19	4 55
16	7 18	7 20	8 19	10 48	11 25	0 11	1 3	1 48	4 24
23	6 47	6 49	7 48	10 27	10 54	11 40 S	0 32	1 17	3 53
30	6 16	6 18	7 17	9 46	10 23	11 9	11 57 S	0 46	3 22

Segue la TAVOLA XVII. *Culminazione* ec.

	Spiga	Arturo	Gemma	Antares	α Lira	α Aquila	α Cigno	Fomalhaut	α Andromed
	or ′	or ′	or ′	or ′	or ′	or ′	or ′	or ′	or ′
Gen. 1	6 33 M	7 24 M	8 44 M	9 35 M	11 47 M	0 58 S	1 51 S	4 3 S	5 14 S
8	6 2	6 54	8 13	9 4	11 16	0 27	1 20	3 32	4 44
15	5 32	6 23	7 43	8 34	10 46	11 57 M	0 50	3 1	4 13
22	5 2	5 54	7 13	8 4	10 16	11 27	0 21	2 32	3 44
29	4 33	5 24	6 44	7 35	9 47	10 58	11 51 M	2 2	3 15
Febb. 5	4 4	4 56	6 15	7 6	9 19	10 30	11 23	1 35	2 46
12	3 37	4 28	5 48	6 39	8 51	10 2	10 55	1 7	2 18
19	3 9	4 1	5 21	6 11	8 24	9 35	10 28	0 40	1 51
26	2 43	3 34	4 54	5 45	7 57	9 8	10 1	0 13	1 24
Mar. 4	2 17	3 8	4 28	5 19	7 31	8 42	9 35	11 47 M	0 58
11	1 51	2 42	4 2	4 53	7 5	8 16	9 9	11 21	0 33
18	1 25	2 17	3 36	4 27	6 40	7 51	8 44	10 56	0 7
25	1 0	1 52	3 11	4 2	6 14	7 25	8 18	10 30	11 42 M
Apr. 1	0 35	1 26	2 46	3 37	5 49	7 0	7 53	10 5	11 16
8	0 9	1 1	2 20	3 11	5 24	6 33	7 28	9 39	10 51
15	11 40 S	0 35	1 55	2 46	4 58	6 9	7 2	9 14	10 25
22	11 14	0 9	1 29	2 20	4 33	5 43	6 36	8 48	9 59
29	10 47	11 39 S	1 2	1 53	4 6	5 16	6 10	8 22	9 33
Mag. 6	10 21	11 12	0 36	1 27	3 39	4 50	5 45	7 55	9 5
13	9 54	10 45	0 5	0 59	3 12	4 23	5 16	7 28	8 39
20	9 26	10 17	11 37 S	0 32	2 44	3 55	4 48	7 0	8 11
27	8 58	9 49	11 9	0 4	2 16	3 27	4 20	6 32	7 43
Giug. 3	8 29	9 21	10 40	11 31 S	1 48	2 58	3 52	6 4	7 15
10	8 0	8 52	10 12	11 3	1 19	2 30	3 23	5 35	6 46
17	7 31	8 23	9 43	10 34	0 50	2 1	2 54	5 6	6 17
24	7 2	7 54	9 14	10 5	0 21	1 32	2 25	4 37	5 48
Lug. 1	6 33	7 25	8 45	9 36	11 48 S	1 3	1 56	4 8	5 19
8	6 5	6 56	8 15	9 7	11 19	0 34	1 27	3 39	4 50
15	5 36	6 28	7 47	8 39	10 51	0 5	0 59	3 11	4 22
22	5 8	6 0	7 19	8 10	10 23	11 34 S	0 31	2 43	3 54
29	4 41	5 32	6 52	7 43	9 55	11 6	0 3	2 15	3 26
Ago. 5	4 14	5 5	6 25	7 16	9 28	10 39	11 31 S	1 48	2 59
12	3 47	4 39	5 58	6 49	9 1	10 12	11 6	1 21	2 33
19	3 21	4 13	5 32	6 23	8 35	9 46	10 39	0 55	2 6
26	2 55	3 47	5 6	5 57	8 10	9 20	10 14	0 29	1 41
Sett. 2	2 30	3 21	4 41	5 32	7 44	8 55	9 48	0 4	1 35
9	2 4	2 56	4 16	5 7	7 19	8 30	9 23	11 35 S	0 50
16	1 39	2 31	3 50	4 41	6 54	8 5	8 58	11 10	0 25
23	1 14	2 6	2 25	4 16	6 29	7 40	8 33	10 45	11 56 S
30	0 49	1 41	3 0	3 51	6 4	7 14	8 8	10 19	11 31
Ott. 7	0 24	1 15	2 35	3 26	5 38	6 49	7 42	9 54	11 5
14	11 58 M	0 50	2 9	3 0	5 12	6 23	7 17	9 28	10 40
21	11 32	0 23	1 43	2 34	4 46	5 57	6 50	9 2	10 13
28	11 5	11 57 M	1 16	2 7	4 20	5 30	6 24	8 38	9 47
Nov. 4	10 38	11 29	0 49	1 40	3 52	5 3	5 56	8 8	9 19
11	10 10	11 1	0 21	1 12	3 24	4 35	5 28	7 40	8 51
18	9 41	10 33	11 52 M	0 43	2 55	4 6	5 0	7 11	8 23
25	9 12	10 3	11 23	0 14	2 26	3 37	4 30	6 42	7 53
Dice. 2	8 42	9 33	10 53	11 44 M	1 57	3 7	4 0	6 12	7 23
9	8 11	9 3	10 22	11 13	1 25	2 36	3 30	5 41	6 53
16	7 40	8 32	9 51	10 42	0 55	2 6	2 59	5 11	6 22
23	7 9	8 1	9 20	10 11	0 24	1 34	2 28	4 40	5 51
30	6 38	7 30	8 49	9 40	11 53 M	1 4	1 57	4 9	5 20

N. B. *Nel* 1° 2° *e* 3° *anno intercalare gli appulsi anticiperanno respettivamente di* 3′, 2′, 1′ *nei primi due mesi, e ritarderanno di* 1′, 2′, 3′ *negli altri.*

TAVOLA *Generale per l' Aberrazione e Nutazione delle Stelle*

ABERRAZIONE

Arg. I. Longitud. ⊙ = λ

	Oˢ	VIˢ	Iˢ	VIIˢ	IIˢ	VIIIˢ
G.	φ +	log α	φ +	log α	φ +	log α
0	0°.0′	1,2690	2°.11′	1,2790	2°.6′	1,2977
2	11	91	16	1,2802	0	88
4	22	92	20	15	1.54	98
6	32	95	23	27	47	1,3008
8	43	98	25	40	40	17
10	53	1,2703	27	53	32	25
12	1. 3	08	28	66	24	32
14	12	14	28	79	16	39
16	22	21	28	92	7	45
18	30	29	27	1,2905	0.58	50
20	39	38	25	18	49	55
22	46	47	22	31	39	59
24	53	57	19	44	30	61
26	2. 0	68	15	56	20	64
28	6	79	11	66	10	65
30	11	90	6	77	0	65
G.	φ −	log α	φ −	log α	φ −	log α
	Vˢ	XIˢ	IVˢ	Xˢ	IIIˢ	IXˢ

Arg. II. = λ + *Declin.* * = λ + δ
Arg. III. = λ ∽ δ

G.	Oˢ − VIˢ +	Iˢ − VIIˢ +	IIˢ − VIIIˢ +	G.
0	4″,03	3″,49	2″,02	30
2	03	42	1 ,89	28
4	02	34	77	26
6	01	26	64	24
8	3 ,99	18	51	22
10	97	09	38	20
12	95	00	25	18
14	91	2 ,90	11	16
16	88	80	0 ,98	14
18	84	70	84	12
20	79	59	70	10
22	74	48	56	8
24	68	37	42	6
26	63	26	28	4
28	56	14	14	2
30	49	02	0 ,00	0
G.	Vˢ + XIˢ −	IVˢ + Xˢ −	IIIˢ + IXˢ −	G.

Aberr. AR = − *α sec* δ *cos* (λ + φ − AR)

Aberr. Decl. = − *α sen* δ *sen* (λ + φ − AR) + *Eq. II.* + *Eq. III.*

NUTAZIONE

Arg. I. Longit. Nodo ☽ = ☊

Oˢ	VIˢ	Iˢ	VIIˢ	IIˢ	VIIIˢ	
φ −	log α	φ −	log α	φ −	log α	G.
0°.0′	0,9844	6°.45′	0,9588	7°.48′	0,8960	30
31	43	7. 3	554	32	917	28
1. 1	40	20	518	14	875	26
32	34	36	481	6. 53	834	24
2. 2	25	49	442	29	795	22
31	15	8. 1	402	3	758	20
3. 1	02	10	361	5. 35	723	18
29	0,9787	17	318	4	691	16
57	70	23	275	4. 31	663	14
4.24	50	25	231	3. 56	637	12
50	28	25	186	20	615	10
5.16	04	23	140	2. 41	596	8
40	0,9678	18	095	2	582	6
6. 3	50	11	050	1. 22	571	4
24	20	1	005	0. 41	565	2
45	88	7. 48	0,8960	0	563	0
φ +	log α	φ +	log α	φ +	log α	G.
Vˢ	XIˢ	IVˢ	Xˢ	IIIˢ	IXˢ	

Arg. II. = ☊

G.	Oˢ − VIˢ +	Iˢ − VIIˢ +	IIˢ − VIIIˢ +	G.
0	0″,00	8″,27	14″,33	30
2	0 58	8 77	61	28
4	1 15	9 25	87	26
6	1 73	9 72	15 ,11	24
8	2 30	10 19	34	22
10	2 87	10 63	55	20
12	3 44	11 07	73	18
14	4 00	11 49	90	16
16	4 56	11 90	16 ,05	14
18	5 11	12 30	18	12
20	5 66	12 67	29	10
22	6 20	13 04	38	8
24	6 73	13 38	45	6
26	7 25	13 72	50	4
28	7 77	14 03	53	2
30	8 27	14 33	54	0
G.	Vˢ + XIˢ −	IVˢ + Xˢ −	IIIˢ + IXˢ −	G.

Nut. AR = − *α tang* δ *cos* (☊ + φ − AR) + *Eq. II.*

Nut. Decl. = − *α sen* (☊ + φ − AR)

TAVOLE SOLARI

TAVOLA I^a. *Epoche*

Anni	long. media ☉	Arg. I Anom. med ☉	Ar. II	Ar. III	Ar. IV	Ar. V	Ar. VI	Ar. VII	Ar. VIII	Ar. IX	Ar. X	Ar. XI	Ar. ☊	☉
1804 B	9ˢ 9°55′ 49″3	6ˢ 0°22′ 39″7	628	628	505	712	979	268	564	607	330	148	123	778
1805	41 29,7	7 18,1	988	253	973	627	229	331	648	482	205	978	176	8
1806	27 10 1	5 29 51 56 5	348	878	441	542	480	394	732	358	082	809	230	7
1807	12 50 5	36 34 9	708	503	908	457	732	459	817	235	960	639	284	6
1808 B	57 39 2	6 0 20 21 7	102	130	378	375	984	522	901	114	837	473	338	8
1809	43 19 6	5 0 1	462	755	846	290	234	585	985	989	712	303	391	8
1810	29 0 0	5 29 49 38 5	822	380	314	205	485	648	069	865	589	134	445	7
1811	14 40 4	34 16 9	182	005	781	120	736	713	155	741	467	964	499	6
1812 B	59 29 1	6 0 18 3 6	576	632	251	037	988	776	239	620	344	798	553	8
1813	45 9 5	2 42 0	936	257	719	952	238	839	323	495	219	628	606	8
1814	30 49 9	5 29 47 20 4	296	882	187	867	489	902	407	371	096	459	660	7
1815	16 30 3	31 58 8	656	507	655	782	741	966	492	248	975	290	714	6
1816 B	10 1 19 1	6 0 15 45 5	016	134	125	700	993	029	576	127	852	124	768	8
1817	9 46 59 5	0 23 9	376	759	593	615	243	092	660	002	727	954	821	8
1818	32 39 9	5 29 45 2 3	770	384	061	530	494	155	744	878	604	785	875	7
1819	18 20 2	29 40 7	130	009	528	444	745	220	830	754	482	615	929	6
1820 B	10 3 9 0	6 0 13 27 4	490	636	998	362	997	283	914	633	359	449	983	8
1821	9 48 49 4	5 29 58 5 8	850	261	466	277	247	346	998	508	234	279	036	8
1822	34 29 8	42 44 2	244	886	934	192	498	409	082	384	111	110	090	7
1823	20 10 2	27 22 6	604	511	401	107	750	474	167	261	989	940	143	6
1824 B	10 4 58 9	6 0 11 9 4	964	138	871	025	002	537	251	140	866	774	197	8
1825	9 50 39 3	5 29 55 47 8	324	763	339	940	252	600	335	015	741	604	250	8
1826	36 19 7	40 26 2	719	388	807	855	503	663	419	891	618	435	304	7
1827	22 0 1	25 4 6	079	013	274	770	755	728	504	768	496	265	358	6
1828 B	10 6 48 8	6 0 8 51 3	439	640	744	688	007	791	588	647	373	099	412	8
1829	9 52 29 2	5 29 53 29 7	799	265	212	603	257	854	672	522	248	929	465	8
1830	38 9 6	38 8 1	193	890	680	518	508	917	756	398	125	760	519	7
1831	23 50 0	22 46 5	553	515	147	432	759	982	842	274	003	590	573	6
1832 B	10 8 38 7	6 0 6 33 2	913	142	617	350	011	045	926	153	880	424	627	8
1833	9 54 19 1	5 29 51 11 6	273	767	085	265	261	108	010	028	755	254	680	8
1834	39 59 5	35 50 0	667	392	553	180	512	171	094	904	632	085	734	7
1835	25 39 9	20 28 4	027	017	021	095	764	235	179	781	511	916	788	6
1836 B	10 10 28 7	6 0 4 15 2	387	644	491	013	016	298	263	660	388	750	842	8
1837	9 56 9 1	5 29 48 53 6	747	269	959	928	266	361	347	535	263	580	895	8
1838	41 49 5	33 32 0	141	894	426	843	517	424	431	411	140	411	949	7
1839	27 29 8	18 10 4	501	519	894	757	768	489	517	287	018	241	003	6
1840 B	10 12 18 6	6 0 1 57 1	861	146	364	675	020	552	601	166	895	075	057	8
1841	9 57 59 0	5 29 46 35 5	221	771	832	590	270	615	685	041	770	905	110	8
1842	43 39 4	31 13 9	515	396	300	505	521	678	769	917	647	736	164	7
1843	29 19 8	15 52 3	975	021	767	420	773	743	854	794	525	566	218	6
1844 B	10 14 8 5	59 39 0	335	648	287	238	025	806	938	673	402	400	272	8
1845	9 59 48 9	44 17 4	695	273	705	253	275	869	022	548	277	230	325	8
1846	45 29 3	28 55 8	089	898	173	168	526	932	106	424	154	061	379	7
1847	31 9 7	13 34 2	449	523	640	083	778	997	191	301	032	891	433	6
1848 B	10 15 58 4	57 21 0	809	150	110	001	030	060	275	180	909	725	487	8
1849	1 38 8	41 59 4	169	775	578	916	280	123	359	055	784	555	540	8
1850	9 47 19 2	26 37 8	563	400	046	831	531	186	443	931	661	386	594	7
1851	32 59 6	11 16 2	923	025	513	745	782	251	529	807	539	216	648	6
1852 B	10 17 48 3	55 2 9	283	652	983	663	034	314	613	686	416	050	702	8
1853	3 28 7	39 41 3	643	277	451	578	284	377	697	561	291	880	755	8
1854	9 49 9 1	24 19 7	037	902	919	493	535	440	781	437	168	711	809	7
1855	34 49 5	8 58 1	397	527	387	408	787	504	866	314	047	542	863	6
1856 B	10 19 38 3	52 44 8	757	154	857	326	039	567	950	193	924	376	917	8

TAVOLA II. *Estensione della Tavola I. precedente ad un maggior numero di anni.*

1ª. *Parte*. Epoche.

Anni	Long. m.ª ☉	Arg. I. An. m.ª ☉	Ar. II	Ar. III	Ar. IV	Ar. V	Ar. VI	Ar. VII	Ar. VIII	Ar. IX	Ar. X	Ar. XI	Ar. ☊	☉
1600	9ˢ 9° 37′ 41″,17	6ˢ 3° 31′ 53″	596	902	377	664	501	517	612	404	099	052	323	778
1700	9 9 24 20 87	6 1 35 23	415	452	206	229	614	861	046	066	776	185	696	777
1800	9 9 11 0 57	5 29 38 53	234	001	035	794	727	205	480	728	455	314	059	776
1900	9 8 57 40 27	5 27 42 23	053	550	864	359	840	549	914	390	135	445	442	775

Per gli Anni 1600, 1601, 1602; 1700, 1701, 1702; 1800, 1801, 1802; ec. si tolgano

dalla Lon.	dall'An.	dagli Argomenti II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	☊	☉
59′8″,33	59′8″,33	034	002	001	003	001	000	000	003	000	003	000	003

2ª. *Parte*. Costanti da moltiplicarsi per il quoziente $\frac{i}{4}$ (*i* è il numero d'anni dopo il 1700)

Long. m. ☉	An. m. ☉	Argomenti II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	☊	☉
+ 1′49″,92	− 2′18″,07	474,1	502,0	873,2	662,6	304,6	253,8	337,4	506,6	507,2	325,2	214,9	0,0

3ª. *Parte*. Costanti da sommarsi.

Resto	long. m.ª ☉	An. m.ª ☉	Ar. II	Ar. III	Ar. IV	Ar. V	Ar. VI	Ar. VII	Ar. VIII	Ar. IX	Ar. X	Ar. XI	Ar. ☊	☉
1	44′ 48″,73	43′ 46″,73	394	627	470	918	252	063	084	879	877	834	054	2
2	30 29 13	28 25 13	754	252	938	835	02	126	169	754	752	664	107	2
3	16 9 53	13 3 53	114	877	406	748	753	190	253	630	629	495	161	1

TAVOLA III. *Moti medj per i Mesi.*

Mes	Long. m.ª ☉	Anom. m.ª ☉	Ar. II	Ar. III	Ar. IV	Ar. V	Ar. VI	Ar. VII	Ar. VIII	Ar. IX	Ar. X	Ar. XI	Ar. ☊	☉
Gennajo	0ˢ 0° 0′ 0″,0	0ˢ 0° 0′ 0″,0	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
Febbr.	1 0 33 18,2	1 0 3 12,9	050	053	039	078	022	005	007	075	991	071	004	085
Marzo	1 28 9 11 4	1 28 9 1 4	998	101	074	149	041	010	014	141	978	135	009	162
Aprile	2 28 42 29 7	2 28 42 14 4	048	154	114	226	062	016	021	216	970	205	013	246
Maggio	3 28 16 39 6	3 28 16 19 2	064	205	162	301	083	021	028	288	961	273	017	329
Giugno	4 28 49 57 8	4 28 49 32 2	114	259	191	380	104	026	035	363	949	346	022	414
Luglio	5 28 24 7 7	5 28 23 37 0	130	310	229	455	124	032	042	435	938	413	026	496
Agosto	6 28 57 26 0	6 28 56 50 0	179	365	270	533	145	036	047	508	925	485	031	580
Settem.	7 29 30 44 2	7 29 30 3 0	229	416	309	611	166	041	056	582	916	556	036	666
Ottobre	8 29 4 54 0	8 29 4 7 7	244	468	348	686	187	046	062	655	906	624	041	745
Novem.	9 29 38 12 4	9 29 37 20 8	294	521	388	764	209	053	070	730	897	693	045	832
Decem.	10 29 12 22 2	10 29 11 25 5	310	572	426	838	231	058	077	802	888	761	049	914

TAVOLA IV. *Moti medj per i giorni*

La colonna dei Bisestili ha luogo per i soli Mesi di Gennajo e Febbrajo.

Anno Bis.	Anno Com.	Long. m.ª ☉	Anom. m.ª ☉	Ar. II	Ar. III	Ar. IV	Ar. V	Ar. VI	Ar. VII	Ar. VIII	Ar. IX	Ar. X	Ar. XI	Ar. ☊	☉
1	0	0ˢ 0° 0′ 0″,0	0ˢ 0° 0′ 0″,0	000	0	0	0	0	0	0	0	000	0	0	0
2	1	0 0 59 8,3	0 0 59 8,1	034	2	1	3	1	0	0	3	000	3	0	3
3	2	0 1 58 16 7	0 1 58 16 4	068	3	2	5	1	0	0	4	999	5	0	5
4	3	0 2 57 25 0	0 2 57 24 5	102	5	3	8	2	0	1	7	999	7	0	8
5	4	0 3 56 33 3	0 3 56 32 6	135	7	5	11	3	1	1	10	999	10	1	11
6	5	0 4 55 41 6	0 4 55 40 8	169	9	6	13	3	1	1	12	998	12	1	14
7	6	0 5 54 50 0	0 5 54 49 0	203	10	7	15	4	1	1	14	998	14	1	16
8	7	0 6 53 58 3	0 6 53 57 1	237	12	8	18	5	1	2	17	997	16	1	19
9	8	0 7 53 6 6	0 7 53 5 2	271	14	10	20	5	1	2	19	997	18	1	22
10	9	0 8 52 15 0	0 8 52 13 5	305	15	11	23	6	2	2	21	996	21	1	25

Segue la TAVOLA IV. *dei Moti medj per i giorni*

Anno Bis.	Com.	long. m^a. ⊙	Anom. m^a. ⊙	Ar. II	A. III	A. IV	A. V	A. VI	A. VII	Ar. VIII	A. IX	Ar. X	A. XI	A. ☊	⊙
11	10	0ˢ 9°51′23″,3	0ˢ 9°51′21″,6	339	17	12	25	7	2	2	24	995	23	1	27
12	11	10 50 31 6	10 50 29 7	373	19	13	28	8	2	2	26	5	26	1	30
13	12	11 49 40 0	11 49 38 0	407	20	14	30	8	2	2	28	5	28	1	32
14	13	12 48 48 3	12 48 46 1	441	22	15	33	9	2	3	30	5	30	1	35
15	14	13 47 56 6	13 47 54 3	474	24	17	36	10	2	3	33	5	33	2	38
16	15	14 47 4 9	14 47 2 4	508	26	18	38	10	3	3	35	4	35	2	41
17	16	15 46 13 3	15 46 10 6	542	27	19	40	11	3	3	38	4	37	2	43
18	17	16 45 21 6	16 45 18 7	576	29	20	43	12	3	4	41	4	39	2	46
19	18	17 44 29 9	17 44 26 9	610	31	22	45	12	3	4	43	4	41	2	49
20	19	18 43 38 3	18 43 35 1	644	32	23	48	13	3	4	45	3	44	2	52
21	20	19 42 46 6	19 42 43 2	678	34	24	50	14	3	5	48	3	45	3	55
22	21	20 41 54 9	20 41 51 3	731	36	26	53	15	4	5	51	3	48	3	58
23	22	21 41 3 3	21 40 59 6	745	37	27	55	15	4	5	52	3	50	3	60
24	23	22 40 11 6	22 40 7 7	769	39	28	58	16	4	6	55	3	52	3	63
25	24	23 39 19 9	23 39 15 9	812	41	30	61	17	4	6	58	2	55	3	66
26	25	24 38 28 2	24 38 24 0	846	43	31	63	17	4	6	60	2	57	4	69
27	26	25 37 36 6	25 37 32 2	880	44	32	65	18	4	6	62	2	59	4	71
28	27	26 36 44 9	26 36 40 3	914	46	33	68	19	4	7	65	2	61	4	74
29	28	27 35 53 2	27 35 48 5	948	48	35	70	19	5	7	67	2	63	4	77
30	29	28 35 1 6	28 34 56 7	982	49	36	73	20	5	7	69	1	66	4	80
31	30	29 34 9 9	29 34 4 8	016	51	37	75	21	5	7	72	1	68	5	82
1	31	1 0 33 18 2	1 0 33 12 9	050	53	39	78	22	5	8	75	1	71	5	85

TAVOLA V. *Moti medj per l' Ore, Minuti e Secondi*

Ore	long. m^a. e Anom.	II	III	IV	V IX XI ⊙	min	long. m^a. e Anom.	min	lon. m^a. e Anom.	Sec.	long. m^a. e Anom.	Sec.	long. m^a. e A.
1	2′27″,8	1	0	0	0	1	0′ 2″,5	31	1′16″4	1	0″,0	31	1″3
2	4 55 7	3	0	0	0	2	4 9	32	18,8	2	1	32	1,3
3	7 23 5	4	0	0	0	3	7 4	33	21 3	3	1	33	4
4	9 51 4	6	0	0	0	4	9 9	34	23 8	4	2	34	4
5	12 19 2	7	0	0	0	5	12 3	35	26 2	5	2	35	4
6	14 47 1	8	0	0	1	6	14 8	36	28 7	6	2	36	5
7	17 14 9	9	0	0	1	7	17 2	37	31 2	7	3	37	5
8	19 42 8	11	1	0	1	8	19 7	38	33 6	8	3	38	6
9	22 10 6	12	1	0	1	9	22 2	39	36 1	9	4	39	6
10	24 38 5	14	1	0	1	10	24 6	40	38 6	10	4	40	6
11	27 6 3	15	1	0	1	11	27 1	41	41 0	11	5	41	7
12	29 34 2	17	1	0	1	12	29 6	42	43 5	12	5	42	7
13	32 2 0	18	1	0	1	13	32 0	43	46 0	13	5	43	8
14	34 29 9	20	1	0	1	14	34 5	44	48 4	14	6	44	8
15	36 57 7	21	1	0	1	15	37 0	45	50 9	15	6	45	8
16	39 25 6	23	1	1	2	16	39 4	46	53 3	16	7	46	9
17	41 53 4	24	1	1	2	17	41 9	47	55 8	17	7	47	9
18	44 21 2	25	1	1	2	18	44 4	48	58 3	18	7	48	2,0
19	46 49 1	26	2	1	2	19	46 8	49	2 0 7	19	8	49	0
20	49 16 9	28	2	1	2	20	49 3	50	3 2	20	8	50	1
21	51 44 8	29	2	1	2	21	51 7	51	5 7	21	9	51	1
22	54 12 6	31	2	1	2	22	54 2	52	8 1	22	9	52	1
23	56 40 5	32	2	1	3	23	56 7	53	10 6	23	9	53	2
24	59 8 3	34	3	1	3	24	59 1	54	13 1	24	1,0	54	2
						25	1 1 6	55	15 5	25	0	55	3
						26	4 1	56	18 0	26	1	56	3
						27	6 5	57	20 5	27	1	57	3
						28	9 0	58	22 9	28	1	58	4
						29	11 5	59	25 4	29	2	59	4
						30	13 9	60	27 8	30	2	60	5

TAVOLA VI. *Angolo φ per l' Equazione dell' Orbita Solare*. Arg. An. m. ⊙

Gr.	0ˢ − G.M.S.	Iˢ − G.M.S.	IIˢ − G.M.S.	IIIˢ − G.M.S.	IVˢ − G.M.S.	Vˢ − G.M.S.	Gr.
0	0 0 0	0 35 33	1 2 4	1 12 12	1 3 10	0 36 44	30
1	1 13	36 37	2 42	12 13	2 34	35 37	29
2	2 27	37 40	3 18	12 13	1 54	34 30	28
3	3 41	38 43	3 52	12 12	1 14	33 22	27
4	4 55	39 46	4 25	12 10	0 33	32 13	26
5	6 10	40 49	4 56	12 7	0 59 51	31 4	25
6	7 25	41 51	5 27	12 3	59 8	29 54	24
7	8 40	42 52	5 58	11 57	58 24	28 43	23
8	9 54	43 51	6 29	11 49	57 39	27 32	22
9	11 7	44 49	7 0	11 40	56 52	26 21	21
10	12 20	45 47	7 30	11 31	56 3	25 10	20
11	13 33	46 44	7 58	11 20	55 13	23 58	19
12	14 46	47 40	8 24	11 7	54 22	22 44	18
13	15 58	48 36	8 47	10 52	53 30	21 30	17
14	17 9	49 41	9 8	10 34	52 37	20 16	16
15	18 20	50 26	9 28	10 14	51 53	19 2	15
16	19 32	51 19	9 48	9 53	50 59	17 48	14
17	20 44	52 11	10 8	9 32	50 3	16 33	13
18	21 55	53 3	10 27	9 10	49 6	15 18	12
19	23 6	53 53	10 44	8 47	48 7	14 3	11
20	24 16	54 42	11 0	8 23	47 8	12 47	10
21	25 26	55 30	11 13	7 56	46 10	11 31	9
22	26 36	56 17	11 23	7 28	45 11	10 16	8
23	27 45	57 4	11 32	7 1	44 11	8 59	7
24	28 54	57 50	11 40	6 33	43 10	7 43	6
25	30 3	58 35	11 47	6 3	42 7	6 25	5
26	31 11	59 19	11 53	5 29	41 3	5 8	4
27	32 18	1 0 2	11 59	4 55	39 59	3 51	3
28	33 24	0 44	12 4	4 21	38 55	2 35	2
29	34 29	1 25	12 9	3 46	37 50	1 18	1
Gr.	XIˢ +	Xˢ +	IXˢ +	VIIIˢ +	VIIˢ +	VIˢ +	Gr.

log e = *log* Equazione del centro ⊙ (in secondi) = 3,8405326 + *log sen* (Anom. m. ⊙ + φ)

log Eq. *secolare* (in secondi) = 1,2760411 + *log sen* (An. m. ⊙ + φ) = *log e* − 2,5644915

L' Eq. del Centro ha sempre un segno stesso con φ. L' Eq. secolare lo ha contrario dopo il 1810, e deve sempre moltiplicarsi per $\frac{1}{100}$ degli Anni fra il 1810, e l'epoca data.

TAVOLA VII. *Equazioni che provengono dagli Argomenti* (in secondi d' arco)

N	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	☊
0	7,52	10,54	2,83	8,45	5,79	4,81	2,73	3,76	1,66	2,99	18,02
50	9 84	7 91	1 21	8 78	5 71	5 22	1 94	3 70	1 29	2 67	23 58
100	11 93	7 05	0 18	6 75	5 35	5 18	1 21	3 46	0 91	2 25	28 60
150	13 59	8 79	0 12	5 18	4 76	4 76	0 61	3 07	0 57	1 76	32 58
200	14 65	12 60	1 02	3 23	3 98	4 12	0 23	2 56	0 29	1 26	35 14
250	15 02	16 97	2 53	1 35	3 10	3 44	0 03	1 99	0 10	0 80	36 02
300	14 65	20 17	4 07	0 17	2 20	2 87	0 10	1 41	0 02	0 42	35 14
350	13 59	21 02	5 06	0 23	1 37	2 46	0 42	0 87	0 06	0 15	32 58
400	11 93	19 28	5 13	1 80	0 69	2 22	0 95	0 44	0 22	0 03	28 60
450	9 84	15 47	4 26	4 73	0 23	2 03	1 63	0 14	0 47	0 06	23 58
500	7 52	10 54	2 83	8 45	0 03	1 79	2 41	0 02	0 80	0 25	18 02
550	5 20	5 71	1 40	12 17	0 11	1 45	3 20	0 08	1 29	0 57	12 46
600	3 11	1 80	0 53	15 10	0 47	1 02	3 93	0 32	1 55	0 99	7 44
650	1 45	0 06	0 60	16 67	1 06	0 62	4 53	0 71	1 89	1 48	3 46
700	0 39	0 91	1 59	16 73	1 84	0 41	4 94	1 22	2 17	1 98	0 90
750	0 04	4 11	3 13	15 55	2 72	0 52	5 11	1 79	2 36	2 44	0 02
800	0 39	8 48	4 64	13 67	3 62	1 02	5 04	2 37	2 44	2 82	0 90
850	1 45	12 29	5 54	11 72	4 45	1 89	4 72	2 91	3 40	3 09	3 46
900	3 11	14 03	5 48	10 15	5 13	2 95	4 19	3 34	2 24	3 21	7 44
950	5 20	13 17	4 45	9 12	5 59	4 00	3 51	3 64	1 99	3 18	12 46

TAVOLA VIII. *Latitudine del* ⊙

N	VI−III	VI+III	V−VIII	II −⊙+☊
0	0″,20	0″,48	0″,32	0″,67
100	20	47	27	1 06
200	16	38	19	31
300	10	23	09	31
400	04	09	02	06
500	00	00	00	0 67
600	00	01	05	28
700	04	10	13	03
800	10	25	23	03
900	16	39	30	28

TAV. IX. *Effetti della Latitudine*

Sulla lon. e A. R. oss.

Iᶜ ⊙	0ˢ + 6 −	1ˢ + 7 −	2ˢ + 8 −	Iᶜ ⊙
0	0″,40	0″,34	0″,20	30
100	0 39	0 31	0 14	20
200	0 36	0 26	0 07	10
Iᶜ ⊙	11ˢ + 5 −	10ˢ + 4 −	9ˢ + 3 −	Iᶜ ⊙

sulla dᶜ.oᵃ.

Declinaz. ⊙	Effetto −
0°	0″,92
9	0 92
18	0 96
24	1 00

Gli Effetti si moltᵒ. per la lat. del ⊙

TAVOLA X. *Moti Orarj e Semidiametro del Sole (in secondi d'arco)*

	Moto orario in long. Arg. An. m. ⊙ Cost + 143			Moto orario in long. Arg long. ⊙ Cost + 142			Moto or. in A. R. Arg. lon. v. ⊙ Cost. + 135			Moto orario in Decl. Arg. longit. v. ⊙			Semidiametro Cost + 945,5		
	0°	10°	20°	0°	10°	20°	0°	10°	20°	0°	10°	20°	0°	10°	20°
O'	0,00	0,06	0,27	5,79	4,92	4,07	1,69	1,55	2,67	59,23	58,13	55,55	0,10	0,23	0,91
I	0 61	1 07	1 65	3 24	2 45	1 76	4 88	8 00	11 61	51 43	45 89	38 89	2 03	3 56	5 26
II	2 33	3 08	3 90	1 15	0 66	0 30	15 29	18 44	20 53	30 57	21 09	10 77	7 67	10 15	12 82
III	4 75	5 62	6 47	0 08	0 99	0 08	21 18	20 22	17 84	0 00	10 75	21 01	15 60	18 42	21 18
IV	7 29	8 03	8 68	0 30	0 66	1 15	14 40	10 50	6 71	30 39	38 60	45 47	23 80	26 18	28 28
V	9 21	9 60	9 85	1 76	2 46	3 24	3 45	1 17	0 00	50 92	54 92	57 47	29 99	31 25	32 03
VI	9 93	9 85	9 60	4 07	4 92	5 79	0 12	2 56	4 28	58 55	58 13	56 18	32 29	32 03	31 25
VII	9 21	8 68	8 03	6 63	7 42	8 14	8 11	12 87	18 07	52 64	47 45	40 61	29 99	28 28	26 18
VIII	7 29	6 47	5 62	8 76	9 26	9 64	23 21	27 62	30 66	32 18	22 35	11 47	23 80	21 18	18 42
IX	4 75	3 92	3 08	9 86	9 94	9 86	31 84	30 99	29 26	0 00	11 49	22 44	15 60	12 82	10 15
X	2 33	1 65	1 07	9 63	9 26	8 76	24 12	19 21	14 18	32 36	40 91	47 88	7 67	5 46	3 56
XI	0 61	0 27	0 06	8 14	7 44	6 64	9 55	5 80	3 14	53 17	56 80	58 81	2 03	0 91	0 23

TAVOLA XI. *Equazion generale per il mezzodì e per la mezzanotte conclusa dalle altezze corrispondenti del Sole*

Argomento, metà dell' intervallo

Ore	Angolo α	Diff. per 1'	Angolo β —	Diff. per 1'	Ore	Angolo α	Diff. per 1'	Angolo β +	Diff. per 1'
1	45° 0'	1',0	12° 10'	0',8	6	57° 13'	4',7	0° 0	6,2
2	46 0	1 7	11 20	1 5	7	61 55	5 4	6 11	8 7
3	47 40	2 4	9 50	2 2	8	67 18	5 8	14 52	12 6
4	50 5	3 2	7 36	3 2	9	73 7	5 9	27 27	17 5
5	53 15	4 0	4 25	4 4	10	79 4		45 0	

Argomento, longitudine vera ⊙ (secondi di tempo)

Gr.	O'	I'	II'	III'	IV'	V'	VI'	VII'	VIII'	IX'	X'	XI'	Gr.
	a —	a —	a —	a +	a +	a +	a +	a +	a +	a —	a —	a —	
0	15,26	13,25	7,87	00,0	7,83	13,12	15,08	13,56	8,29	0,00	8,34	13,70	0
10	14 97	11 82	5 43	2 77	9 94	14 15	14 97	12 22	5 76	2 97	10 54	14 63	10
20	14 30	10 02	2 77	5 41	11 71	14 80	14 47	10 46	2 95	5 78	13,33	15 15	20
	b —	b —	b —	b +	b +	b +	b —	b —	b —	b +	b +	b +	
0	0, 00	12, 07	12,92	0,00	12,89	11,95	0,00	12,35	13,65	0,00	13,73	12,47	0
10	4 65	14 03	9 83	5 29	14 27	8 72	4 65	14 51	10 41	5 66	15 13	9 02	10
20	8 81	14 38	5 30	9 79	13 90	4 60	8 92	15 02	5 64	10 46	14 64	4 71	20

l 1ª Parte $= l$ *tang* $\alpha + l$ *tang* lat. $+ l\,a$
l 2ª Parte $= l$ *tang* $\beta + l\,b$
} Si cangi il segno ad *a* per mezzodì / mezzanotte se la lat. è Austr. / Boreal.

TAVOLA XII. *Obliquità dell' Eclittica*

Obliquità media al Solstizio di Estate dell' anno 1809 23° 27′ 52″, 3
Diminuzione per 10 anni . . . . 5 ,21

Equazioni per l' obliquità apparente (in secondi d' arco)

Equazione I. Arg. ☊

☊	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
0	19,10	17,28	12,50	6,60	1,82	0,00	1,82	6,60	12,50	17,28
50	18 63	15 16	9 55	3 94	0 47	0 47	3 94	9 55	15 16	18 63

Equazione II. Arg. long. v. ⊙

Gr	0'6'	1'7'	2'8'	3'9'	4'10'	5'11'
0	0,87	0,65	0,22	0,00	0,22	0,65
15	0 81	0 43	0 06	0 06	0 43	0 81

Si tolgano dalla prima Equazione 9″,55, dalla seconda 0″,43

Tipo figurato del Calcolo completo di un luogo del Sole per il dì 28 Maggio 1809 a 11^or 42′ 8″,17 tempo medio a Firenze.

Tempo dato	11^or 42′ 8″,17
Longitudine dell' Osservatorio di Firenze . . .	− 35 42
Tempo ridotto al meridiano delle Tavole . .	11^or 6′ 26″,17

Epoca	long. media ⊙	Arg. I. An. media ⊙	Ar. II	Ar. III	Ar. IV	Ar. V	Ar. VI	Ar. VII	Ar. VIII	Ar. IX	Ar. X	Ar. XI	Ar. ☊	⊙
A. 1809	9^s 9° 43′ 19″,7	6^s 0° 5′ 0″,1	462	755	846	290	234	585	985	989	712	303	391	778
magg.	3 28 16 39 6	3 28 16 19 2	064	205	152	301	83	21	28	288	961	273	17	329
28 gio.	0 27 35 53 2	0 27 35 48 5	948	48	35	70	19	5	7	67	992	63	4	77
11 ore	27 6 3	27 6 3	15	1		1				1		1		1
6 min.	14 8	14 8												
26,2 sec.	1 1	1 1												
	2 6 3 14 7	10 26 24 30 0	489	009	033	662	336	611	020	345	665	640	412	185
		= 10 26 24 5 = 10^s 26°,41												

Ang. φ (T. Sol. VI) = + 0^s 0° 39′ 20″,2

An. m^a. corr. = An.
m^a + φ . . . = 10 27 3 50 2 = 327° 3′ 50″,2
l sen (An. m^a. + φ) = 9,7353615
+ log Costante . . = + 3,8405326
l Eq dell'orb. = l e = 3,5758941 = l + 3766″,1
= l + 1° 2′ 46″,1
− log Costante . . . = 2,5644915
log Eq. Secolare . . = 1,0114026 = l − 10,266

Distanza dell'Epoca data al 1° Gen. 1810 = − 0,597
Variazione = − 0,597 × − 10,266 × 0,01 = + 0″,06
Eq. dell' orbita corretta della variaz. = 1° 2′ 46″,16

EQUAZIONI
in tutti i casi positive

II	8″,03
III	10 07
IV	1 76
V	16 68
VI	1 60
VII	0 94
VIII	2 41
IX	0 92
X	1 97
XI	1 38
☊	27 40
Long. media ⊙ . . =	2^s 6° 3′ 14″,7
Somma . . . . . . =	2 6 4 27 86
Costante negativ. =	− 1
Differenza . . . =	2 6 3 27 86
Eq. dell'orb. corr. =	+ 1 2 46 16
Lon. vera ⊙ = λ =	2^s 7° 6′ 14″,02

Latitudine Solare

Argomenti		Eq.
VI − III	327	0″,08
VI + III	345	0 17
V − VIII	642	0 08
II + ⊙ + ☊	86	1 01
Somma =		1 34
Corr. neg. =		− 1 18
Latitudine =		+ 0 16B

Moti orarj e Semidiametro

Mot. or. { in long. = 2′ 23″,79
in A.R. = 2 32 32
in Decl. = 0 23 84 }
Semidiametro = 15 48 08

Equazione delle Altezze corrispondenti.

Si supponga l' intervallo di 6^or 22′

α . . . . = 48° 6′	a = − 6″,14
β . . . . = 9 26	b = − 10 73
l tang α = 0,04709	l tang β = 9,22049
l tang lat = 9 98147	l b . . . = 1 03060
l a . . . . = 0 78817	l 2^a p^e. = 0,25109
l 1^a parte = 0,81673	= l + 1,78
= l − 6,56	1^a p^e. = − 6 56
	Equaz. cercata = − 4″,78

Obliquità dell' Eclitt. = O

Obliq. media il dì 20. Giugno 1809 . = 23° 27′ 52″,3
Var. per 23^g = + 0 03
Equaz. I. . = − 8 05
Equaz. II. = − 0 28
O . . . . . . = 23 27 44 ,00

Declinazione ⊙ = δ

l sen λ = 9,9643595
l sen O = 9 6000405
l sen δ = 9,5644000
δ = 21° 31′ 0″,8

Ascensione Retta ⊙ = A

l tang λ . . = 10,3743414
l cos O . . = 9 9625122
l tang A . . = 10,3368536
A . . . . = 2^s 5° 16′ 41″,2

Eq. del Tempo.

A . . = 2^s 5° 16′ 41″,2
λ . . = 2 6 3 14,7
Diff. = − 46 33 ,5
in t° = − 3′ 6″,1
= equaz. cercata.

T A V O L E   L U N A R I

TAVOLA I^a. *Epoche*

Anni	Long. media ☾	Arg. A	Arg. B A. m. ☉	Arg. C An. m. ☾	Arg. D	Arg. E Suppl. ☊	Arg. F
1804 B	4ˢ 26 21 17,3	628,96[illegible]	501,051	828,5236	492,291	122,9725	903,094
1805	9 5 44 22 3	989 026	500 339	074 7787	942 126	176 2003	953 121
1806	1 15 7 26 9	349 091	499 627	321 2291	335 220	229 8911	006 147
1807	5 24 30 31 5	709 155	498 915	567 6792	768 315	283 5820	059 174
1808 B	10 17 4 11 1	103 087	500 945	850 4207	181 410	337 4197	115 087
1809	2 26 27 15 7	463 151	500 233	096 8713	631 245	391 1104	163 114
1810	7 5 50 20 3	823 215	499 521	343 3215	044 340	444 8012	221 141
1811	11 15 13 25 0	183 279	498 809	589 7718	457 435	498 4920	274 168
1812 B	4 7 47 4 6	577 211	500 839	872 5136	870 530	552 3296	330 031
1813	8 17 10 9 4	937 276	500 127	118 9639	320 365	606 0204	383 108
1814	0 26 33 14 1	297 340	499 415	365 4143	733 460	659 7112	436 135
1815	5 5 56 18 7	657 404	498 703	611 8644	146 555	713 4020	489 162
1816 B	9 28 29 58 3	031 336	500 733	894 6065	559 649	767 2398	546 074
1817	2 7 53 3 0	411 400	500 021	141 0568	009 484	820 9306	598 101
1818	6 17 16 7 8	771 465	499 309	387 5071	422 579	874 6212	651 128
1819	10 26 39 12 6	131 529	498 597	633 9575	835 674	928 3120	704 155
1820 B	3 19 12 52 2	525 461	500 627	916 6996	248 769	982 1498	760 068
1821	7 28 35 37 0	885 525	499 915	163 1498	698 604	035 8404	813 096
1822	0 7 59 1 7	245 589	499 203	409 6002	111 699	089 5313	866 122
1823	4 17 22 6 7	605 654	498 491	656 0507	524 793	143 2220	919 148
1824 B	9 9 55 46 4	999 586	500 521	938 7927	937 888	197 0597	975 061
1825	1 19 18 51 1	359 650	499 809	185 2432	387 723	250 7505	025 088
1826	5 28 41 55 9	719 714	499 097	431 6936	800 818	304 4412	081 115
1827	10 8 5 0 7	079 778	498 385	678 1445	213 913	358 1319	134 142
1828 B	3 0 38 40 3	473 711	500 415	960 8866	627 007	411 9696	190 054
1829	7 10 1 45 3	833 775	499 703	207 3374	076 842	465 6597	243 081
1830	11 19 24 50 1	193 839	498 991	453 7879	489 937	519 3512	296 108
1831	3 28 47 54 9	553 903	498 279	700 2383	903 032	573 0418	349 135
1832 B	8 21 21 34 7	947 835	500 309	982 9804	316 127	626 8796	405 048
1833	1 0 44 39 7	307 900	499 597	229 4310	765 962	680 5705	458 075
1834	5 10 7 44 6	667 964	498 885	475 8816	179 057	734 2610	511 102
1835	9 19 30 49 4	028 028	498 173	722 3321	592 152	787 9519	564 129
1836 B	2 12 4 29 3	421 960	500 203	005 0745	005 246	841 7895	620 041
1837	6 21 27 34 4	782 024	499 491	251 5252	455 081	895 4804	673 068
1838	11 0 50 39 3	142 089	498 779	497 9758	868 176	949 1710	726 095
1839	3 10 13 44 5	502 153	498 067	744 4264	281 271	002 8680	779 122
1840 B	8 2 47 24 4	896 085	500 097	027 1687	694 366	056 6995	835 035
1841	0 12 10 29 6	256 149	499 385	273 6194	144 201	110 5901	888 062
1842	4 21 33 34 6	616 214	498 673	520 0702	557 296	164 0810	941 089
1843	9 0 56 39 7	976 278	497 961	766 5210	970 390	217 7712	994 115
1844 B	1 23 30 19 6	370 210	499 991	049 2634	383 485	271 6092	050 028
1845	6 2 53 24 7	730 274	499 279	295 7145	833 320	325 3001	103 055
1846	10 12 16 29 8	090 339	498 567	542 1651	246 415	878 9909	156 082
1847	2 21 39 35 0	450 403	497 855	788 6159	659 510	432 7278	209 109
1848 B	7 14 13 15 1	844 335	499 885	071 3583	072 604	486 5192	265 021
1849	11 23 36 20 3	204 400	499 173	317 8092	522 439	540 2100	318 048
1850	4 2 59 25 5	564 464	498 461	564 2602	935 534	593 9006	371 075
1851	8 12 22 30 7	924 528	497 749	810 7111	348 629	647 5915	424 102
1852 B	1 4 56 11 0	318 460	499 779	093 4551	761 724	701 4291	480 015
1853	5 14 19 16 3	678 525	499 067	339 9046	211 658	755 1198	533 041
1854	9 23 42 21 5	038 589	498 355	586 3555	624 653	808 8106	586 068
1855	2 3 5 26 8	398 653	497 643	832 8065	037 748	862 5012	639 095
1856 B	6 25 39 7 6	792 585	499 673	115 5491	450 843	916 3388	693 008

TAVOLA II. *Estensione della Tavola I. precedente ad un maggior numero di anni*

1ª. *Parte*. Epoche.

Anni	Long. media ☾	Arg. A	Arg. B A.m. ☉	Arg. C An.m. ☾	Arg. D	Arg. E Suppl. ☊	Arg. F
1603	4ˢ 14° 23′ 10″,6	596,550	509,810	513,5718	696,732	323,4444	100,187
1703	2 9 5 18 8	415 786	504 415	029 5625	887 967	696 0611	472 187
1803	0 3 47 27 0	235 022	499 021	545 5532	079 202	068 6780	844 187
1903	9 28 29 35 2	054 258	493 627	061 5437	270 437	441 2948	216 187

Per gli anni 1600, 1601, 1602; 1700, 1701, 1702; 1800, 1801, 1802; ec. si tolgano

dalla Long.	dagli Argomenti A	B	C	D	E	F
13°10′35″,0	033,864	002,737	036,2917	036,747	000,1471	002,884

2ª. *Parte*. Costanti da moltiplicarsi per il quoziente $\frac{i}{4}$ (*i* è il numero degli anni dopo il 1700)

Long. m. ☾	Argomenti A	B	C	D	E	F
5ˢ20°42′54″,533	474,124	999,894	022,091294	689,120	214,910546	214,994

3ª. *Parte*. Costanti da sommarsi.

Resto	Long. mª. ☾	Arg. A	Arg. B A.m. ☉	Arg. C A.m. ☾	Arg. D	Arg. E Suppl. ☊	Arg. F
1	4ˢ 22° 33′ 39″,9	393,928	002,031	282,7419	449,837	053,8380	055,910
2	9 1 56 44 7	753 993	001 318	529 1915	862 931	107 5287	108 937
3	1 11 19 49 6	114 057	000 605	775 6414	276 025	161 2196	161 964

4ª. *Parte*. *log*. dell' Equazioni Secolari

log Eq. *long* m. = 7,00782 + 2 *log i*
log Eq. *Arg* A = 3,89521 + 2 *log i*
log Eq. *Arg* C = 4,49733 + 2 *log i*
log Eq. *Arg* {D, E, F} = 3,76177 + 2 *log i*

L' Equazioni Secolari della *long*. e della *Anom*. sono positive posteriormente al 1700, e negative anteriormente. Quella del Nodo è negativa nel primo caso, positiva nel secondo.

5ª. *Parte*. Eq. a lungo periodo

Arg. (*long* m. ☾ − C°) − 2E° − 3 (*long* m. ☉ − B°).

Gr	0ˢ+ 6−	1ˢ+ 7−	2ˢ+ 8−	Gr
0	0″,0	7″,0	12″,1	30
10	2 4	9 0	13 2	20
20	4 8	10 7	13 8	10
Gr	5ˢ+ 11−	4ˢ+ 10−	3ˢ+ 9−	Gr

TAVOLA III. *Moti medj per i mesi*.

Mesi	Long. mª. ☾	Arg. A	Arg. B	Arg. C	Arg. D	Arg. E	Arg. F
Gennajo	0ˢ 0° 0′ 0″0	000,000	000,000	000,0000	000,000	000,0000	000,000
Febbrajo	1 18 28 5,8	049 758	084 870	125 0409	139 196	004 5600	089 434
Marzo	1 27 24 26 6	997 927	161 526	141 2070	168 145	008 6787	170 214
Aprile	3 15 52 32 4	047 688	246 399	266 2494	307 336	013 2388	259 652
Maggio	4 21 10 3 2	063 681	328 532	354 9972	409 782	017 6517	346 201
Giugno	6 9 38 9 1	113 340	413 401	480 0382	548 978	022 2118	435 635
Luglio	7 14 55 39 9	129 238	495 536	568 7875	651 423	026 6248	522 184
Agosto	9 3 23 45 7	178 996	580 409	693 8284	790 615	031 1848	611 620
Settembre	10 21 51 51 6	228 756	665 281	818 8693	929 813	035 7449	701 057
Ottobre	11 27 9 22 4	244 652	747 412	907 6187	032 259	040 1578	787 607
Novembre	1 15 37 28 2	294 409	832 282	032 6597	171 450	044 7178	877 040
Dicembre	2 20 54 59 0	310 305	914 416	121 4089	273 897	049 1307	963 590

TAVOLA IV. *Moti medj per i Giorni.*

Anno Com.	Bis.	long. media ☾	Arg. A	Arg. B	Arg. C	Arg. D	Arg. E	Arg. F
0	1	0ˢ 0° 0′ 0″0	000,000	00,000	000,0000	000,000	0,0000	00,000
1	2	0 13 10 35,0	033 864	02 737	036 2917	036 747	0 1471	02 884
2	3	0 26 21 10 1	067 727	05 474	072 5833	073 495	0 2942	05 768
3	4	1 9 31 45 1	101 587	08 212	108 8749	110 245	0 4413.	08 652
4	5	1 22 42 20 1	135 452	10 950	145 1666	146 991	0 5884	11 538
5	6	2 5 52 55 1	169 313	13 688	181 4582	183 740	0 7355	14 425
6	7	2 19 3 30 2	203 178	16 426	217 7498	220 488	0 8826	17 310
7	8	3 2 14 5 2	237 042	19 164	254 0415	257 236	1 0297	20 194
8	9	3 15 24 40 2	270 904	21 902	290 3333	293 985	1 1768	23 078
9	10	3 28 35 15 3	304 768	24 640	326 6248	330 733	1 3239	25 963
10	11	4 11 45 50 3	338 632	27 377	362 9164	367 481	1 4710	28 848
11	12	4 24 56 25 3	372 496	30 116	399 2003	404 228	1 6181	31 732
12	13	5 8 7 0 3	406 356	32 854	435 4997	440 978	1 7652	34 619
13	14	5 21 17 35 4	440 222	35 591	471 7914	477 728	1 9123	37 508
14	15	6 4 28 10 4	474 082	38 329	508 0830	514 474	2 0594	40 390
15	16	6 17 38 45 4	507 947	41 066	544 3748	551 222	2 2057	43 273
16	17	7 0 49 20 4	541 809	43 804	580 6663	587 970	2 3536	46 160
17	18	7 13 59 55 5	575 673	46 542	616 9579	624 718	2 5007	49 042
18	19	7 27 10 30 5	609 636	49 280	653 2496	661 466	2 6478	51 929
19	20	8 10 21 5 5	643 400	52 019	689 5412	698 214	2 7948	54 813
20	21	8 23 31 40 5	677 265	54 758	725 8328	734 962	2 9420	57 699
21	22	9 6 42 15 6	711 125	57 495	762 1245	771 710	3 0891	60 585
22	23	9 19 52 50 6	744 990	60 232	798 4161	808 460	3 2362	63 471
23	24	10 3 3 25 6	778 853	62 969	834 7078	845 207	3 3833	66 354
24	25	10 16 14 0 6	812 715	65 706	870 9995	881 956	3 5303	69 237
25	26	10 29 24 35 6	846 580	68 442	907 2911	918 705	3 6775	72 121
26	27	11 12 35 10 7	880 442	71 180	943 5827	955 451	3 8245	75 008
27	28	11 25 45 45 7	914 304	73 918	979 8744	992 199	3 9717	77 895
28	29	0 8 56 20 7	948 169	76 656	016 1660	028 948	4 1188	80 779
29	30	0 22 6 55 7	982 033	79 394	052 4576	065 697	4 2658	83 663
30	31	1 5 17 30 8	015 894	82 132	088 7493	102 446	4 4130	86 548
31	1	1 18 28 5 8	049 758	84 870	125 0409	139 196	4 5600	89 434

TAVOLA V. *Moti medj per le Ore.*

Ore	long media ☾	Arg. A	Arg. B	Arg. C	Arg. D	Arg. E	Arg. F
1	0°32′56″,5	1,412	0,114	1,5121	1,531	0,0061	0,121
2	1 5 52 9	2 823	0 228	3 0243	3 063	0 0123	0 241
3	1 38 49 4	4 234	0 343	4 5364	4 592	0 0184	0 362
4	2 11 45 8	5 645	0 458	6 0486	6 124	0 0245	0 480
5	2 44 42 3	7 055	0 572	7 5607	7 654	0 0306	0 601
6	3 17 38 8	8 466	0 686	9 0729	9 187	0 0368	0 721
7	3 50 35 2	9 877	0 800	10 5849	10 717	0 0429	0 841
8	4 23 31 7	11 289	0 914	12 0972	12 249	0 0491	0 961
9	4 56 28 1	12 698	1 028	13 6093	13 780	0 0552	1 081
10	5 29 24 6	14 108	1 142	15 1215	15 312	0 0613	1 202
11	6 2 21 1	15 520	1 256	16 6336	16 843	0 0674	1 322
12	6 35 17 5	16 930	1 370	18 1458	18 374	0 0735	1 442
13	7 8 14 0	18 342	1 484	19 6579	19 905	0 0796	1 562
14	7 41 10 4	19 753	1 598	21 1701	21 436	0 0858	1 682
15	8 14 6 9	21 163	1 712	22 6822	22 967	0 0919	1 802
16	8 47 3 4	22 574	1 826	24 1944	24 498	0 0981	1 922
17	9 19 59 8	23 985	1 940	25 7065	26 029	0 1042	2 042
18	9 52 56 3	25 397	2 054	27 2187	27 560	0 1103	2 162
19	10 25 52 7	26 806	2 168	28 7309	29 091	0 1164	2 282
20	10 58 49 2	28 217	2 284	30 2431	30 623	0 1226	2 403
21	11 31 45 7	29 629	2 398	31 7552	32 154	0 1287	2 523
22	12 4 42 1	31 039	2 512	33 2674	33 685	0 1349	2 643
23	12 37 38 6	32 450	2 623	34 7795	35 216	0 1410	2 763

d

TAVOLA VI. *Mesi medj per i Minuti e Secondi*

Min.	long.m^a. ☾	A	B	C	D	E	F	Sec.	lon.m^a.	A.C.D.	E
1	0′32″,9	0,024	0,002	0,0252	0,026	0,0001	0,002	1	0″,5	0,0004	0,0000
2	1 5 9	048	04	0504	051	02	04	2	1 1	09	0
3	1 38 8	071	06	0756	077	03	06	3	1 6	13	0
4	2 11 8	095	08	1008	102	04	08	4	2 2	17	0
5	2 44 7	118	10	1260	128	05	10	5	2 7	21	0
6	3 17 6	142	11	1512	153	06	12	6	3 3	25	0
7	3 50 6	166	13	1764	179	07	14	7	3 8	29	0
8	4 23 5	190	16	2016	204	09	16	8	4 4	34	0
9	4 56 5	213	18	2269	230	10	18	9	4 9	38	0
10	5 29 4	236	19	2521	255	10	20	10	5 5	42	0
11	6 2 4	260	21	2773	281	11	22	11	6 0	46	0
12	6 35 3	283	23	3025	306	12	24	12	6 6	50	0
13	7 8 2	307	25	3277	331	13	26	13	7 1	55	0
14	7 41 2	330	27	3529	357	14	28	14	7 7	59	0
15	8 14 1	354	29	3781	383	15	30	15	8 2	63	0
16	8 47 1	378	30	4033	408	16	32	16	8 8	67	0
17	9 20 0	401	32	4285	433	17	34	17	9 3	72	0
18	9 52 9	425	34	4537	459	18	36	18	9 9	76	0
19	10 25 9	448	36	4789	484	19	38	19	10 4	80	0
20	10 58 8	471	38	5041	510	20	40	20	11 0	84	0
21	11 31 8	495	40	5292	535	21	42	21	11 5	88	0
22	12 4 7	518	42	5544	561	22	44	22	12 1	93	0
23	12 37 6	542	44	5796	586	23	46	23	12 6	96	0
24	13 10 6	565	46	6048	612	24	48	24	13 2	101	0
25	13 43 5	589	47	6300	637	25	50	25	13 7	05	0
26	14 16 5	613	49	6553	663	26	52	26	14 3	09	0
27	14 49 4	636	51	6805	688	27	54	27	14 8	13	0
28	15 22 3	660	53	7057	714	28	56	28	15 4	17	0
29	15 55 3	683	55	7309	739	29	58	29	15 9	22	0
30	16 28 2	706	57	7561	765	30	60	30	16 5	26	1
31	17 1 2	730	59	7813	790	31	62	31	17 0	30	1
32	17 34 1	753	61	8065	816	32	64	32	17 6	34	1
33	18 7 1	777	63	8317	841	33	66	33	18 1	39	1
34	18 40 0	800	65	8569	867	34	68	34	18 7	43	1
35	19 12 9	824	66	8821	892	35	70	35	19 2	47	1
36	19 45 9	848	68	9073	918	36	72	36	19 8	51	1
37	20 18 8	871	70	9325	943	37	74	37	20 3	55	1
38	20 51 8	895	72	9577	969	38	76	38	20 9	60	1
39	21 24 7	918	74	9829	994	39	78	39	21 4	64	1
40	21 57 6	942	76	1,0081	1,020	40	80	40	22 0	68	1
41	22 30 6	966	78	0333	045	41	82	31	22 5	72	1
42	23 3 5	989	80	0585	071	42	84	42	23 0	76	1
43	23 36 5	1,013	82	0837	096	43	86	43	23 6	81	1
44	24 9 4	036	84	1089	122	44	88	44	24 1	84	1
45	24 42 3	060	86	1341	147	45	90	45	24 7	89	1
46	25 15 3	084	87	1593	173	46	92	46	25 3	93	1
47	25 48 2	107	89	1845	198	47	94	47	25 8	97	1
48	26 21 2	131	91	2097	224	48	96	48	26 3	202	1
49	26 54 1	154	93	2349	249	49	98	49	26 9	05	1
50	27 27 0	178	95	2601	275	50	100	50	27 5	15	1
51	28 0 0	202	97	2853	300	51	02	51	28 0	14	1
52	28 32 9	225	99	3105	326	52	04	52	28 5	18	1
53	29 5 9	249	101	3357	351	53	06	53	29 1	23	1
54	29 38 8	272	103	3609	377	54	08	54	29 6	27	1
55	30 11 8	296	105	3862	402	55	10	55	30 2	31	1
56	30 44 7	320	106	4114	428	56	12	56	30 7	35	1
57	31 17 6	343	108	4366	453	57	14	57	31 3	39	1
58	31 50 6	367	110	4618	479	58	16	58	31 8	45	1
59	32 23 5	389	112	4870	504	59	18	59	32 4	48	1

TAVOLA VII *Equazioni di Longitudine* (in secondi d'arco)

I

N	0 +	100 +	200 +	300 +	400 +	N
0	00,0	389,2	635,4	642,4	400,5	100
5	20 7	406 0	641 9	635 9	383 1	95
10	41 4	422 4	647 8	628 7	365 3	90
15	62 0	438 4	653 1	620 9	347 2	85
20	82 7	453 9	657 7	612 5	328 7	80
25	103 2	469 0	661 7	603 4	309 8	75
30	123 7	483 7	665 0	593 7	290 6	70
35	144 0	497 9	667 7	583 4	271 1	65
40	164 2	511 7	669 7	572 5	251 4	60
45	184 2	525 0	671 1	561 1	231 4	55
50	204 0	537 8	671 8	549 1	211 1	50
55	223 7	550 1	671 8	536 6	190 6	45
60	243 2	561 8	671 2	523 5	169 9	40
65	262 4	573 0	669 9	509 9	149 1	35
70	281 3	583 6	668 0	495 7	128 1	30
75	300 0	593 7	665 4	481 0	106 9	25
80	318 5	603 2	662 1	465 8	85 6	20
85	336 7	612 1	658 2	450 1	64 3	15
90	354 5	620 6	653 6	434 0	42 9	10
95	372 0	628 3	648 3	417 5	21 5	5
100	389 2	636 4	642 4	400 5	00 0	0
N	900 −	800 −	700 −	600 −	500 −	N

II — III

N	II 0 −	II 100 −	II 200 −	II 300 −	II 400 −	III 0 −	III 100 −	III 200 ∓	III 300 +	III 400 +	N
0	0,0	0,4	3,1	6,2	5,3	0,0	2,8	0,4	[illegible]	5,9	100
20	0 0	0 7	3 8	6 4	4 6	0 8	2 8	0 8	5 9	5 1	80
40	0 0	1 2	4 5	6 5	3 6	1 5	2 5	2 0	6 3	4 1	60
60	0 1	1 8	5 2	6 3	2 5	2 1	1 9	3 2	6 5	2 9	40
80	0 2	2 4	5 8	5 9	1 2	2 6	1 2	4 3	6 4	1 5	20
100	0 4	3 1	6 2	5 3	0 0	2 8	0 4	5 2	5 9	0 0	0
N	900 +	800 +	700 +	600 +	500 +	900 +	800 +	700 ±	600 −	500 −	N

IV

N	0 −	100 −	200 ∓	300 +	400 +	N
0	0,0	43,2	14,1	54,8	68,3	100
10	6 0	43 9	7 5	60 0	64 5	90
20	11 9	43 8	0 5	64 5	59 8	80
30	17 6	42 9	6 7	68 2	54 3	70
40	22 9	41 1	14 0	71 1	48 0	60
50	27 8	38 4	21 4	73 1	41 0	50
60	32 2	34 9	28 7	74 1	33 [illegible]	40
70	36 0	30 7	35 8	74 1	25 5	30
80	39 1	25 8	42 6	73 2	17 2	20
90	41 5	20 2	49 0	71 2	8 7	10
100	43 2	14 1	54 8	68 3	0 0	0
N	900 +	800 +	700 ±	600 −	500 −	N

V

N	0 −	100 −	200 −	300 −	400 −	N
0	00,0	2805,0	4572,3	4613,9	2872,4	100
1	30 0	2829 4	4581 9	4604 7	2847 7	99
2	59 9	2853 7	4591 4	4595 4	2822 8	98
3	89 8	2877 9	4600 7	4585 9	2797 8	97
4	119 7	2901 9	4609 8	4576 2	2772 7	96
5	149 5	2925 8	4618 7	4566 4	2747 5	95
6	179 4	2949 6	4627 4	4556 4	2722 [illegible]	94
7	209 3	2973 3	4635 9	4546 2	2696 8	93
8	239 1	2996 8	4644 3	4535 8	2671 [illegible]	92
9	269 0	3020 3	4652 5	4525 2	2645 [illegible]	91
10	298 8	3043 7	4660 5	4514 4	2619 8	90
11	328 7	3067 0	4668 3	4503 4	2593 9	89
12	358 5	3090 1	4676 0	4492 3	2567 9	88
13	388 3	3113 1	4683 5	4481 0	2541 8	87
14	418 1	3136 0	4690 8	4469 6	2515 [illegible]	86
15	447 9	3158 8	4697 9	4458 0	2489 [illegible]	85
16	477 7	3181 5	4704 8	4446 2	2463 0	84
17	507 4	3204 0	4711 5	4434 2	2436 6	83
18	537 1	3226 3	4718 1	4422 0	2410 0	82
19	566 8	3248 5	4724 5	4407 6	2383 [illegible]	81
20	596 5	3270 6	4730 7	4397 0	2356 5	80
21	626 1	3292 6	4736 7	4384 3	2329 7	79
22	655 7	3314 6	4742 5	4371 4	2302 8	78
23	685 3	3336 3	4748 2	4358 3	2275 7	77
24	714 9	3358 0	4753 7	4345 1	2248 5	76
25	744 5	3379 5	4759 0	4331 7	2221 2	75
N	900 +	800 +	700 +	600 +	500 +	N

N	0 −	100 −	200 −	300 −	400 −	N
26	774,0	3400,9	4764,2	4318,1	2193,8	74
27	803 5	3422 1	4769 1	4304 3	2166 3	73
28	833 0	3443 2	4773 8	4290 3	2138 8	72
29	862 5	3464 2	4778 3	4276 1	2111 2	71
30	891 9	3485 1	4782 6	4261 8	2083 5	70
31	921 3	3505 8	4786 7	4247 3	2055 7	69
32	950 6	3526 4	4790 6	4232 7	2027 8	68
33	979 9	3546 9	4794 4	4217 9	1999 8	67
34	1009 2	3567 2	4798 0	4202 9	1971 8	66
35	1038 4	3587 4	4801 3	4187 8	1943 7	65
36	1067 6	3607 5	4804 4	4172 5	1915 5	64
37	1096 8	3627 4	4807 4	4157 0	1887 2	63
38	1125 9	3647 1	4810 2	4141 5	1858 9	62
39	1155 0	3666 7	4812 8	4125 4	1830 5	61
40	1184 0	3686 2	4815 3	4109 3	1802 0	60
41	1213 0	3705 5	4817 6	4093 1	1773 5	59
42	1241 9	3724 7	4819 7	4076 8	1744 9	58
43	1270 8	3743 8	4821 6	4060 4	1716 2	57
44	1299 6	3762 8	4823 3	4043 9	1687 4	56
45	1328 4	3781 6	4824 8	40[illegible]7 2	1658 5	55
46	1357 1	3800 3	4826 1	4010 3	1629 6	54
47	1385 8	3818 8	4827 2	3993 2	1600 6	53
48	1414 5	3837 2	4828 2	3975 9	1571 6	52
49	1443 1	3855 4	4829 0	3958 4	1542 5	51
50	1471 6	3873 4	4829 5	3940 8	1513 3	50
51	1500 1	3891 5	4829 8	3923 0	1484 0	49
N	900 +	800 +	700 +	600 +	500 +	N

Segue la TAVOLA VII. *Equazioni di Longitudine* (in secondi d'arco)

Segue l' Equazione V

N	0 −	100 −	200 −	300 −	400 −	N
52	1528,5	3909,1	4830,0	3905,0	1454,7	48
53	1556 9	3926 7	4830 0	3886 9	1425 3	47
54	1585 2	3944 1	4829 7	3868 6	1395 9	46
55	1613 4	3961 4	4829 2	3850 2	1366 4	45
56	1641 6	3978 5	4828 5	3831 7	1336 9	44
57	1669 7	3995 5	4827 7	3813 0	1307 3	43
58	1697 7	4012 3	4826 7	3794 1	1277 6	42
59	1725 7	4029 0	4825 5	3775 1	1247 9	41
60	1753 6	4045 5	4824 2	3755 9	1218 1	40
61	1781 5	4061 9	4822 7	3736 6	1188 3	39
62	1809 3	4078 1	4821 0	3717 1	1158 4	38
63	1837 0	4094 1	4819 1	3697 5	1128 5	31
64	1864 6	4110 0	4816 9	3677 7	1098 5	36
65	1892 2	4125 8	4814 5	3657 7	1068 5	35
66	1919 7	4141 4	4811 9	3637 6	1038 4	34
67	1947 1	4156 9	4809 2	3617 3	1008 3	33
68	1974 5	4172 2	4806 3	3596 9	978 2	32
69	2001 8	4187 3	4803 2	3576 4	948 1	31
70	2029 0	4202 2	4799 9	3555 8	917 9	20
71	2056 1	4216 9	4796 5	3535 0	887,7	29
72	2083 1	4231 5	4792 9	3514 1	857,4	28
73	2110 1	4246 0	4789 1	3493 0	827,1	27
74	2137 0	4260 3	4785 1	3471 8	796 8	26
75	2163 9	4274 5	4781 0	3450 4	766,4	25
N	900 +	800 +	700 +	600 +	500 +	N

N	0 −	100 −	200 −	300 −	400 −	N
76	2190,7	4288,5	4776,7	3428,8	736,0	24
77	2217 4	4302 3	4772 1	3407 1	705 6	23
78	2244 0	4315 9	4767 3	3385 3	675 1	22
79	2270 4	4329 3	4762 3	3363 3	644 6	21
80	2296 7	4342 5	4757 0	3341 2	614 1	20
81	2323 0	4355 6	4751 5	3319 0	583 5	19
82	2349 2	4368 5	4745 9	3296 7	552 9	18
83	2375 3	4381 3	4740 1	3274 2	522 3	17
84	2401 3	4393 9	4734 2	3251 6	491 7	16
85	2427 3	4406 3	4728 1	3228 8	461 1	15
86	2453 2	4418 6	4721 8	3205 9	430 4	14
87	2479 0	4430 7	4715 3	3182 9	399 7	13
88	2504 7	4442 6	4708 6	3159 8	369 0	12
89	2530 2	4454 3	4701 7	3136 5	338 3	11
90	2555 6	4465 9	4694 6	3113 1	307 6	10
91	2580 9	4477 3	4687 3	3089 6	276 9	9
92	2606 2	4488 6	4679 9	3066 0	246 2	8
93	2631 4	4499 7	4672 3	3042 2	215 5	7
94	2656 5	4510 6	4664 5	3018 3	184 7	6
95	2681 5	4521 3	4656 6	2994 3	153 9	5
96	2706 4	4531 9	4648 5	2970 2	123 2	4
97	2731 2	4542 3	4640 2	2945 9	92 5	3
98	2755 9	4552 5	4631 7	2921 5	61 7	2
99	2780 5	4562 5	4622 9	2897 0	30 9	1
N	900 +	800 +	700 +	600 +	500 +	N

N		VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	N	
		+	−	−	−	+	+	+	− +		
0	500	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	500	1000
10	490	3 6	3 4	4 8	0 7	2 5	7 8	3 0	7 8	510	990
20	480	7 2	6 8	9 6	1 4	4 9	15 6	6 0	15 5	520	980
30	470	10 8	10 1	14 4	2 2	7 4	23 3	8 9	23 1	530	970
40	460	14 3	13 4	19 0	2 9	9 8	30 9	11 8	30 3	540	960
50	450	17 8	16 6	23 6	3 6	12 1	38 4	14 7	36 9	550	950
60	440	21 2	19 8	28 1	4 2	14 4	45 8	17 5	42 9	560	940
70	430	24 6	23 0	32 5	4 9	16 7	53 0	20 2	48 2	570	930
80	420	27 8	26 0	36 8	5 6	18 9	60 0	22 9	52 8	580	920
90	410	31 0	28 9	41 0	6 2	21 0	66 8	25 5	56 6	590	910
100	400	34 0	31 7	45 0	6 8	23 1	73 3	28 0	59 4	600	900
110	390	36 9	34 3	48 8	7 3	25 1	79 4	30 4	61 3	610	890
120	380	39 6	36 8	52 4	7 8	26 9	85 3	32 6	62 4	620	880
130	370	42 2	39 2	55 8	8 4	28 6	90 8	34 7	62 4	630	870
140	360	44 6	41 5	58 9	8 9	30 2	96 0	36 7	61 3	640	860
150	350	46 8	43 6	61 9	9 3	31 7	100 8	38 5	59 4	650	850
160	340	48 9	45 5	64 6	9 7	33 1	105 2	40 2	56 6	660	840
170	330	50 7	47 2	67 0	10 1	34 4	109 2	41 7	52 8	670	830
180	320	52 3	48 7	69 2	10 4	35 5	112 7	43 0	48 2	680	820
190	310	53 8	50 1	71 1	10 7	36 5	115 8	44 2	42 9	690	810
200	300	55 0	51 3	72 7	10 9	37 4	118 5	45 2	36 9	700	800
210	290	56 0	52 2	74 1	11 1	38 1	120 7	46 0	30 3	710	790
220	280	56 7	52 9	75 1	11 3	38 6	122 4	46 7	23 1	720	780
230	270	57 3	53 4	75 9	11 4	39 0	123 6	47 2	15 5	730	770
240	260	57 7	53 8	76 3	11 5	39 2	124 3	47 5	7 8	740	760
250	250	57 8	53 9	76 5	11 5	39 3	124 6	47 6	0 0	750	750
N		−	+	+	+	−	−	−		N	

N	XIV	XV	XVI	N
	+	+	−	
0	0 0	0,0	0,0	1000
50	2 7	3 3	2 1	950
100	5 2	6 2	4 1	900
150	7 1	8 5	5 6	850
200	8 4	10 1	6 6	800
250	8 8	10 6	6 9	750
300	8 4	10 1	6 6	700
350	7 1	8 5	5 6	650
400	5 2	6 2	4 1	600
450	2 7	3 3	2 1	550
500	0 0	0 0	0 0	500
N	−	−	+	N

N	XVII	XVIII
	+	+
0	2,2	1,2
100	3 3	1 9
200	4 3	2 3
300	4 3	2 3
400	3 5	1 9
500	2 2	1 2
60	0 9	0 5
700	0 1	0 1
800	0 1	0 1
900	0 9	0 5
1000	2 2	1 2
N	+	+

XIX

N	0 +	20 +	40 +	60 +	80 +
0	6,4	4,8	3,3	2,0	1,0
100	0 3	0 0	0 1	0 7	1 5
200	2 7	4 1	5 6	7 2	8 8
300	10 2	11 3	12 1	12 7	12 8
400	12 5	11 8	10 8	9 5	12 5
500	6 4	4 8	3 3	2 0	1 0
600	0 3	0 0	0 1	0 7	1 5
700	2 7	4 1	5 6	7 2	8 8
800	10 2	11 3	12 1	12 7	12 8
900	12 5	11 8	10 8	9 5	12 5
0	6 4	4 8	3 3	2 0	1 0

Eq. β Arg B

	0°	10°	
0'	0	0	11'
1	1	4	10
2	10	14	9
3	22	26	8
4	29	28	7
5	21	14	6
6	0	8	5
7	21	25	4
8	29	28	3
9	22	18	2
10	10	7	1
11	1	0	0
	30°	20°	

Segue la TAVOLA VII. Equazioni di Longitudine.

XXI Arg. e Φ′ Arg. C′

G	0s −	1s −	2s −	3s −	4s −	5s −	G
	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	
0	0 0 0	1 51 39	3 17 33	3 53 10	3 30 9	2 4 17	30
1	3 52	55 5	19 40	53 24	28 12	0 35	29
2	7 44	58 28	21 45	53 34	26 11	1 56 20	28
3	11 36	2 1 49	23 48	55 39	24 6	53 2	27
4	15 28	5 9	25 48	53 39	21 55	49 12	26
5	19 19	8 27	27 43	55 35	19 41	45 20	25
6	23 10	11 42	29 33	55 27	17 24	41 26	24
7	27 1	14 55	31 20	55 15	15 4	37 29	23
8	30 52	18 6	33 4	54 59	12 39	33 30	22
9	34 42	21 15	34 46	54 38	10 10	29 29	21
10	38 31	24 22	36 24	54 12	7 35	25 26	20
11	42 20	27 27	37 57	53 41	4 58	21 22	19
12	46 8	30 30	39 26	53 6	2 17	17 16	18
13	49 56	33 30	40 52	52 27	2 59 32	13 7	17
14	53 43	36 28	42 14	51 42	56 44	8 57	16
15	57 28	39 23	43 32	50 52	53 54	4 46	15
16	1 1 13	42 14	44 47	49 58	51 0	0 34	14
17	4 58	45 3	45 58	49 0	48 20	[illegible] 56 20	13
18	8 41	47 50	47 5	47 59	45 0	52 5	12
19	12 23	50 36	48 8	46 53	41 53	47 49	11
20	16 4	53 18	49 5	45 42	38 43	43 31	10
21	19 45	55 57	49 59	44 27	35 30	39 12	9
22	23 22	58 33	50 51	43 8	32 14	34 53	8
23	26 59	3 1 5	51 40	41 45	28 54	30 33	7
24	30 36	3 35	52 23	40 18	25 32	26 12	6
25	34 11	6 3	53 1	38 46	22 8	21 51	5
26	37 44	8 28	53 35	37 11	18 40	17 30	4
27	41 15	10 49	54 6	35 32	15 9	13 7	3
28	44 44	13 6	54 32	33 48	11 34	8 45	2
29	48 12	15 21	54 53	32 0	7 57	4 22	1
30	51 39	17 33	53 10	30 9	4 17	0 0	0
G	11 +	10 +	9 +	8 +	7 +	6 +	G

XXII Equazione μ

G	0s −	1s −	2s −	3s −	4s ∓	5s +	G
	″	″	″	″	″	″	
0	0,0	124,2	184,8	125,3	26,7	8,7	30
2	8 8	131 2	184 5	118 4	22 0	8 8	28
4	17 6	137 8	183 6	111 3	17 5	8 8	26
6	26 3	144 2	182 3	104 1	13 4	8 7	24
8	35 0	150 2	180 3	96 9	9 7	8 4	22
10	43 6	155 9	177 6	89 7	6 6	8 0	20
12	52 2	161 3	174 4	82 5	3 8	7 4	18
14	60 7	165 9	170 7	75 4	1 2	6 8	16
16	69 1	170 0	166 4	68 4	1 1	6 1	14
18	77 5	173 7	161 7	61 6	3 0	5 4	12
20	85 8	177 0	156 6	55 1	4 6	4 6	10
22	93 9	179 9	151 1	48 9	5 9	3 8	8
24	101 8	182 1	145 1	42 9	6 9	2 9	6
26	109 5	183 6	138 7	37 2	7 7	2 0	4
28	117 0	184 5	132 1	31 8	8 3	1 0	2
30	124 2	184 8	125 3	26 7	8 7	0 0	0
G	11s +	10s +	9s +	8s +	7s ±	6s −	G

XXIII

G	0s +	1s +	2s +	6s +	7s +	8s +	G
	″	″	″	″	″	″	
0	120,0	162,2	193,1	120,0	77,8	46,9	30
5	127 4	168 4	196 5	112 6	71 6	43 5	25
10	134 7	174 2	199 3	105 3	65 8	40 7	20
15	141 8	179 7	201 5	98 2	60 3	38 5	15
20	148 8	184 6	203 4	91 2	55 4	36 9	10
25	155 6	189 1	204 1	84 4	50 9	35 9	5
30	162 2	193 1	204 4	77 8	46 9	35 6	0
G	5s +	4s +	3s +	11s +	10s +	9s +	G

XXIV Arg. I. di Latitudine

G	0s 6s +	1s 7s +	2s 8s +	3s 9s +	4s 10s +	5s 11s +	G
	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	
0	7 0,0	1 7,7	1 7 7	7 0,0	12 52,3	12 52,3	0
2	6 31 6	0 54 [illegible]	1 22 7	7 28 4	13 5 6	12 37 3	2
4	6 3 4	0 42 8	1 39 4	7 56 6	13 17 2	12 20 6	4
6	5 35 4	0 33 1	1 57 7	8 24 6	13 26 9	12 2 3	6
8	5 7 9	0 25 3	2 17 4	8 52 1	13 34 7	11 42 6	8
10	4 40 9	0 19 4	2 38 5	9 19 1	13 40 6	11 21 5	10
12	4 14 6	0 15 4	3 0 9	9 45 4	13 44 6	10 59 1	12
14	3 49 0	0 13 5	3 24 4	10 11 0	13 46 6	10 35 6	14
16	3 24 4	0 13 5	3 49 0	10 35 6	13 46 6	10 11 0	16
18	3 0 9	0 15 4	4 14 6	10 59 1	13 44 6	9 45 4	18
20	38 5	0 19 4	4 40 9	11 21 5	13 40 6	9 19 1	20
22	17 4	0 25 3	5 7 9	11 42 6	13 34 7	8 52 1	22
24	1 57 7	0 33 1	5 35 4	12 2 3	13 26 9	8 24 6	24
26	1 39 4	0 42 8	6 3 4	12 20 6	13 17 2	7 56 6	26
28	1 22 7	0 54 4	6 31 6	12 37 3	13 5 6	7 28 4	28
30	1 7 7	1 7 7	7 0 0	12 52 3	12 52 3	7 0 0	30

Piccole Equazioni

N		Arg 1, 5, 7, 9, 11, 12	Arg 2, 3, 6, 10, 14	Arg 4	Arg 8	Arg 13	N	
		−	+	+	−	−		
0	500	0″,0	0″,0	0″,0	0″,0	0″,0	500	0
50	450	0 1	0 1	0 8	0 3	0 6	450	950
100	400	0 1	0 3	1 6	0 5	1 2	400	900
150	350	0 2	0 4	2 2	0 7	1 6	350	850
200	300	0 2	0 5	2 5	0 9	1 9	300	800
250	250	0 2	0 5	2 7	0 9	2 0	250	750
		+	−	−	+	+		

TAVOLA VIII. *Equazioni di Latitudine* (in secondi d' arco)

I

1ª. *Parte* = 18520,8 sen (Arg XXIV long); *log* 18520,8 = 4,2676597
2ª. *Parte* = − 5,7 sen (3Arg XXIV long); *log* 5,7 = 0 75587

N	II 0 + / 500 −	II 100 + / 600 −	II 200 + / 700 −	N	N	III +	IV −	V −	VI +	VII +	VIII −	IX −	X −	N	XI N	XI +
0	0,0	309,7	501,1	100	0	[illegible],0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1000	0	1,0
10	33,1	335,8	510,[illegible]	90	50	0,5	5,5	8,1	0,9	4,8	1,9	2,5	1,2	950	100	1,6
20	66,0	360,7	517,5	80	100	0,8	10,5	15,4	1,7	9,2	3,6	4,8	2,3	900	200	1,9
30	98,7	384,0	522,7	70	150	1,1	14,3	21,2	2,3	12,7	4,9	6,6	3,2	850	300	2,0
40	131,1	403,9	525,8	60	200	1,3	16,9	24,9	2,7	14,8	5,8	7,7	3,8	800	400	1,6
50	163,0	426,3	526,9	50	250	1,4	17,8	26,2	2,8	15,6	6,1	8,2	4,0	750	500	1,0
60	194,2	444,8	....	40	300	1,3	16,9	24,9	2,7	14,8	5,8	7,7	3,8	700	600	0,4
70	224,4	461,6	....	30	350	1,1	14,3	21,2	2,3	12,7	4,9	6,6	3,2	650	700	0,1
80	254,0	476,9	....	20	400	0,8	10,5	15,4	1,7	9,2	3,6	4,8	2,3	600	800	0,0
90	282,5	490,0	....	10	450	0,5	5,5	8,1	0,9	4,8	1,9	2,5	1,2	550	900	0,4
100	309,7	501,1	....	0	500	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	500	1000	1,0
N	400 + / 900 −	300 + / 800 −	200 − / 700 −	N	N	−	+	+	−	−	+	+	+	N	N	+

XII. XIII. XIV. XV. XVI. XVII. XVIII. XIX. XX.

N	0 +	100 +	200 +	300 +	400 +	500 +	600 +	700 +	800 +	900 +	N
	0,6	0,9	1,	1,2	0,9	0,6	0,3	0,0	0,0	0,3	

TAVOLA IX. *Parallasse Equatoriale* (in secondi d' arco)

N	I +	II +	III +	IV +	V +	VI +	VII +	VIII +	IX +	N	N	N	X +	N	N
0	0,8	0,0	0,0	0,0	0,4	1,8	0,6	0,0	1,6	1000	0	500	3,6	500	1000
100	0,7	0,0	0,1	0,1	0,4	1,6	0,5	0,1	1,6	900	50	550	3,2	450	950
200	0,6	0,1	0,4	0,5	0,3	1,2	0,4	0,2	1,1	800	100	600	2,4	400	900
300	0,2	0,1	1,0	1,1	0,1	0,6	0,2	0,2	0,5	700	150	650	1,2	350	850
400	0,1	0,2	1,3	1,5	0,0	0,2	0,1	0,1	0,1	600	200	700	0,4	300	800
500	0,0	0,2	1,4	1,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	500	250	750	0,0	250	750

N	XI 0 +	XI 100 +	XI 200 +	XI 300 +	XI 400 +	XII 0 +	XII 100 +	XII 200 +	XII 300 +	XII 400 +	XIII 0 +	XIII 100 +	XIII 200 +	XIII 300 +	XIII 400 +	N
0	0,8	7,7	26,1	49,1	68,3	0,7	30,1	112,5	227,0	332,1	53,4	34,7	6,2	7,1	36,5	100
10	0,9	9,0	28,3	51,4	69,7	1,0	36,2	123,5	238,3	340,1	53,2	31,5	4,6	9,3	39,[illegible]	90
20	1,1	10,6	30,6	53,6	70,9	1,9	42,8	133,9	250,5	347,3	52,7	28,3	3,2	11,7	42,[illegible]	80
30	1,4	12,2	32,8	55,8	72,0	3,4	49,9	145,0	262,0	353,8	51,4	25,0	2,2	14,7	45,4	70
40	1,9	14,0	35,2	57,9	73,0	5,5	57,5	156,3	273,2	359,4	50,0	21,8	1,7	17,1	47,9	60
50	2,6	15,8	37,5	59,8	73,9	8,2	65,5	167,8	284,2	364,4	48,1	18,6	1,6	20,0	50,[illegible]	50
60	3,3	17,7	39,9	61,7	74,6	11,4	74,1	179,5	294,6	368,6	46,0	15,7	1,9	23,1	52,[illegible]	40
70	4,3	19,7	42,2	63,5	75,1	15,2	83,0	191,4	304,8	371,5	43,6	13,0	2,5	26,[illegible]	53,[illegible]	30
80	5,2	21,7	44,5	65,2	75,5	19,6	92,5	203,2	314,5	373,8	41,0	10,4	3,6	29,8	54,[illegible]	20
90	6,4	23,8	46,9	66,8	75,7	24,6	102,3	215,1	323,6	375,2	38,0	8,1	5,2	33,2	55,1	10
100	7,7	26,1	49,1	68,3	75,8	30,1	112,5	227,0	332,1	375,7	34,7	6,2	7,1	36,5	55,[illegible]	0
N	900 +	800 +	700 +	600 +	500 +	900 +	800 +	700 +	600 +	500 +	900 +	800 +	700 +	600 +	500 +	N

TAV. X. *Moto Orario in Longitudine* (in secondi d'arco)

I. Arg. XXI. di Long.

G	0^s	1^s	2^s	3^s	4^s	5^s	G.
0	1732	1754	1819	1919	2033	2128	30
1	32	56	22	21	36	30	29
2	32	57	25	25	40	32	28
3	32	59	28	29	44	34	27
4	32	60	31	33	47	37	26
5	32	62	34	37	51	39	25
6	33	64	37	40	53	41	24
7	33	66	40	44	58	43	23
8	33	68	43	48	62	44	22
9	34	69	46	52	65	46	21
10	34	71	49	56	68	48	20
11	35	73	53	59	72	50	19
12	35	75	56	63	75	51	18
13	36	77	59	67	79	53	17
14	37	80	62	71	82	54	16
15	37	82	66	75	85	55	15
16	38	84	69	79	88	57	14
17	39	86	72	82	91	58	13
18	40	88	76	86	95	59	12
19	41	91	79	90	98	60	11
20	42	93	83	94	2101	61	10
21	43	96	85	99	04	61	9
22	44	98	89	2003	06	62	8
23	45	1801	93	06	09	63	7
24	46	03	96	10	12	63	6
25	47	06	1900	14	15	64	5
26	49	08	04	18	17	64	4
27	50	11	08	22	20	65	3
28	51	14	11	25	23	65	2
29	53	17	15	29	25	65	1
G.	11^s	10^s	9^s	8^s	7^s	6^s	G.

II. Arg. XXII. di long.

G.	0^s	1^s	2^s	3^s	4^s	5^s	G.
0	83	62	22	2	23	65	30
2	83	60	19	2	26	67	28
4	83	57	17	3	28	69	26
6	82	54	15	3	31	71	24
8	82	52	13	4	34	74	22
10	81	49	11	5	36	76	20
12	80	46	9	6	39	77	18
14	78	43	8	7	42	79	16
16	77	40	7	9	45	80	14
18	75	38	5	10	48	82	12
20	73	35	4	12	51	83	10
22	71	32	4	14	54	84	8
24	69	29	3	16	56	85	6
26	67	27	3	18	59	85	4
28	65	24	2	21	62	85	2
30	62	22	2	23	65	85	0
G.	11^s	10^s	9^s	8^s	7^s	6^s	G.

III. Arg. N. di long.

N	0 − / 400 +	100 − / 300 +	200 − / 700 −	N
0	39	31	12	100
10	39	30	10	90
20	38	28	7	80
30	38	27	5	70
40	37	25	2	60
50	37	23	0	50
60	36	21	...	40
70	35	19	...	30
80	34	18	...	20
90	33	14	...	10
100	31	12	...	0
N	500 + / 900 −	600 + / 800 −	200 + / 700 −	N

TAV. XI. *Moto Orario in Latitudine* (in secondi d'arco).

I. Arg. I. di Latitud.

G.	0^s	1^s	2^s	3^s	4^s	5^s	G.
0	358	334	269	180	91	26	30
1	358	333	267	177	88	24	29
2	358	331	264	174	85	23	28
3	358	329	261	171	83	21	27
4	358	328	258	168	80	20	26
5	357	326	255	164	78	19	25
6	357	324	253	161	75	17	24
7	357	322	250	158	73	16	23
8	356	320	247	155	70	15	22
9	356	319	244	152	68	14	21
10	355	317	241	149	65	13	20
11	355	315	238	146	63	12	19
12	354	313	235	143	61	11	18
13	354	310	232	140	58	10	17
14	353	308	229	137	56	9	16
15	352	306	226	134	54	8	15
16	351	304	223	131	52	7	14
17	350	302	220	128	50	6	13
18	349	299	217	125	47	6	12
19	348	297	214	122	45	5	11
20	347	295	211	119	43	5	10
21	346	292	208	116	41	4	9
22	345	290	205	113	40	4	8
23	344	287	202	110	38	3	7
24	343	285	199	107	36	3	6
25	341	282	196	105	34	3	5
26	340	280	192	102	32	2	4
27	339	277	189	99	31	2	3
28	337	275	186	96	29	2	2
29	336	272	183	93	27	2	1
G.	11^s	10^s	9^s	8^s	7^s	6^s	G.

II. Arg. II. di Latitudine

N	0	100	200	300	400	N
0	9	8	6	4	2	100
20	9	8	6	3	1	80
40	9	8	5	3	1	60
60	9	7	5	2	1	40
80	9	7	4	2	1	20
100	8	6	4	2	1	0
N	900	800	700	600	500	N

TAV. XII. *Semidiametro*

l. Sem.or. = 9,43605 + *l.* par.eq.
l. Aum. = *l.* α + *l.* sen.alt.app.

Semid. oriz.		*log.* cost. α
14′	30″	1,13162
15	0	1 16137
15	30	1 19006
16	0	1 21775
16	30	1 24477
17	0	1 27068

Tipo figurato del Calcolo completo di un luogo della Luna per il dì 11 Settembre 1810, a 13°45'13",9 tempo medio a Firenze

Tempo dato	13°45'13",9
Longitudine dell' Osservatorio di Firenze	— 35 42
Tempo ridotto al Meridiano delle Tavole	13 9 31 9

Epoche	long. media ☾	Arg A	Arg B	Arg C	Arg D	Arg E	Arg F
Anno 1810	7ˢ 5°50'20",3	823,215	499,521	343,3215	44,340	444,8012	221,141
Settembre	10 21 51 51 6	228 756	665 281	818 8693	929 813	35 7449	701 057
11 Giorni	4 24 56 25 3	372 496	30 116	399 2003	404 228	1 6181	31 732
13 Ore	7 8 14 0	18 342	1 484	19 6579	19 905	0 0796	1 562
9 Min.	4 56 5	0 213	0 018	0 2269	0 230	0 0010	0 018
31,9 Sec.	17 6	0 013		0 0134	0 013	0 0001	
	10 29 52 5 ,3	443,035	196,420	581,2893	398,529	482,2449	955,510

B° (= B in Gradi.T. gen. IV) = An. m°. ☉ = 2ˢ10°42'40"32
Angolo φ (Tav. Solari VI.) . . . . = — 1 7 50
B° + φ . . . . = 2 9 34 50 32
Log sen (B° + φ) . . . . = 9,97182
+ *Log* costante . . . . = 0,72793
Log ε (vedasi la seg. della T. VI. Sol.) = 0,69975 = l. — 5,009

A	= 443,035
— ε	= + 5 009
A — ε = A'	= 448 044
F	= 955 510
ε	= — 5 009
F + ε = F'	= 950,501

Calcolo degli Argomenti e delle corrispondenti Equazioni di Longitudine

Num.	Costruzione	Valore	Equazioni +	Equazioni —
	A'	= 448,044		
I	B	= 196 420	630"3	
	C	= 581 289		
II	A' — B	= 251 624		4"9
III	A' + C	= 29 333		1 ,1
IV	A' — C	= 866 755	42 ,3	
	2A'	= 896 088		
	C	= 581 289		
	B	= 196 420		
V	2A' — C	= 314 799		4460 3
VI	2A' + C	= 477 377	8 1	
VII	2A' + B	= 92 5		29 6
VIII	2A' — B	= 699 7	72 7	
IX	A' + B	= 644 5	9 1	
X	C — B	= 384 9	26 0	
	V	= 314 8		
	B	= 196 4		
XI	V + B	= 511 2		8 7
XII	V — B	= 118 4	32 2	
XIII	F'	= 950 5	36 3	
	VI	= 477 4		
	2D	= 797 1		
XIV	VI — 2D	= 680 3		7 9
	VII	= 92 5		
	XII	= 118 4		
XV	VII + XII	= 210 9	10 2	
		Somma	867"2	—4512"5

Num.	Costruzione	Valore	Equazioni +	Equazioni —
	Somma precedente		867"2	4512"5
	V	= 314,8		
	2D	= 797 1		
	2C	= 162 6		
XVI	V — 2D	= 517 7	0 ,7	
2ᵃ. pᵉ.	E	= 482 2		0 ,8
XVII	V — 2C	= 152 2	3 9	
	VI	= 477 4		
	B	= 196 4		
	IV	= 866 8		
2ᵃ. pᵉ.	VI + B	= 673 8	0 3	
XVIII	VI — B	= 281 0	2 3	
2ᵃ. pᵉ.	B + IV	= 63 2	1 6	
	XV + 500	= 710 9		
	2C	= 162 6		
	VII	= 92 5		
3ᵃ. pᵉ.	XV + 500 — 2C	= 548 3	0 9	
4ᵃ. pᵉ.	2C — VII	= 70 1	1 7	
	D	= 398 5		
	C	= 581 3		
XIX	D — C	= 817 2	11 1	
	Costante negativa =			15 3
		Somma	889"7	—4528"6
				+ 889 7
			Σ =	— 3638 9
			=	— 1° 0' 38"9

log sen B° = 9,97491
l. + costante = 3 11893
Somma = 3,09384 = l. 1241″,2
Eq. β (sempre additiva) = 14 3
α = + 1255″,5 = 20′55″,5

log sen B° = 9,97491
l. − cost. = 2 72346
Somma = 2,69837 = l. − 499,3
½ β (sempre addit.) = 7 2
γ = − 506,5 = − 8′26″,5

Arg. XXI = C° + Σ + α = M

C° = 209° 15′ 50″,9
Σ = − 1 0 38 9
α = 20 55 5
Arg. XXI = M = 208 36 7 5 = 6ˢ 28°,6
Eq. 21 = φ′ = + 1 58 53 5
M + φ′ = 210 35 1 0
l. sen (M + φ′) = 9,7065430
+ log − Cost. = 4 3561808
somma = log ε′ = 4,0627238 = l. + 11553″,8
= l. 3° 12′ 33″,8

Arg. XXII = A‴ + Σ + ε′

A‴ = 161° 17′ 45″,0
Σ = − 1 0 38 9
ε′ = 3 12 33 8
Arg. XXII = 163 29 39 9 = 5ˢ 13°,5
2 Arg. XXII = 326 59 19 8
l. sen 2 Arg. XXII = 9,73624
log + Costante = 3 34747
Somma = 3,08371 = log − 1212″,6
Eq. μ (Arg. XXII) = + 7 0
Eq. 22ª = − 1205″,6
= − 20′5″,6

P = Σ + Eq. 22 + γ ; Q = D° + ε′

Σ = − 1° 0′ 38″,9
Eq. 22 = − 20 5 6
γ = − 8 26 5
P = − 1 29 11″,0

D° = 4ˢ 23° 28′ 13″,6
ε′ = 3 12 33 8
Q = 4ˢ 26° 40′ 47″,4
P = − 1 29 11 0

R = P + Q = 4 25 11 36 4
2R = 9 20 23 12 8
= 9 20,4
Arg. XXI = 6 28,6
Arg. XXIII = 2R − Arg. XXI = 2 21,8
Eq. 23ª = 3′23″,7 − costante (= 2′) = 1′23″,7

T = Σ + Eq. 22 ; U = ε′ + Eq. 23

Σ = − 1° 0′ 38″,9
Eq. 22 = − 20 5 6
T = − 1 20′ 44″,5

ε′ = 3° 12′ 33″,8
Eq. 23 = 1 23 7
U = 3 13′ 57″,5
T = − 1 20 44 5

λ = T + U (serve all'Arg. II lat.) = 1 53 13 0
e in parti millesime = 5,241
Longitudine media ☽ = 10 29 52 5 ,3
☽′ = λ + long. m. ☽ = 11ˢ 1° 45′ 18″,3

Arg. XXIV (I di latitudine) = R + Eq. 23ª

R = 4ˢ 25° 11′ 36″,4
Eq. 23 = 1 23 7
Arg. XXIV = 4ˢ 25° 13′ 0″,1
Eq. 24ª = 13′21″,1 − costante (= 7′) = 6′21″,1

Arg. Eq. ☊ = Arg. E = 482

Eq. ☊ (Tav. Solari VII) = 20″,0
Costante = − 18
Differenza = 2 ,0
Equazione 24ª = 6′21″,1
☽′ = 11ˢ 1° 45′ 18″,3
Longitudine vª. ☽ = ☽″ = 11ˢ 1° 51′ 41″,4

Calcolo delle piccole Equazioni

N.	Costruzione	Val.	Equaz. +	Equaz. −
	VI	477		
	2A′ + 500	396		
1	VI + 2A′ + 500	873	0″2	
2	4 Arg IV	468	0,1	
3	XVIII 1ª	281	0 5	
	C	581		
	B	196		
4	C + B	777		2″6
	2A′	896		
	XVII 1ª	152		
5	2A′ + XVII 1ª	48		0,1
6	III + 500	529		0 1
	Somma		0,8	− 2,8

N.	Costruzione	Val.	Equaz. +	Equaz. −
	som. preced.		0″8	2″8
	2A′ + 500	396		
	2D	797		
	C	531		
	B	196		
7	2A′ + 500 + 2D	193		0,2
8	2D + C	378		0 6
9	2D + B	993	0,0	
10	2D − B + 500	101	0 3	
	2A′	896		
	2XIX	634		
11	2(A′ + XIX)	530		0,1
	Somma		1,1	− 3,7

N.	Costruzione	Val.	Equaz. +	Equaz. −
	som. preced.		1″1	3″7
	2IV	734		
	VII	93		
	VIII	700		
	2D	797		
12	2IV − 2D	937	0,1	
13	VII − 2D	296		1,9
14	VIII − 2D	903		0 3
	Somma = +		1,2	− 5,9

\+ 1 2
Piccole Equazioni = − 4″,7
☽″ = 11ˢ 1° 51′ 41″,4
Long. vª. ☽ = 11ˢ 1° 51′ 36″,7

Calcolo degli Argomenti e delle corrispondenti Equazioni di Latitudine

Arg. I = Arg. XXIV di longitudine = $4^s 25^\circ 13' 0'',1$, e in parti millesime = 403,380

3 Arg. I = $2^s 15^\circ 39'$
log sen 3 Arg. I = 9,98623
+ *l.* − costante = 0,75587
log 1^a. parte = 0,74210 = *log* − 5″,5

log sen Arg. I = 9,7562364
+ *log* + costante = 4,2676597
log 2^a. parte = 4,0238961 = *log* + 10565″,7
1^a. parte = − 5 5
Equaz. I = 10560″,2

Num.	Costruzione	Valore	Equazioni +	Equazioni −
	λ (pag. prec.)	5,241		
	2λ	10 482		
	2A	896 088		
	2A′ + 2λ	906,570		
	I	403 380		
	B	196 4		
	C	581 3		
II	2A′ + 2λ − I	503,190		10″6
III	I − B	207 0	1″3	
$2^a.p^e$.	I + C	984 7		0,2
IV	I − C	822 1	15,8	
	C	581 3		
V	IV − C	240,8		26 0
VI	V − C	659 5		2 4
$2^a.p^e$.	II + C + 500	584 5		1 5
VII	II − C	921 9		7 3
	C	581 3		
VIII	VII − C	340,6		5 1
IX	☽″ in p^i.mill.	921 8	3 8	
$2^a.p^e$.	II + B	699 6	7 7	
X	II − B	306 8		3 7
	2A	886 1		
	I	403 4		
	IV	822 1		
XI	2A + I	289,5	2 0	
XII	2A + IV	708 2	0 0	
		Somma	30,6	−56,8

Num.	Costruzione	Valore	Equazioni +	Equazioni −
	Somme preced.		30″6	56″8
	2A	886,1		
	3I	210 2		
	VI $1^a.p^e$. + 500	159 5		
XIII	2A + 3I	675,9	0,1	
XIV	2A + VI + 500	45 6	0 7	
	4A	772 2		
	III $2^a.p^e$.	984 7		
XV	4A − III 2^a p^e.	778,5	0 0	
	VIII	340 6		
	X − 500	806 8		
	IX $2^a.p^e$. − 500	699 6		
	VI $2^a.p^e$. + 500	584 5		
	C	581 3		
	B	196 4		
XVI	VIII − C	759,3	0 0	
XVII	X − C	725 5	0 0	
XVIII	IX 2^a. − 500 − C	618 3	0 2	
XIX	VI 2^a. + 500 + C	665 8	0 1	
XX	X − 500 − B		0 3	
	Costante			6,4
		Somma	32,0	−63,2
				+ 32 0
		Differenza		= − 31,2
		Equazione I		= 10560 2
		Latitudine		= 10529″,0
				= 2° 55′ 29″,0 B

Parallasse Equatoriale e Semidiametro

Num.	Costruzione		Val.	Eq. +
I	I	di Longitudine	196	0″6
II	IX		644	0,2
$2^a.p^e$.	XVIII + 500		781	0 1
$3^a.p^e$.	XXIV + 500		903	0 0
III	VII		93	0 1
IV	VIII		700	1 1
V	X		385	0 0
VI	XI		511	0 0
VII	XII		118	0 5
VIII	XIII		951	0 0
IX	XXIII		227	0 9
			Somma	3″,5

N.	Costruz.		Val.	Equaz. +
	Somma preced.			3″5
X	IV	di Long.	867	1 5
XI	V		315	52 5
XII	XXI		579,4	347 7
XIII	XXII		454	50 9
			Costante	3170 0
			Parallasse	= 3626″,1
				= 1° 0′26″,1

Log. par. Eq. = 3,55944
Log. + Cost. = 9,43605
Log. Semid = 2,99549
= *Log*. 989″,7

Moto or. in Longit.

N.	Costruz.		Valor.	Equa.
I	XXI	di lon.	6^s 29°	2130″
II	XXII		5 13	78
III	V		315	+ 28
	Moto orario appros.			2336″

in Latitudine

N.	Costruz.		Valor.	Equa.
I	I	di lat.	4^s 25°	34″
II	II		503	1
				35
			Costante −	186
			Mot. or. in lat. −	151″

TAVOLA per lo stabilimento delle Lunazioni medie, e vere.

Epoche

Anni	Lunaz. G	OR	M	F	B	C	G
1804B	4	13	47,5	3	510,8	938,1	821
1805	0	7	47 1	0	501 2	87 5	908
1806	4	10	57 7	2	511 8	483 0	039
1807	1	4	57 2	3	502 2	61 5	125
1808B	5	8	7 8	1	512 8	7 9	355
1809	1	2	7 4	2	503 2	136 4	343
1810	4	5	17 7	0	513 8	532 8	472
1811	1	23	17 6	1	504 2	661 3	560
1812B	6	2	28 1	3	514 8	57 7	690
1813	1	20	27 8	0	505 2	186 2	777
1814	5	23	38 4	2	515 8	582 6	907
1815	2	17	38 0	3	506 2	711 1	994
1816B	6	20	48 4	1	516 8	107 5	124
1817	2	14	48 2	2	507 2	236 0	211
1818	6	17	58 7	0	517 8	632 4	341
1819	3	11	58 4	1	508 2	760 9	429
1820B	0	5	57 7	2	498 6	889 4	516
1821	3	9	8 3	0	509 2	285 9	646
1822	0	3	7 9	1	499 6	414 3	733
1823	4	6	18 5	3	510 1	810 8	863
1824B	0	0	18 1	0	500 5	939 3	950
1825	4	3	28 7	2	511 2	335 7	080
1826	0	21	28 3	3	501 5	464 2	167
1827	5	0	38 8	1	512 1	860 6	297
1828B	0	18	38 4	2	502 5	989 1	385
1829	4	21	49 0	0	513 1	385 5	515
1830	1	15	48 3	1	503 5	514 0	602
1331	5	18	59 2	3	514 1	910 4	732
1832B	2	12	58 8	0	504 5	39 9	819
1833	5	16	9 4	2	515 1	435 3	949
1834	2	10	19 0	3	505 5	563 8	036
1835	6	13	19 6	1	516 1	960 2	166
1836B	3	7	19 1	2	506 5	88 7	253
1837	6	10	29 8	0	517 1	485 2	383
1838	3	4	29 4	1	507 5	613 6	471
1839	7	7	40 0	3	518 1	10 1	600
1840B	4	1	39 3	0	508 5	138 6	688
1841	7	5	49 9	2	519 0	335 0	818
1842	3	22	49 5	3	509 5	663 4	906
1843	0	16	49 1	0	499 9	792 0	992
1844B	4	19	59 7	2	510 5	188 4	122
1845	0	13	59 3	3	500 9	316 9	209
1846	3	41	9 9	1	511 5	713 3	339
1847	1	11	9 4	2	501 9	841 8	427
1848B	5	14	20 0	0	512 5	238 2	557
1849	1	8	19 6	1	502 9	366 7	644
1850	5	11	29 9	3	513 5	763 1	774
1851	2	5	29 8	0	503 8	891 6	861
1852B	6	8	40 4	2	514 5	288 0	991
1853	2	2	40 0	3	504 8	416 5	077
1854	6	5	50 6	1	515 4	812 9	208
1855	2	23	50 2	2	505 8	941 4	295
1856B	7	3	0 7	0	516 4	337 9	425

Aumenti per i Mesi

Mesi	Lunaz. G	OR	M	F	B	C	G
Gennajo	7	9	11,0	1	20,2	267,9	43
	14	18	22 0	2	40 4	535 9	85
	22	3	33 0	3	60 6	803 8	128
	29	12	44 0	0	80 9	71 7	170
Febbrajo	5	21	55 0	1	101 1	339 6	213
	13	7	6 0	2	121 3	607 6	256
	20	16	17 0	3	141 5	875 5	298
	28	1	28 1	0	161 7	143 4	341
Marzo	7	10	39 1	1	181 9	411 4	383
	14	19	50 1	2	202 1	679 3	426
	22	5	1 1	3	222 3	947 2	469
	29	14	12 1	0	242 6	215 1	511
Aprile	5	23	23 1	1	262 8	483 1	554
	13	8	34 1	2	283 0	751 0	596
	20	17	45 1	3	303 2	18 9	639
	28	2	56 2	0	323 4	286 9	682
Maggio	5	12	7 2	1	343 6	554 8	724
	12	21	18 2	2	363 8	822 7	767
	20	6	29 2	3	384 0	90 6	809
	27	15	40 2	0	404 3	358 6	852
Giugno	4	0	51 2	1	424 5	626 5	895
	11	10	2 2	2	444 7	894 4	937
	18	19	13 2	3	464 9	162 4	980
	26	4	24 3	0	485 1	430 3	22
Luglio	3	13	35 3	1	505 3	698 2	65
	10	22	46 3	2	525 5	966 1	107
	18	7	57 3	3	545 8	234 1	150
	25	17	8 3	0	566 0	502 0	193
Agosto	2	2	19 3	1	586 2	769 9	235
	9	11	30 3	2	606 4	37 9	278
	16	20	41 3	3	626 6	305 8	320
	24	5	52 3	0	646 8	573 7	363
	31	15	3 3	1	667 0	841 6	406
Settem.	8	0	14 3	2	687 2	109 6	448
	15	9	25 3	3	707 5	377 5	491
	22	18	36 4	0	727 7	645 4	533
	30	3	47 4	1	747 9	913 4	576
Ottobre	7	12	58 4	2	768 1	181 3	619
	14	22	9 4	3	788 3	449 2	661
	22	7	20 5	0	808 5	717 1	704
	29	16	31 5	1	828 7	975 1	746
Novem.	6	1	42 5	2	848 9	253 0	789
	13	10	53 5	3	869 2	520 9	832
	20	20	4 5	0	889 4	788 9	874
	28	5	15 5	1	909 6	56 8	917
Dicembre	5	14	26 5	2	929 8	324 7	959
	12	23	37 5	3	950 0	529 6	002
	20	8	48 5	0	970 2	860 6	044
	27	17	59 5	1	990 4	128 5	087

Equazioni

N	I OR	M	N	I OR	M
0	4	11,0	500	4	11,0
10	3	55 7	510	4	27 1
20	3	40 4	520	4	43 1
30	3	25 3	530	4	59 0
40	3	10 3	540	5	14 7
50	2	55 5	550	5	30 1
60	2	41 1	560	5	45 2
70	2	26 7	570	5	59 9
80	2	13 1	580	6	14 1
90	1	59 9	590	6	27 8
100	1	46 8	600	6	41 0
110	1	34 6	610	6	53 5
120	1	22 9	620	7	5 3
130	1	11 8	630	7	16 4
140	1	1 3	640	7	26 8
150	0	51 6	650	7	36 3
160	0	42 6	660	7	45 6
170	0	34 5	670	7	52 8
180	0	27 1	680	7	59 7
190	0	20 6	690	8	5 7
200	0	15 0	700	8	10 7
210	0	10 2	710	8	14 7
220	0	6 5	720	8	17 8
230	0	3 6	730	8	19 9
240	0	1 8	740	8	21 0
250	0	9 9	750	8	21 1
260	0	1 0	760	8	20 2
270	0	2 1	770	8	18 4
280	0	4 2	780	8	15 5
290	0	7 2	790	8	11 7
300	0	11 3	800	8	7 0
310	0	16 3	810	8	1 4
320	0	22 3	820	7	54 9
330	0	29 2	830	7	47 5
340	0	37 0	840	7	39 4
350	0	45 7	850	7	30 4
360	0	55 2	860	7	20 7
370	1	5 6	870	7	10 2
380	1	16 7	880	6	59 1
390	1	28 5	890	6	47 4
400	1	41 0	900	6	35 0
410	1	54 2	910	6	22 2
420	2	7 9	920	6	8 9
430	2	22 1	930	5	55 1
440	2	36 8	940	5	40 9
450	2	51 9	950	5	26 5
460	3	7 3	960	5	11 7
470	3	23 0	970	4	56 7
480	3	38 9	980	4	41 6
490	3	54 9	990	4	26 3
500	4	11 0	1000	4	11 0

Nei Bisestili si tolga un giorno dai Mesi, eccetto i due primi.

N	II nelle Sizigie OR M	II nelle Quadr. OR M	N	II nelle Sizigie OR M	II nelle Quadr. OR M	N	II nelle Sizigie OR M	II nelle Quadr. OR M	N	II nelle Sizigie OR M	II nelle Quadr. OR M	N	III
0	15 15,9	15 15,9	250	25 1,0	30 30,4	500	15 15,9	15 15,9	750	5 30,8	0 1,4	0	2'0
10	15 55 7	16 14 4	260	24 57 0	30 26 9	510	14 41 9	14 20 4	760	5 29 1	0 0 2	100	2 9
20	16 35 2	17 12 7	270	24 50 7	30 20 3	520	14 8 0	13 25 5	770	5 29 7	0 6 0	200	3 5
30	17 14 4	18 10 2	280	24 42 3	30 9 9	530	13 34 3	12 30 5	780	5 32 6	0 13 7	300	3 5
40	17 53 0	19 7 5	290	24 31 7	29 55 5	540	13 0 9	11 36 9	790	5 38 0	0 25 0	400	2 9
50	18 30 8	20 3 1	300	24 19 2	29 38 0	550	12 28 0	10 45 5	800	5 45 7	0 40 1	500	2 0
60	19 7 8	20 58 1	310	24 4 5	29 17 0	560	11 55 5	9 51 0	810	5 55 9	1 2 7	600	1 1
70	19 43 5	21 51 6	320	23 48 0	28 52 3	570	11 23 7	8 39 7	820	6 8 4	1 20 8	700	0 5
80	20 18 0	22 43 2	330	23 29 7	28 24 9	580	10 52 0	8 9 5	830	6 23 3	1 46 6	800	0 5
90	20 51 0	23 33 7	340	23 9 7	27 54 1	590	10 22 3	7 20 9	840	6 40 6	2 15 2	900	1 1
100	21 22 5	24 21 5	350	22 48 0	27 21 4	600	9 53 0	6 34 1	850	7 0 1	2 47 2	1080	2 0
110	21 52 2	25 7 2	360	22 24 9	26 45 3	610	9 24 7	5 48 8	860	7 21 8	3 22 3		
120	22 20 2	25 50 7	370	22 0 3	26 6 6	620	9 24 7	5 5 8	870	7 45 7	4 0 3	**N**	**IV**
130	22 46 1	26 31 5	380	21 34 3	25 26 0	630	8 31 5	4 25 2	880	8 11 6	4 41 1		
140	23 10 0	27 9 5	390	21 7 1	24 43 0	640	8 6 9	3 46 5	890	8 39 6	5 24 6	0	2'0
150	23 31 7	27 44 6	400	20 38 8	23 57 7	650	7 43 8	3 10 4	900	9 9 3	6 10 3	100	0 9
160	23 51 2	28 16 6	410	20 9 5	23 10 9	660	7 22 1	2 37 7	910	9 40 8	6 58 1	200	0 2
170	24 8 5	28 45 2	420	19 39 2	22 22 3	670	7 2 1	2 6 9	920	10 13 8	7 48 6	300	0 2
180	24 23 4	29 11 0	430	19 8 2	21 32 1	680	6 43 8	1 39 5	9 0	10 48 3	8 40 2	400	0 9
190	24 36 0	29 29 1	440	18 36 3	20 40 8	690	6 27 3	1 14 8	940	11 24 1	9 33 7	500	2 0
200	24 46 1	29 51 7	450	18 3 9	19 48 3	700	6 12 7	0 53 8	950	12 1 0	10 28 7	600	3 1
210	24 53 8	30 6 8	460	17 30 9	18 54 9	710	6 0 1	0 36 3	960	12 38 8	11 24 3	700	3 8
220	24 59 2	30 18 1	470	16 57 5	18 1 3	720	5 49 5	0 21 9	970	13 17 4	12 21 6	800	3 8
230	25 2 2	30 25 8	480	16 23 8	17 6 3	730	5 41 1	0 11 5	980	13 56 6	13 19 2	900	3 1
240	25 2 8	30 31 8	490	15 49 9	16 11 4	740	5 34 8	0 4 9	990	14 36 1	14 17 4	1000	2 0

N	V	VI	N	N	V	VI	N
0	61'0	11'0	500	500	61'0	11'0	1000
20	60,1	9,7	480	520	61,9	12,3	980
40	59 2	8 4	460	540	62 7	13 6	960
60	58 4	7 1	440	560	63 6	14 9	940
80	57 6	5 9	420	580	64 4	16 1	920
100	56 9	4 8	400	600	65 1	17 2	900
120	56 2	3 8	380	620	65 8	18 2	880
140	55 6	2 9	360	640	66 4	19 1	860
160	55 1	2 1	840	660	66 9	19 9	840
180	54 7	1 5	320	680	63 3	20 5	820
200	54 3	1 0	300	700	67 6	21 0	800
220	54 1	0 7	280	720	67 9	21 3	780
240	54 1	0 5	260	740	68 1	21 5	760

Costante da togliersi $= 21^{or}\ 0',0$

Per l' Equazion del Tempo

Gior.	Gen.	Feb.	Mar.	Apr.	Mag	Giu.	Lug.	Ago.	Set.	Ott.	Nov.	Dic.
1	13'2	3'1	4'5	12'9	20'2	19'6	13'6	11'0	17'0	27'1	33'2	27'8
4	11,8	2,7	4,8	13,8	20,5	19,1	13,2	11,2	17,9	28,1	33,2	26,6
7	10 5	2 5	5 6	14 7	20 7	18 6	12 7	11 5	18 9	29 0	33 1	25 4
10	9 2	2 4	6 3	15 5	20 9	18 0	12 2	11 9	19 9	29 8	32 9	24 1
13	8 0	2 4	7 2	16 4	21 0	17 4	11 8	12 4	21 0	30 5	32 5	22 7
16	6 9	2 5	8 0	17 3	21 0	16 9	11 5	12 9	22 0	31 2	32 0	21 2
19	6 0	2 8	8 9	15 0	20 9	16 3	11 2	13 6	23 1	31 8	31 4	19 7
22	5 1	3 1	9 8	18 7	20 7	15 7	11 0	14 3	24 1	32 3	30 7	18 2
25	4 3	3 6	10 7	19 2	20 4	15 0	10 9	15 0	25 2	32 7	29 9	16 8
28	3 7	4 1	11 7	19 7	20 1	14 4	10 9	15 9	26 2	33 0	28 9	15 [illegible]
31	3 2	..	12 6	...	19 8	...	11 0	16 7	...	33 2	...	13 8

Esem. I. Novilunio di Settem. 1811 per Fir.

	G OR M	F	B	C	G
1811	1 23 17,6	1	504,2	661,8	560
Settembre	15 9 25 3	3	707 5	377 5	491
Novil. medio	17 8 42,9	0	211,7	38,8	51
Eq. I	10 8				
II	17 48 4				
III	2 5				
IV	1 9				
V	54 1				
VI	1 9				
Eq. del tempo	22 4				
Rid. per Fir.	35 7				
Somma	17 28 40 5				
Costante	— 21 0 0				
Novilun. vero	17 7 40 [illegible]				

Argomenti

I	B = 211,7
II	C = 38 8
III	G = 51 0
IV	G − C = 12 2
V	B + C = 250 5
VI	B − C = 172 9

Esem. II. 1° quarto del Maggio 1812 per Fir.

	G OR M	F	B	C	G
1812 B	6 2 28,1	3	514,8	57,7	69
Maggio	11 21 18 2	2	363 8	822 7	767
1° quar. med.	17 23 46 3	1	878,6	880,4	4 57
Eq. I	7 1 2				
II	4 43 3				
III	2 4				
IV	2 8				
V	1 8 0				
VI	11 0				
Eq. del tempo	20 9				
Rid. per Fir.	35 7				
Somma	17 37 51 6				
Costante	— 21 0 0				
1° quar. vero	17 16 51 6				

Argomenti

I	B = 878,6
II	C = 880 4
III	G = 457
IV	G − C = 576 6
V	B + C = 759
VI	B − C = 998 2

☿ MERCURIO

TAVOLA I. 1ª. *Parte*. Epoche.

Anni	longit. media	Arg. I Anom med.	At. II	At. III	Ar. IV	At. V	Ar. VI	Ar. VII	Arg. ☊
1603	4ˢ 9° 22′ 3″ 2	7ˢ 8° 5′ 34″	181	700	581	920	77	456	141,1695
1703	6 19 20 50, 6	10 6 30 42	826	801	428	577	275	847	134 4473
1803	8 29 19 38 0	0 14 55 49	472	902	275	234	473	239	127 7237
1903	11 9 18 25 4	2 23 20 56	117	3	123	891	670	630	131 0029

Per gli Anni 1600, 1601, 1602, 1700, 1701, 1702 ec. si tolgano dall' Epoche i moti per un giorno

2ª. *Parte*. Costanti da moltiplicarsi per il quoziente $\frac{1}{4}$

longit. media	Arg. I. anom. media	Arg. II	Arg. III	Arg. IV	Arg. V	Arg. VI	Arg. VII	Arg. ☊
7ˢ 8° 57′ 44″, 34	7ˢ 8° 53′ 59″, 5	106,1	604,1	314,4	706,3	608,1	216,1	0,1310

3ª. *Parte*. Costanti da sommarsi

Resto	longit. media	Ar. I an. m.	II	III	IV	V	VI	VII	☊
1	1ˢ 27° 48′ 35″ 5	1ˢ 27° 47′ 39″	532	903	337	177	159	317	0,0328
2	3 21 31 38, 5	3 21 29 46	057	803	663	353	308	617	0 0655
3	5 15 14 41 4	5 15 11 53	581	704	989	530	458	916	0 0983

TAVOLA II. *Moti medj per i Giorni dell' Anno*

	Longit. media	Ar. I An. med.	II	III	IV	V	VI	VII	☊
1	0ˢ 4° 5′ 32″, 6	0ˢ 4° 5′ 32″	7	2	12	0	9	17	0,0001
2	0 8 11 5 1	0 8 11 5	14	5	24	1	17	35	2
3	0 12 16 37 7	0 12 16 37	21	7	36	1	26	52	3
4	0 16 22 10 2	0 16 22 10	28	10	47	2	35	69	4
5	0 20 27 42 8	0 20 27 42	35	12	59	2	43	86	4
6	0 24 33 15 3	0 24 33 14	42	15	71	3	52	104	5
7	0 28 38 47 9	0 28 38 47	48	17	83	3	60	121	6
8	1 2 44 20 4	1 2 44 19	55	20	95	4	69	138	7
9	1 6 49 53 0	1 6 49 52	62	22	107	4	78	155	8
10	1 10 55 25 6	1 10 55 23	69	25	119	5	86	173	9
20	2 21 50 51 1	2 21 50 46	138	49	237	10	173	345	0,0018
30	4 2 46 16 7	4 2 46 9	208	74	356	14	259	518	27
40	5 13 41 42 2	5 13 41 32	277	99	474	19	345	690	36
50	6 24 37 7 8	6 24 36 55	346	123	593	24	432	863	45
60	8 5 32 33 4	8 5 32 18	415	148	711	29	518	036	54
70	9 16 27 58 9	9 16 27 41	484	173	830	34	604	208	63
80	10 27 23 24 5	10 27 23 4	553	197	948	39	690	381	72
90	0 8 18 50 0	0 8 18 27	623	222	067	43	777	553	81
100	1 19 14 15 6	1 19 14 50	692	247	185	48	863	726	90
200	3 8 28 31 2	3 8 29 40	383	493	370	97	726	452	0,0180
300	4 27 42 46 8	4 27 44 31	75	740	555	145	589	178	0269

TAVOLA III. *Moti medj per l' Ore, Minuti, e Secondi*

	Longit. media	Ar. I An. m.	II	III	IV	V	VI	VII	☊
1ᵒʳ	0ˢ 0° 10′ 13″, 86	0ˢ 0° 10′ 13″, 8	0,3	0,1	0,5	0,02	0,36	0,72	0,00000
1′	0 0 0 10 23	0 0 0 10 2	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 00000
1″	0 0 0 0 17	0 0 0 0 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 00000

TAVOLA IV. *Equazioni di Longitudine* (in secondi d' arco)

Angolo φ per l' Equazione I (dell' Orbita) Arg. Anom. m. ☿

G	0ˢ −	Iˢ −	IIˢ −	IIIˢ −	IVˢ −	Vˢ −	G
0	0° 0′ 0″,0	6° 7′ 44″,6	11° 17′ 59″,1	14° 24′ 2″,6	14° 4′ 37″,3	9° 5′ 10″,0	30
1	0 12 34 0	6 19 20 9	11 26 35 7	14 27 12 0	13 59 26 3	8 50 9 7	29
2	0 25 8 0	6 30 53 1	11 35 4 2	14 30 7 0	13 53 56 1	8 34 52 1	28
3	0 37 41 5	6 42 21 4	11 43 24 2	14 32 48 6	13 48 6 6	8 19 16 9	27
4	0 50 14 8	6 53 45 5	11 51 35 4	14 35 15 6	13 41 56 7	8 3 25 5	26
5	1 2 47 6	7 5 5 2	11 59 37 6	14 37 28 6	13 35 27 3	7 47 17 1	25
6	1 15 19 8	7 16 20 5	12 7 31 0	14 39 26 6	13 28 38 6	7 30 52 7	24
7	1 27 51 1	7 27 31 1	12 15 15 1	14 41 10 0	13 21 29 5	7 14 12 4	23
8	1 40 21 7	7 38 37 2	12 22 50 0	14 42 38 0	13 14 0 3	6 57 17 5	22
9	1 52 51 5	7 49 38 3	12 30 15 1	14 43 51 8	13 6 12 0	6 40 6 9	21
10	2 5 19 8	8 0 34 4	12 37 30 5	14 44 50 0	12 58 3 0	6 22 42 3	20
11	2 17 47 0	8 11 25 4	12 44 36 1	14 45 30 7	12 49 33 9	6 5 3 9	19
12	2 30 12 8	8 22 11 0	12 51 31 9	14 46 4 0	12 40 44 6	5 47 12 2	18
13	2 42 34 9	8 32 51 2	12 58 17 1	14 46 21 7	12 31 33 1	5 29 8 0	17
14	2 55 0 1	8 43 25 7	13 4 52 1	14 46 40 0	12 22 5 5	5 10 51 5	16
15	3 7 21 3	8 53 54 6	13 11 16 2	14 43 0 0	12 12 15 5	4 52 23 6	15
16	3 19 40 5	9 4 17 7	13 17 29 9	14 44 18 0	12 2 5 3	4 33 44 8	14
17	3 31 57 5	9 14 34 5	13 23 32 5	14 43 33 7	11 51 35 1	4 14 55 7	13
18	3 44 12 9	9 24 45 4	13 29 24 0	14 42 27 5	11 40 44 9	3 55 56 9	12
19	3 56 25 8	9 33 45 8	13 35 4 1	14 41 0 0	11 29 34 1	3 36 49 3	11
20	4 8 36 4	9 44 48 0	13 40 32 4	14 39 15 0	11 18 3 9	3 17 33 4	10
21	4 20 44 6	9 54 32 9	13 45 49 2	14 37 10 0	11 6 13 4	2 58 10 0	9
22	4 32 49 3	10 4 24 0	13 50 54 3	14 34 45 5	10 54 2 9	2 38 39 6	8
23	4 44 52 8	10 14 1 9	13 55 46 8	14 32 4 0	10 41 33 5	2 19 3 2	7
24	4 56 52 6	10 23 32 8	14 0 27 6	14 29 4 8	10 28 44 3	1 59 21 6	6
25	5 8 49 5	10 32 55 9	14 4 56 0	14 25 46 8	10 15 35 8	1 39 35 1	5
26	5 20 43 8	10 42 18 0	14 9 11 1	14 22 10 9	10 2 7 9	1 19 44 6	4
27	5 32 33 9	10 51 20 5	14 13 13 9	14 18 15 5	9 48 21 2	0 59 55 0	3
28	5 44 21 1	11 0 20 9	14 17 3 5	14 14 1 7	9 34 15 9	0 39 55 0	2
29	5 56 4 7	11 9 14 2	14 20 39 6	14 9 29 5	9 19 51 9	0 19 58 0	1
30	6 7 44 6	11 17 59 1	14 24 2 6	14 4 37 3	9 5 10 0	0 0 0 0	0
G	XIˢ +	Xˢ +	IXˢ +	VIIIˢ +	VIIˢ +	VIˢ +	G

Equaz. I (ha il segno istesso che φ) = 4,9306689 + *log sen* (An. m. + φ)

Equaz. Secol. (sottrattiva avanti il 1800) = 7,89192 + *L. sen* anom. med. ☿

II	III	IV	V	N	II	III	IV	V	N	II	III	IV	V	N	II	III	IV	V	N	VI	VII
2,1	4,4	2,0	9,7	250	1,2	0,0	4,1	0,0	500	2,1	4,4	2,0	9,7	750	3,0	8,9	0,0	19,3	0	0,2	0,4
2 6	3 7	2 3	8 1	275	0 8	0 0	4 0	0 1	525	2 7	5 1	1 7	11 2	775	2 5	8 8	0 0	19 2	100	0 2	0 2
3 [illegible]	3 1	2 7	6 7	300	0 4	0 2	4 0	0 5	550	3 2	5 8	1 4	12 6	800	2 0	8 6	0 1	18 8	200	0 1	0 0
3 2	2 4	2 9	5 3	325	0 2	0 5	3 8	1 0	575	3 6	6 4	1 1	14 0	825	1 5	8 4	0 2	18 3	300	0 1	0 0
3 3	1 8	3 2	4 0	350	0 1	0 8	3 7	1 8	600	4 0	7 0	0 8	15 3	850	1 2	8 0	0 4	17 5	400	0 2	0 2
3 3	1 3	3 5	2 8	375	0 1	1 3	3 5	2 8	625	4 2	7 6	0 6	16 5	875	1 0	7 6	0 6	16 5	500	0 2	0 4
3 1	0 8	3 7	1 8	400	0 3	1 8	3 2	4 0	650	4 2	8 0	0 4	17 5	900	0 9	7 0	0 8	15 3	600	0 1	0 7
2 8	0 5	3 8	1 0	425	0 7	2 4	2 9	5 3	675	4 1	8 4	0 2	18 3	925	1 0	6 4	1 1	14 0	700	0 3	0 8
2 3	0 2	4 0	0 5	450	1 1	3 1	2 7	6 7	700	3 9	8 6	0 1	18 8	950	1 3	5 8	1 4	12 6	800	0 3	0 8
1 8	0 0	4 0	0 1	475	1 6	3 7	2 3	8 1	725	3 5	8 8	0 0	19 3	975	1 7	5 1	1 7	11 7	900	0 2	0 7
1 3	0 0	4 1	0 0	500	2 1	4 4	2 0	9 7	750	3 0	8 9	0 0	19 3	1000	2 1	4 4	2 0	9 7	1000	0 2	0 4

:ante da togliersi = 18″,9   Rid. all' Eclitt. = 775″,3 sen 2 Arg. lat − 1″,4 sen 4. Arg. lat.

Latitudine

L. sen Latit. (nel 1800) = 9,0858945 + *L. sen* (Longit. ver. ☿ − ☊)

. Variaz. Secol. (in secondi d'Arco, sottrattiva avanti il 1800) = 8,17897 + *L.* tang. Latitud.

V E N E R E

TAVOLA I. 1ª. *Parte*. Epoche.

Anni	longit. media	Arg. I Anom. media	Ar. II	Ar. III	Ar. IV	Ar. V	Ar. VI	Ar. VII	Ar. VIII	Ar. IX	Ar. X	Ar. XI	Ar. XII	Arg. ☊
1603	2ˢ 4°18′ 4″4	3ˢ28° 9′20″	099	436	001	471	569	667	343	610	844	524	824	173,6655
1703	8 21 54 40,6	10 14 27 36,	549	320	903	372	921	469	755	045	196	484	469	175 9749
1803	3 9 31 16 8	5 0 45 51	999	204	805	273	273	271	167	480	548	444	114	178 2843
1903	9 27 7 53 0	11 17 4 5	449	088	707	174	625	073	579	915	900	404	759	180 5937

Per gli Anni 1600, 1601, 1602; 1700, 1701, 1702; ec, si diminuiscano l' Epoche dei moti per un giorno.

2ª. *Parte*. Costanti da moltiplicarsi per il quoziente $\frac{i}{4}$

longit. med.	Anom. med.	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	☊
6ˢ0°46′6″,56	6ˢ0°42′58″,5	498	835,2	396	996	494	992	376,3	337,4	494,1	878,4	705,8	0,09244

3ª. *Parte*. Costanti da sommarsi

resto	longit. media	anom. media	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	☊
1	7ˢ16°23′37″5	7ˢ16°22′50	373	456	98	748	122	495	340	84	123	969	176	0,0231
2	3 1 11 7,2	3 1 9 33,	748	916	197	497	246	994	685	169	247	939	353	0 0462
3	10 15 58 36 9	10 15 56 16,	123	376	297	247	370	493	031	253	370	908	529	0 0693

TAVOLA II. *Moti medj per i Giorni dell' Anno*

Gio.	longit. media	anom. media	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	☊
1	0ˢ 1°36′ 7″8	0ˢ 1°36′ 8″	998	996	998	999	998	996	995	0	0	0	0	0,0008
2	0 3 12 15,6	0 3 12 15	97	92	95	99	96	92	91	0	1	0	1	14
3	0 4 48 23 4	0 4 48 23	95	87	93	98	93	88	86	1	1	0	1	20
4	0 6 24 31 2	0 6 24 31	93	83	90	97	91	84	82	1	2	0	2	26
5	0 8 0 39 0	0 8 0 38	91	79	88	97	88	80	77	1	2	0	2	32
6	0 9 36 46 8	0 9 36 46	90	75	85	96	86	75	73	1	2	0	3	38
7	0 11 12 54 7	0 11 12 54	88	70	83	95	84	71	68	2	3	0	3	44
8	0 12 49 2 5	0 12 49 3	86	66	80	94	81	67	64	2	3	999	4	50
9	0 14 25 10 3	0 14 25 10	85	62	78	94	79	63	59	2	3	9	4	56
10	0 16 2 18 1	0 16 1 17	83	58	75	93	76	59	55	2	3	9	5	62
20	1 2 2 36 1	1 2 2 34	66	16	51	86	52	18	09	4	7	8	10	123
30	1 18 3 54 2	1 18 3 50	49	873	26	79	28	877	864	7	10	8	14	185
40	2 4 5 12 3	2 4 5 7	32	31	01	72	04	36	19	9	13	7	19	247
50	2 20 6 30 4	2 20 6 24	14	789	876	65	880	795	774	11	16	6	24	309
60	3 6 7 48 4	3 6 7 41	897	47	52	59	56	53	28	13	20	5	29	370
70	3 22 9 6 5	3 22 8 57	80	05	27	52	32	12	683	15	23	4	34	332
80	4 8 10 24 6	4 8 10 14	63	662	02	45	08	671	38	18	26	4	38	492
90	4 24 11 42 7	4 24 11 31	46	20	778	38	784	30	592	20	30	3	43	555
100	5 10 13 0 7	5 10 12 48	29	578	53	31	760	589	47	22	33	2	48	617
200	10 20 26 1 5	10 20 25 35	658	156	506	862	520	178	094	44	66	984	96	1234
300	4 0 39 2 2	4 0 38 23	487	734	259	793	280	767	641	66	99	976	144	1851

TAVOLA III. *Moti medj per l' Ore, Minuti e Secondi*

	longit. media	anom. med.	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
1ᵒʳ	0° 4′ 0″,33	0° 4′ 0″,33	999,9	999,8	999,9	0	999,9	999,8	999,8	0
1′	0 0 4 05	0 0 4 05	0	0	0	0	0	0	0	0
1″	0 0 0 067	0 0 0 067	0	0	0	0	0	0	0	0

♀ TAVOLA IV *Equazioni di Longitudine* (in secondi d'arco)

Angolo φ per l'Equazione I (dell'Orbita). Arg. Anom. m. ♀

G	0ˢ −	Diff. per 1°	Iˢ −	Diff. per 1°	IIˢ −	Diff. per 1°	IIIˢ −	Diff. per 1°	IVˢ −	Diff. per 1°	Vˢ −	Diff. per 1°	G
		+		+		+		±		−		−	
0	0' 0"	31"2	14'36"	26"6	25'12"	13"2	29' 0"	12"0	25'54"	16"8	14'54"	27"6	30
5	2 36	30 0	16 48	24 0	26 18	10 8	30 0	3 6	24 30	19 2	12 36	28 8	25
10	5 6	30 0	18 48	22 8	27 12	9 6	29 42	6 0	22 54	21 6	10 12	28 8	20
15	7 36	28 8	20 42	20 4	28 0	6 0	29 12	10 8	21 6	22 8	7 48	31 2	15
20	10 0	27 6	22 24	18 0	28 30	4 8	28 6	12 0	19 12	25 2	5 12	31 2	10
25	12 18	27 4	23 54	15 6	28 54	1 2	27 6	14 4	17 6	26 4	2 36	31 2	5
30	14 36		25 12		29 0		25 54		14 54		0 0		0
G	XIˢ +		Xˢ +		IXˢ +		VIIIˢ +		VIIˢ +		VIˢ +		G

Log Equazione I. (ha il segno istesso che φ) = 3,4518864 + *Log sen* (An. m. ♀ + φ)

Log Equazione Secolare (sottrattiva avanti il 1800) = *Log* Eq. I + 8,1983434

N	II	N	II	N	II	N	II
0	16,6	280	22,8	520	21,0	760	3,1
40	17 0	290	20 5	530	23 2	770	1 9
60	18 2	300	18 1	540	25 1	780	1 0
70	19 1	310	15 7	550	26 8	790	0 3
80	20 2	320	13 4	560	28 3	800	0 0
90	21 5	330	11 1	570	29 5	810	0 0
100	23 0	340	9 0	580	30 3	820	0 3
110	24 5	350	7 2	590	30 7	830	0 9
120	26 1	360	5 6	600	30 8	840	1 8
130	27 6	370	4 2	610	30 6	850	2 9
140	29 0	380	3 2	620	30 0	860	4 2
150	30 3	390	2 6	630	29 0	870	5 6
160	31 4	400	2 4	640	27 6	880	7 1
170	32 3	410	2 5	650	26 0	890	8 7
180	32 9	420	2 9	660	24 2	900	10 2
190	33 2	430	3 7	670	22 1	910	11 7
200	33 2	440	4 9	680	19 8	920	13 0
210	32 9	450	6 4	690	17 5	930	14 1
220	32 2	460	8 1	700	15 1	940	15 0
230	31 3	470	10 0	710	12 7	950	15 7
240	30 1	480	12 2	720	10 4	960	16 2
250	28 5	490	14 4	730	8 4	970	16 4
260	26 7	500	16 6	740	6 5	980	16 5
270	24 8	510	18 8	750	4 7	990	16 6

Rid. all'Eclitt. = 180",8 *sen* 2 Arg. lat.

N	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
0	3,3	0,0	0,0	0,1	0,0	0,4	1,7	1,0	2,8	1,8
50	3 7	0 0	0 3	0 2	0 1	0 2	1 3	0 6	2 9	2 1
100	4 1	0 2	0 8	0 2	0 3	0 1	0 9	0 3	2 9	2 3
150	4 8	0 3	1 6	0 4	0 7	0 0	0 5	0 1	2 8	2 4
200	5 5	0 4	2 7	0 6	1 2	0 0	0 2	0 1	2 5	2 4
250	6 2	0 8	3 8	0 8	1 7	0 1	0 0	0 2	2 1	2 2
300	6 6	1 1	4 9	1 0	2 2	0 2	0 0	0 4	1 7	2 0
350	6 5	1 4	5 9	1 2	2 6	0 4	0 1	0 9	1 2	1 7
400	5 8	1 7	6 6	1 4	2 9	0 7	0 3	1 2	0 8	1 3
450	4 7	1 9	7 1	1 6	3 1	0 9	0 6	1 8	0 4	0 9
500	3 3	1 7	7 2	1 6	3 2	1 2	1 1	2 1	0 2	0 6
550	1 9	1 3	7 1	1 6	3 1	1 3	1 5	2 6	0 0	0 4
600	0 8	1 0	6 6	1 4	2 9	1 5	2 0	2 9	0 0	0 1
650	0 1	0 7	5 9	1 2	2 6	1 6	2 3	3 1	0 2	0 0
700	0 0	0 4	4 9	1 0	2 2	1 6	2 6	3 1	0 5	0 1
750	0 4	0 2	3 8	0 8	1 7	1 5	2 8	3 0	0 9	0 2
800	1 1	0 2	2 7	0 6	1 2	1 4	2 8	2 8	1 3	0 4
850	1 8	0 2	1 6	0 4	0 7	1 2	2 7	2 3	1 8	0 7
900	2 5	0 2	0 8	0 2	0 3	0 9	2 4	2 0	2 2	1 1
950	2 9	0 1	0 3	0 2	0 1	0 7	2 1	1 4	2 5	1 4
1000	3 3	0 0	0 0	0 1	0 0	0 3	1 7	1 0	2 8	1 8

Costante da togliersi 33,1

TAVOLA V. *Latitudine* (in sec. d'arco)

Log latit. Elioc. ♀ = *Log sen* (long. v. ♀ − ☊) + 4,0866623

Log Eq. sec. (sottrattiva avanti il 1800) = *Log* latit + 3,22692

TAVOLA VI. *Parallasse Orizzontale e Semidiametro* (in sec. d'arco)

Arg. long. ⊙ − long. geoc. ♀

Parallasse	Con. sup.	20°	30°	40°	42° 30'	45°	45° 21'	46° 20'	47° 22'	45°	42° 30'	40°	30°	20°	Con. infer.
⊙ Apogeo	5,0	5,5	6,2	6,8	8,9	10,9	...	...	12,2	13,6	16,8	18,6	23,8	27,1	29,7
in dist. m.	5 1	5 5	6 3	7 9	8 7	10 1	...	12,6	...	15 7	18 4	20 0	25 3	28 8	31 8
Perigeo	5 1	5 6	6 3	7 9	8 6	9 7	13,1	...	...	17 6	20 0	21 7	27 1	30 7	33 5
Semidiam. ⊙ in dist. m.	4 6	5 0	5 7	7 3	8 0	9 3	...	11 6	...	14 4	16 9	18 4	23 3	26 5	29 3

♂ MARTE

TAVOLA I. 1ª. *Parte.* Epoche.

Anni	Longit. media	Arg. I Anom. media	Arg. II	Arg. III	Arg. IV	Arg. V	Arg. VI	Arg. VII	Arg. VIII	Arg. IX	☊
1603	10ˢ24° 4′ 49″,7	5ˢ25° 21′ 32″	289	663	953	627	376	529	847	284	129,2261
1703	0 25 15 13 8	5 24 40 16	025	974	000	051	206	866	340	331	131 3348
1803	2 26 25 37 9	9 23 59 0	761	285	047	475	036	203	833	378	133 4436
1903	4 27 36 2 0	11 23 17 44	497	596	094	899	866	540	326	425	135 5524

Per gli Anni 1700, 1701, 1702; ec si tolgano i moti per un giorno.

2ª *Parte.* Costanti da moltiplicarsi per il quoziente $\frac{i}{4}$

Longit. med.	Anom. media	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	☊
1ˢ15°40′4″,43	1ˢ15°35′36″,4	789,5	452,5	242	337	873,2	253,5	619,6	121,9	0,08411

3ª. *Parte.* Costanti da Sommarsi.

Resti	Longit. media	Anom med.	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	☊
1	6ˢ11°48′36″,1	6ˢ11°47′29″	447	364	811	085	469	63	405	30	0,0208
2	0 23 5 45 5	0 23 3 32	894	727	622	169	938	127	810	60	0,0417
3	7 4 22 55 0	7 4 19 34	341	090	432	253	405	190	214	91	0,0633

TAVOLA II. *Moti medj per i giorni dell'Anno.*

	Longit. media	Anom. med.	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	☊
1	0ˢ 0°31′26″,7	0ˢ 0°31′26″	1	1	2	0	1	0	1	0	0,0001
2	0 1 2 53 3	0 1 2 53	2	2	4	0	3	0	2	0	2
3	0 1 34 20 0	0 1 34 19	4	3	7	1	4	0	3	0	2
4	0 2 5 46 6	0 2 5 46	5	4	9	1	5	1	4	0	2
5	0 2 37 13 3	0 2 37 12	6	5	11	1	6	1	6	0	3
6	0 3 8 39 9	0 3 8 39	7	6	13	1	8	1	7	1	4
7	0 3 40 6 6	0 3 40 5	9	7	16	2	9	1	8	1	4
8	0 4 11 33 2	0 4 11 32	10	8	18	2	10	1	9	1	5
9	0 4 42 59 9	0 4 42 58	11	9	20	2	12	2	10	1	5
10	0 5 14 26 6	0 5 14 25	12	10	22	2	13	2	11	1	6
20	0 10 28 53 1	0 10 28 49	25	20	44	5	26	3	22	2	0,0012
30	0 15 43 19 7	0 15 43 14	37	30	67	7	38	5	33	3	18
40	0 20 57 46 2	0 20 57 39	49	40	89	9	51	7	44	3	23
50	0 26 12 12 8	0 26 12 4	61	50	111	11	64	9	55	4	29
60	1 1 26 39 4	1 1 26 28	73	60	133	14	77	10	67	5	35
70	1 6 41 5 9	1 6 40 53	86	70	156	16	90	12	78	6	41
80	1 11 55 32 5	1 11 55 18	98	80	178	18	103	14	89	7	46
90	1 17 9 5 0	1 17 9 43	110	90	200	21	115	16	100	7	52
100	1 22 24 25 6	1 22 24 7	122	100	222	23	128	19	111	8	58
200	3 14 48 51 2	2 44 48 14	245	199	445	46	257	35	222	17	0,0120
300	5 7 13 16 8	4 7 12 21	367	299	667	69	389	52	333	26	174

TAVOLA III. *Moti in Longitudine, e Anom. media per l' Ore, Minuti e Secondi.*

Ore		Ore		Ore		Min.		Min.		Sec.		Sec.	
1ᵒʳ	1′18″,6	9ᵒʳ	11′47″,5	17ᵒʳ	22′16″,4	1′	1″,3	9′	11″,8	4″	0″,1	31″	0″,7
2	2 37 2	10	13 6 1	18	23 35 0	2	2 6	10	13 1	9	0 2	36	0 8
3	3 55 8	11	14 24 7	19	24 53 6	3	3 9	20	26 2	13	0 3	40	0 9
4	5 14 4	12	15 43 3	20	26 12 2	4	5 2	30	39 3	18	0 4	45	1 0
5	6 33 1	13	17 1 9	21	27 30 8	5	6 6	40	52 4	22	0 5	49	1 1
6	7 51 7	14	18 20 5	22	28 49 4	6	7 9	50	65 5	27	0 6	54	1 2
7	9 10 3	15	19 39 1	23	30 8 0	7	9 2	60	78 6			60	1 3
8	10 28 9	16	20 57 8	24	31 26 7	8	10 5						

f

♂ TAVOLA IV. *Equazione di Longitudine.*

Angolo φ per l'Equazione I (dell'Orbita) Argomento Anom. media ♂

G	O^s −	I^s −	II^s −	III^s −	IV^s −	V^s −	G
0	0° 0′ 0″	3° 3′ 41″	5° 28′ 50″	6° 38′ 33″	6° 4′ 22″	3° 34′ 23″	30
2	0 12 41	3 14 58	5 36 14	6 39 59	5 58 0	3 26 40	28
4	0 25 21	3 26 6	5 43 16	6 40 59	5 51 10	3 13 22	26
6	0 37 14	3 37 1	5 49 47	6 41 13	5 43 49	2 59 44	24
8	0 50 33	3 47 43	5 56 13	6 41 4	5 35 58	2 45 50	22
10	1 3 8	3 57 13	6 2 12	6 39 54	5 27 38	2 31 38	20
12	1 15 39	4 8 30	6 7 42	6 38 32	5 18 48	2 17 12	18
14	1 28 4	4 18 22	6 12 53	6 36 50	5 9 32	2 2 32	16
16	1 40 26	4 28 19	6 17 36	6 34 32	4 59 48	1 45 27	14
18	1 52 42	4 37 50	6 21 58	6 31 45	4 49 36	1 32 37	12
20	2 4 50	4 47 4	6 25 50	6 28 28	4 38 58	1 17 25	10
22	2 16 49	4 56 3	6 29 18	6 24 39	4 27 54	1 2 6	8
24	2 28 50	5 4 43	6 32 17	6 20 23	4 16 25	0 46 40	6
26	2 40 36	5 13 4	6 34 50	6 15 32	4 4 33	0 31 9	4
28	2 52 14	5 21 7	6 37 0	6 10 12	3 52 17	0 15 22	2
30	3 3 41	5 28 50	6 38 33	6 4 22	3 34 23	0 0 0	0
G	XI^s +	X^s −	IX^s +	VIII^s +	VII^s +	VI^s +	G

An.	Equaz. Secol. −	An.
O^s 0	0″,0	XII^s 0
10	5 2	20
20	10 3	10
I^s 0	15 2	XI 0
10	19 9	20
20	24 3	10
II 0	28 2	X 0
10	31 6	20
20	34 4	10
III 0	36 4	IX 0
10	37 3	20
20	37 1	10
IV 0	35 6	VIII 0
10	32 7	20
20	28 4	10
V 0	22 6	VII 0
10	15 8	20
20	8 1	10
VI 0	0 0	VI 0

L. Eq. I (ha il segno stesso che φ) = 4,5834020 + *l. sen.* (An. m. + φ)

L. Eq. Secolare si applica alla Longitudine.

N	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
0	35″0	18″4	6″8	8″6	10″0	5″4	6″5	10″0
20	35, 8	20, 7	7, 0	8, 5	10, 7	4, 3	7, 1	10, 8
40	36 4	23 2	7 1	8 4	11 3	3 4	7 9	11 5
60	36 6	25 9	7 2	8 2	11 9	2 6	8 6	12 1
80	36 0	28 5	7 3	8 0	12 5	2 1	9 3	12 8
100	34 8	31 3	7 3	7 7	13 2	1 7	10 1	13 4
120	32 8	33 9	7 3	7 3	13 8	1 4	10 9	13 9
140	30 0	36 6	7 3	6 9	14 4	1 5	11 6	14 4
160	26 7	39 1	7 2	6 5	15 2	1 9	12 4	14 8
180	23 0	41 4	7 1	6 1	15 8	2 3	13 1	15 2
200	19 0	43 6	7 0	5 7	16 5	3 0	13 7	15 4
220	15 0	45 6	6 8	5 2	16 8	3 8	14 3	15 5
240	11 1	47 3	6 6	4 8	17 1	4 8	14 8	15 7
260	7 8	48 6	6 4	4 3	17 3	6 0	15 3	15 7
280	5 1	50 0	6, 2	3 9	17 3	7 3	15 7	15 5
300	3 2	50 9	5 9	3 6	17 3	8 8	15 9	15 4
320	2 3	51 3	5 6	3 1	17 2	10 3	16 0	15 2
340	2 3	51 5	5 3	2 7	17 0	11 9	16 2	14 8
360	3 4	51 3	5 0	2 4	16 5	13 7	16 2	14 4
380	5 6	50 9	4 8	2 1	15 9	15 5	16 0	13 9
400	8 7	50 1	4 5	1 9	15 2	17 2	15 9	13 4
420	12 8	48 8	4 2	1 7	14 3	18 9	15 5	12 8
440	17 6	47 4	[illegible]	1 5	13 3	20 4	15 1	12 1
460	23 0	45 8	3 7	1 4	12 3	21 9	14 6	11 5
480	28 9	43 8	3 4	1 4	11 1	23 4	14 1	10 8
500	35 0	41 6	3 2	1 4	10 0	24 6	13 5	10 0

N	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
500	35″0	41″6	3″2	1″4	10″0	24″6	13″5	10″0
520	41, 1	39, 3	3, 0	1, 5	8, 9	25, 7	12, 9	9, 2
540	47 0	36 8	2 9	1 7	7 7	26 6	12 2	8 5
560	52 4	34 1	2 8	1 9	6 7	27 4	11 4	7 9
580	57 2	31 5	2 7	2 1	6 7	27 9	10 7	7 2
600	61 3	28 7	2 7	2 4	4 8	28 3	9 9	6 6
620	64 4	26 1	2 7	2 7	4 1	28 6	9 1	6 1
640	66 6	23 4	2 7	3 1	3 5	28 5	8 4	5 6
660	67 7	20 9	2 8	3 5	3 0	28 1	7 7	5 2
680	67 7	18 6	2 9	3 9	2 8	27 7	6 9	4 8
700	66 8	16 4	3 0	4 3	2 7	27 0	6 3	4 6
720	64 9	14 4	3 2	4 8	2 7	26 2	5 7	4 5
740	62 2	12 7	3 4	5 2	2 7	25 2	5 2	4 3
760	58 9	11 4	3 6	5 7	2 9	24 0	4 7	4 3
780	55 0	10 0	3 8	6 1	3 2	22 7	4 3	4 5
800	51 0	9 1	4 1	6 5	3 6	21 2	4 1	4 6
820	47 0	8 7	4 4	6 9	4 2	19 7	4 0	4 8
840	43 3	8 5	4 7	7 3	4 8	18 1	3 8	5 2
860	39 9	8 7	5 0	7 6	5 6	16 3	3 8	5 6
880	37 2	9 1	5 2	7 9	6 2	14 5	4 0	6 1
900	35 2	9 9	5 5	8 1	6 8	12 8	4 1	6 6
920	34 0	11 3	5 8	8 3	7 5	11 1	4 5	7 2
940	33 4	12 6	6 1	8 5	8 1	9 6	4 9	7 9
960	33 6	14 2	6 3	8 6	8 7	8 1	5 4	8 5
980	34 2	16 2	6 6	8 6	9 3	6 6	5 9	9 2
1000	35 0	18 4	6 8	8 6	10 0	5 4	6 5	10 0

Costante da togliersi = 2′ Riduzione all' Eclittica = 53″, 8 *sen* 2 Arg. lat.

Latitudine.

Latitudine nel 1800 = 1° 51′ 5″,0 *sen* (Long. vera ♂ − ☊)

Var. Secol. = 3″,45 *sen* (Long. V. ♂ − ☋) additiva

♃

G I O V E

TAVOLA I. 1ª. *Parte*. Epoche.

Anni	Longit. media	Arg. I. Anom. media	Arg II	Arg III	Ar VII	Ar VIII	Ar X	Ar XI	Ar XII	Ar XV	☊
1603	7ˢ10°26′ 2″,7	1ˢ 2°24′37″	155,8	711,9	750	341	211	584	514	481	268,1627
1703	0 16 38 36 3	6 7 2 39	191 2	353 5	251	93	958	50	51	722	270 8110
1803	3 22 51 9 9	11 11 40 41	226 3	995 1	750	847	704	315	587	962	273 4590
1903	10 29 3 43 5	4 16 18 43	261 7	636 6	251	601	450	950	123	202	276 1080

Arg IV = Arg II + Arg III + 210,5;
Arg V = Arg III + Arg IV + 400 5;
Arg VI = Arg IV + Arg II + 5601

Arg IX = Arg II − Arg III + 210;
Arg XIII = Arg XII − Arg VI + 550;
Arg XIV = Arg X + Arg II + 810;

Arg. XVI = Arg. VIII − Arg. III + 400

Per gli Anni 1700, 1701, 1702; 1800, 1801, 1802; ec. si tolgano i moti per un giorno.

2ª. *Parte*. Costante da moltiplicarsi per il quoziente $\frac{i}{4}$.

Long. media	Anom. media	II	III	VII	VIII	X	XI	XII	XV	☊
4ˢ1°27′6″,12	4ˢ1°23′19″,2	201,42	65,67	740,0	70,2	670	538,7	941,4	289,6	0,1058

3ª. *Parte*. Resti da sommarsi.

	Long. media	Ano. media	II	III	VII	VIII	X	XI	XII	XV	☊
1	1ˢ0°25′31″,0	1ˢ0°24′,34″	50,4	16,4	186	17	167	134	236	73	0,0266
2	2 0 46 2 7	2 0 44 9	100 7	32 8	371	34	334	268	471	146	0 0531
3	3 1 6 34 5	3 1 3 44	151 0	49 2	565	51	501	402	706	219	0 0771

TAVOLA II. *Logaritmi dei Moti diurni medj*.

longitud. media	anom. media	II	III	VII	VIII	X	XI	XII	XV	☊
8,9197536	8,919528	9,1399	8,6532	9,704	8,672	9,6628	9,568	9,811	9,301	5,8597

TAVOLA III. *Grande Inegualità di Giove per correggere la longit. e an. med., e gli Argomenti*

Anni	longitudine e anom. med.	Differenze 1ª	Differenze 2ª	II	III	VII	VIII	X	XI	XII	XV
1750	+ 19′10″,6	+21,2		+3,1	−5,3	+7	−7	+15	+4	+10	+1
1760	19 31 8	10 6	− 5,2	3 1	5 4	7	8	15	4	10	1
1770	19 47 8	16 6	5 4	3 2	5 5	7	8	15	4	10	1
1780	19 58 4	5 2	5 4	3 3	5 5	7	8	15	4	11	1
1790	20 3 6	− 0 3	5 5	3 3	5 5	7	8	15	4	11	1
1800	20 3 3	5 9	+ 5 6	3 3	5 5	7	8	15	4	11	1
1810	19 57 4	11 3	5 4	3 2	5 5	7	8	15	4	11	1
1820	19 46 1	16 8	5 5	3 2	5 4	7	8	16	4	11	1
1830	19 29 3	22 3	5 5	3 1	5 3	7	8	15	4	11	1
1840	19 7 0	27 6	5 3	3 1	5 2	7	7	15	4	11	1
1850	18 39 4	32 9	5 3	3 0	5 1	7	7	15	4	10	1
1860	18 6 6	37 9	5 0	2 9	5 0	7	7	14	4	10	1
1870	17 28 6	42 9	5 0	2 8	4 8	6	6	14	4	10	1
1880	16 45 7	47 7	4 8	2 7	4 6	6	6	14	4	8	1
1890	15 58 0	52 1	4 4	2 5	4 3	6	6	13	4	8	1
1900	15 5 9			2 4	4 1	5	5	12	4	7	1

TAVOLETTA *per le seconde Differenze*

Differ. seconde	Anni I IX	Anni II VIII	Anni III VII	Anni IV VI	Anni V
4″	0″,2	0″,3	0″,4	0″,5	0″,5
5	0 2	0 4	0 5	0 6	0 7
6	0 3	0 5	0 6	0 7	0 8

♃ TAVOLA IV. *Equazioni di Longitudine* (in secondi d' arco).

N	II (0)	III (0)	IV (0)	V (0)	II (100)	III (100)	IV (100)	V (100)	II (200)	III (200)	IV (200)	V (200)
0	202,8	112,8	97,6	106,5	92,7	26,2	143,7	27,9	271,9	1,8	164,9	0,0
10	180 9	104 3	102 9	97 1	98 7	19 6	147 2	22 4	295 9	3 5	165 3	0 6
20	160 8	95 5	108 0	87 9	108 2	13 6	150 4	17 6	318 7	5 7	165 3	1 9
30	142 6	86 6	113 1	79 1	121 0	9 3	153 3	13 2	339 7	8 4	165 1	3 7
40	126 7	77 4	118 0	70 6	136 9	5 5	156 0	9 5	358 5	11 4	164 4	6 2
50	113 4	68 2	122 8	62 4	155 4	2 8	158 2	6 4	374 7	14 9	163 5	9 3
60	102 9	59 1	127 4	54 6	176 3	1 0	160 2	3 8	388 0	18 9	162 2	13 0
70	95 3	50 1	131 8	47 2	198 9	0 1	161 9	1 9	398 1	23 0	160 1	17 3
80	91 0	41 6	136 0	40 3	222 8	0 0	163 2	0 7	404 8	28 2	158 8	22 1
90	90 1	33 6	140 0	33 8	247 4	0 6	164 2	0 4	408 1	34 3	156 7	27 5

N	II (300)	III (300)	IV (300)	V (300)	II (400)	III (400)	IV (400)	V (400)	II (500)	III (500)	IV (500)	V (500)
0	408,1	40,8	154,3	33,3	257,5	130,9	117,5	115,5	36,8	209,3	68,7	214,8
10	404 9	47 9	151 6	39 9	233 0	144 2	112 9	125 3	23 8	214 8	63 8	224 2
20	398 4	55 8	148 6	46 8	208 0	153 5	108 2	135 2	13 5	220 3	59 0	233 3
30	388 9	64 4	145 4	54 1	183 0	162 1	103 4	145 2	6 0	225 7	54 2	242 2
40	376 6	73 6	142 1	61 9	158 3	170 3	98 5	155 3	1 5	230 9	49 5	250 7
50	361 7	83 4	138 4	70 1	134 3	177 8	93 5	165 4	0 0	236 0	45 0	258 9
60	344 4	93 4	134 6	78 6	111 0	184 9	88 6	175 5	1 6	240 9	40 6	266 7
70	325 1	103 8	130 6	87 3	89 9	191 5	83 6	185 5	6 2	245 6	34 3	274 0
80	303 9	114 2	126 3	96 5	70 0	197 7	78 6	195 4	13 8	249 8	32 3	281 0
90	281 3	124 5	122 0	105 9	52 2	203 6	73 6	205 2	24 2	253 6	28 4	287 5

N	II (600)	III (600)	IV (600)	V (600)	II (700)	III (700)	IV (700)	V (700)	II (800)	III (800)	IV (800)	V (800)
0	37,4	256,9	24,7	293,4	270,9	259,4	1,3	321,3	481,8	246,0	8,4	287,9
10	53 2	259 6	21 2	298 9	298 2	258 2	0 5	320 7	490 4	243 0	10 9	281 4
20	71 5	261 5	17 9	303 7	324 9	257 0	0 0	319 4	496 0	239 4	13 7	174 5
30	91 7	262 9	14 9	308 2	350 7	256 0	0 0	317 6	498 5	235 1	16 7	267 2
40	113 9	263 6	12 1	311 8	375 4	255 0	0 2	315 1	498 1	230 2	20 1	259 4
50	137 7	263 8	9 6	315 3	398 5	254 0	0 8	312 0	494 4	224 6	23 7	251 3
60	162 1	263 4	7 3	317 4	419 8	252 9	1 7	308 3	487 8	218 4	27 5	242 8
70	189 1	262 7	5 4	319 3	438 9	251 7	2 6	307 3	478 4	211 7	31 6	233 9
80	216 0	261 7	3 7	320 6	455 9	250 2	4 4	299 2	466 2	204 7	36 0	224 7
90	243 4	260 6	2 3	321 3	470 3	248 4	6 3	293 8	451 5	197 4	40 5	215 4

N	II (900)	III (900)	IV (900)	V (900)
0	434,5	189,9	45,2	205,8
20	394 9	174 6	55 1	186 1
40	348 7	159 5	65 4	166 0
60	299 6	144 4	76 1	145 8
80	250 0	129 0	86 9	125 9

Arg	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
XIV	0,1	0,0	0,3	0,8	1,3	1,7	1,8	1,5	1,0	0,4
XV	1 3	1 1	0 5	0 9	0 3	1 3	2 3	2 6	2 1	1 5

Costante da togliersi $= 11'53'',2$

Riduz. all'Eccl. $= 26'',84$ sen 2 (long ♃ − ☊)

N	VI	VII	N
0	0,2	0,2	950
50	1 7	1 4	900
100	4 5	3 5	850
150	8 3	6 7	800
200	12 8	10 3	750
250	17 6	14 1	700
300	22 1	17 7	650
350	25 9	20 8	600
400	28 7	23 0	550
450	30 2	24 2	500

N	VIII	IX	X
0	18,2	19 6	20,3
50	18 9	20,2	21 6
100	18 6	21 9	21 9
150	17 4	24 1	21 1
200	15 4	26 2	19 3
250	12 9	27 0	16 7
300	10 0	25 6	13 6
350	7 1	21 9	10 2
400	4 4	16 1	6 9
450	2 2	9 7	3 9
500	0 7	4 1	1 7
550	0 0	0 7	0 4
600	0 3	0 2	0 0
650	1 5	2 4	0 8
700	3 1	6 7	2 6
750	6 0	11 5	5 1
800	8 8	15 7	8 2
850	11 8	18 0	11 7
900	14 4	19 5	13 0
950	16 7	19 6	18 0

N	XI	XII	XIII
0	3,7	1,2	1,7
100	1 2	1 9	2 0
200	0 0	2 4	1 9
300	0 8	2 5	1 5
400	3 3	2 0	0 8
500	6 5	1 3	0 3
600	9 2	0 5	0 0
700	10 2	0 7	0 1
800	9 4	0 4	0 5
900	6 9	0 5	1 2

Ang. φ per l' Eq. I. Arg. an. m. corr.

G	0ˢ −		Iˢ −		IIˢ −		IIIˢ −		IVˢ −		Vˢ −		G
0	0	0	98'	52''	174'	21''	206'	21''	184'	0''	108'	27''	30
3	10	17	107	49	179	47	207	1	178	35	98	37	27
6	20	22	116	32	184	49	206	55	172	42	88	27	24
9	30	48	124	58	189	18	206	3	166	16	78	2	21
12	40	54	133	6	193	20	204	34	159	24	67	21	18
15	50	56	140	52	196	56	202	30	151	58	56	26	15
18	60	51	148	23	199	52	199	58	144	7	45	21	12
21	70	36	155	27	202	18	196	48	135	46	34	10	9
24	80	15	162	10	204	13	193	6	127	4	22	21	6
27	89	39	168	27	205	38	188	45	117	56	11	25	3
30	98	52	174	21	206	21	184	0	108	27	0	0	0
G	XIˢ +		Xˢ +		IXˢ +		VIIIˢ +		VIIˢ +		VIˢ +		G

L. Eq. I^a. $= 4,2983289 +$ *L.* sen (An. m. corr. $+ \varphi$)

L. Eq. Sec. (addit. dopo il 1800) $= 7,50101 +$ *L.* Eq. I^a.

Latit. nel 1800 $= 4731,5$ sen (♃ − ☊)

Eq. S. (sott. dopo il 1800) $= 0,0048$ latit.

Equazioni di Latitudine

Arg. 1 = IV + 200 | Arg. 3 = III + 600

Arg. 2 = V + 400 | Arg. 4 = IX

Equazioni positive

N	1	2	3	4	N	1	2	3	4
0	0,0	6,9	0,0	0,1	500	1,7	0,5	1,3	1,0
100	0 5	7 5	0 0	0 0	600	1 1	0 0	1 2	1 1
200	1 1	7 3	0 5	0 1	700	0 5	0 9	0 8	1 0
300	1 7	5 0	0 8	0 3	800	0 0	2 9	1 0	0 7
400	1 9	2 5	0 8	0 7	900	0 0	5 3	0 1	0 4

Costante negativa $= -5,8$

♄

S A T U R N O

TAVOLA I. 1ª. *Parte*. Epoche.

Anni	longit. media	Arg. I Anom. med.	Ar. II	Ar. III	Ar. IV	Ar. VII	Ar. VIII	Ar. IX	Ar. XI	Ar. XIV	Ar. XVI	Arg. ☊
1603	7ˢ22°46′43″2	10ˢ27°26′57″	956,7	671,9	771,3	602	499	517	519	382	686	306,2290
1703	0 16 16 44,3	3 19 1 13	1 0	313 5	56 3	769	718	722	949	397	490	308 5960
1803	5 9 46 45 4	8 10 35 29	36 3	955 1	341 2	937	937	926	379	411	294	310 9637
1903	10 3 16 46 4	1 2 9 44	71 6	596 7	626 1	105	156	130	809	425	98	313 3295

Arg. V = Arg. II − Arg. IV + 150 | Arg. XII = Arg. II + Arg. IV + 550
Arg. VI = Arg. II + Arg. III + 740 | Arg. XIII = Arg. II + Arg. XI + 100
Arg. X = Arg. II + Arg. VI + 900 | Arg. XV = Arg. XI + Arg. XII + 100
Arg. XVII = Arg. XI − XIV

Per gli Anni 1700, 1701, 1702; 1800, ec. si tolgano i moti medj per un Giorno

2ª. *Parte*. Costanti da moltiplicarsi per il quoziente $\frac{1}{4}$.

longit. media	anom. media	II	III	IV	VII	VIII	IX	XI	XIV	XVI	☊
1ˢ18°56′28″,87	1ˢ18°51′51″,0	201,42	65,67	131,39	126,6	128,7	88,1	337,2	40,5	312,2	0,09467

3ª. *Parte*. Resti da sommarsi.

Resti	longit. media	anom. med.	II	III	IV	VII	VIII	IX	XI	XIV	XVI	☊
1	0ˢ12°15′37″7	0ˢ12°14′28″	50,4	16,4	32,8	31	32	22	84	10	78	0,0238
2	0 24 29 14,7	0 24 26 56	100 8	32 9	65 7	63	64	44	168	20	157	0 0472
3	1 6 42 51 8	1 6 39 23	151 1	49 3	98 6	95	96	66	253	30	235	0 0710

TAVOLA II. *Logaritmi dei Moti diurni medj*

long. med.	anom. m.	II	III	IV	VII VIII	IX	XI	XIV	XVI	☊
8,5230257	3,524340	9,1399	8,6532	8,9526	8,9378	8,7781	9,3680	8,477	9,3291	5,813

TAV. III. *Grande inegualità di Saturno per correggere la Longitud. e Anom. med., e gli Arg*

Anni	longit. e anom. media	Differenze 1ª	Differenze 2ª	II	III	IV	VII	VIII	IX	XI	XIV	XVI
1750	−47′29″9	+51″1		+3,1	+5,3	+10,6	+24	−4	−2	+1	−2	−6
1760	48 21,0	37,8	13″3	3 1	5 4	10 8	24	4	2	1	2	7
1770	48 58 8	24 2	13,6	3 2	5 5	10 9	24	4	2	1	2	7
1780	49 23 0	10 5	13 7	3 2	5 5	11 0	24	5	2	1	2	7
1790	49 33 5	− 3 2	13 7	3 3	5 5	11 0	24	5	2	1	2	7
1800	49 30 3	17 1	13 9	3 3	5 5	11 0	24	5	2	1	2	7
1810	49 13 2	31 0	13 9	3 3	5 5	11 0	24	5	2	1	2	7
1820	48 42 2	44 6	13 6	3 2	5 4	10 9	24	5	2	1	2	7
1830	47 57 6	58 0	13 4	3 1	5 3	10 7	23	5	2	1	2	7
1840	46 59 6	1 11 5	13 5	3 1	5 2	10 5	23	4	2	1	2	6
1850	45 48 1	24 3	12 8	3 0	5 1	10 2	22	4	2	1	2	6
1860	44 23 8	36 7	12 4	2 9	5 0	9 9	21	4	2	1	2	6
1870	42 47 1	48 7	12 0	2 8	4 8	9 6	21	4	2	1	2	6
1880	40 58 4	2 0 6	11 9	2 7	4 6	9 2	20	4	2	1	2	6
1890	38 57 8	11 7	11 1	2 5	4 3	8 7	19	3	2	1	2	6
1900	36 46 1			2 4	4 1	8 2	18	3	2	1	2	5

TAVOLETTA *per le seconde Differenze*.

	A n n i				
Differ. seconde	I IX	II VIII	III VII	IV VI	V
11″	0″,5	0″,9	1″,2	1″,3	1″,4
12	0 5	1 0	1 3	1 5	1 5
13	0 6	1 0	1 4	1 5	1 6
14	0 6	1 1	1 5	1 7	1 8

♄ TAVOLA IV. *Equazioni di Longitudine* (In secondi d' arco).

N	II 0	II 100	II 200	II 300	II 400	III 0 +	IV 500 −	III 100 +	IV 600 −	III 200 +	IV 700 −
0	81,0	41,7	49,7	63,1	54,4	663,4	643,2	817,4	255,3	819,3	25,1
10	75 5	40 8	51 5	64 2	52 0	684 4	601 3	824 9	223 1	810 5	14 9
20	70 0	40 4	53 5	64 2	49 4	704 3	559 6	830 9	192 6	800 2	7 3
30	64 7	40 5	55 3	64 0	46 6	723 1	518 4	835 1	164 0	788 5	2 4
40	59 7	41 0	57 1	63 4	43 6	740 6	477 8	837 8	137 4	775 2	0 0
50	55 2	41 9	58 7	62 6	40 5	756 9	437 9	838 8	112 9	760 5	0 3
60	51 2	43 1	60 2	61 5	37 4	771 9	398 9	838 2	90 6	744 6	3 2
70	47 8	44 5	61 5	60 1	34 1	785 5	361 0	835 9	70 7	727 3	8 8
80	45 2	46 1	62 5	58 8	30 5	797 7	324 4	832 0	53 0	708 2	16 9
90	43 1	47 8	63 4	56 6	27 6	808 2	289 0	826 4	37 8	689 1	28 6

N	500	600	700	800	900	300 +	800 −	400 +	900 −
0	24,4	1,0	13,1	62,4	105,5	668,4	40,9	422,5	298,5
10	21 2	0 3	16 7	68 1	106 6	646 8	56 6	396 1	333 1
20	18 1	0 0	20 7	73 7	107 0	624 2	74 7	369 9	369 0
30	15 2	0 1	25 1	79 0	106 5	600 8	95 3	343 9	407 2
40	12 4	0 7	29 7	84 1	105 2	576 7	118 0	318 1	446 4
50	9 8	1 6	34 8	88 4	102 9	552 0	143 0	292 7	486 4
60	7 5	3 1	40 0	93 4	99 8	526 7	170 0	267 9	527 2
70	5 4	5 0	45 5	97 2	95 9	501 0	198 9	243 6	588 7
80	3 6	7 3	51 0	100 7	91 4	475 1	229 8	220 1	610 3
90	2 1	10 1	56 7	103 4	86 4	448 8	262 3	197 3	652 2

Variaz. Sec.

N	III ±	IV ±
0	1,3	0,0
100	2 1	0 9
200	2 1	1 5
300	1 3	1 5
400	0 0	0 9
500	1 3	0 0
600	2 1	0 9
700	2 1	1 5
800	1 3	1 5
900	0 0	0 9

N	V +	VI +	VII +	VIII +	N
0	1,1	33,4	3,2	33,1	500
30	0 0	29 0	1 7	28 0	530
60	0 6	24 4	0 6	22 8	560
90	3 0	19 8	0 1	17 9	590
120	6 9	15 4	0 1	13 2	620
150	12 3	11 2	0 6	9 0	650
180	19 0	7 6	1 6	5 6	680
210	26 7	4 8	3 1	2 8	710
240	35 2	2 2	5 0	1 0	740
270	44 1	0 7	7 3	0 1	770
300	53 2	0 0	9 8	0 1	800
330	62 1	0 2	12 5	1 2	830
360	70 5	1 2	15 3	3 1	860
390	78 2	3 1	18 1	5 9	890
420	84 7	5 7	20 8	9 4	920
450	90 0	9 0	23 3	13 6	950
480	93 8	12 9	25 4	18 3	980
500	95 5	15 7	26 7	21 6	1000
N	−	−	−	−	N

Costanti per l'Equaz. neg.

Eq.	Cost.	Eq.	Cost.
III	+ 838,9	VI	+ 49,1
IV	1337 4	VII	29 9
V	96 6	VIII	54 7

N	IX
0	20,8
40	26 8
80	31 3
120	32 3
160	29 4
200	23 0
240	14 8
280	6 9
320	1 5
360	0 1
400	3 4
440	10 5
480	19 7
520	28 9
560	36 3
600	40 8
640	42 0
680	40 3
720	36 4
760	31 0
800	25 1
840	19 3
880	15 1
920	13 7
960	15 8

N	X +	XI +	XII +	XIII +	XIV +	N
0	0,5	20,9	5,4	4,6	19,3	500
50	1 3	18 6	5 8	5 3	19 7	550
100	2 7	15 6	5 9	5 8	19 2	600
150	4 1	12 2	5 7	6 0	17 8	650
200	5 7	8 6	5 2	5 9	15 6	700
250	7 1	5 4	4 5	5 6	12 9	750
300	8 3	2 7	3 7	5 0	9 8	800
350	9 3	0 8	2 8	4 1	6 8	850
400	9 7	0 0	1 9	3 2	4 0	900
450	9 7	0 3	1 1	2 3	1 8	950
500	9 3	1 4	0 5	1 4	0 4	1000
N	−	−	−	−	−	N

N	XV	XVI	XVII
0	0,2	0,0	0,5
100	0 8	0 3	1 2
200	1 6	1 1	2 1
300	2 4	2 1	2 6
400	2 8	2 8	2 7
500	2 7	3 1	3 3
600	2 1	2 7	1 5
700	1 2	1 9	0 7
800	0 4	1 0	0 1
900	0 0	0 3	0 0

Costanti per l' Equazioni negative

Eq.	Cost.
X	+ 9,7
XI	22 5
XII	5 9
XIII	6 0
XIV	19 7

Costante da togliersi = 1311,2

Rid. all' Eclit. = 97,825 *sen* 2 Arg lat.

Angolo φ per l' Equaz. I. *Arg. An.* media corretta

G	O^s −	I^s −	II^s −	III^s −	IV^s −	V^s −	G
0	0′0″	114′27″	202′27″	241′23″	215′25″	127′25″	30
2	7 55	121 25	206 48	242 9	211 12	119 47	28
4	15 51	128 16	210 53	244 20	206 55	111 50	26
6	23 45	134 58	214 45	241 30	202 19	104 0	24
8	31 38	141 31	218 22	240 31	197 26	95 52	22
10	39 28	148 0	221 46	239 29	192 17	87 36	20
12	47 18	154 14	224 56	238 25	186 52	79 13	18
14	55 3	160 20	227 50	237 9	181 11	70 42	16
16	62 46	166 16	230 25	235 22	175 15	62 8	14
18	70 24	172 2	232 43	233 25	169 4	53 23	12
20	78 0	177 35	234 52	231 9	162 41	44 37	10
22	85 27	182 59	236 39	228 34	156 4	35 47	8
24	92 50	188 9	238 18	225 41	149 13	26 52	6
26	100 9	193 14	239 34	222 30	142 12	17 54	4
28	107 20	197 54	240 30	219 1	134 53	8 59	2
30	114 27	202 27	241 23	215 25	127 25	0 0	0
G	XI^s +	X^s +	IX^s +	VIII^s +	VII^s +	VI^s +	G

log Eq. I (ha il segno di φ) = 4,3649823 + *log sen* (Anomalia media corretta + φ)

log Eq. Secolare (sottrattiva dopo il 1800) = 7,75264 + *log* Equazione I.

Latitudine Eliocentrica 8978,1 *sen* (♄ − ☊)

Eq. Sec. dopo il 1800 − 13,51 *sen* Arg lat

Cost. negativa = − 12″

Equazioni positive.

N	III	N	N	III	N	N	III	N	N	III	N	XI	VI	VIII	N
0	16,8	1000	150	13,3	850	300	5,8	700	450	2,4	0	3,7	1,0	0,0	1000
50	16 4	950	200	11 0	800	350	3 4	650	500	0 0	250	1 9	0 4	0 7	750
100	15 2	900	250	8 4	750	400	1 6	600	550	0 4	500	0 0	0 0	1 4	500

♅ URANO

TAVOLA I. 1ª. Parte. Epoche.

Anni	Longit. media	Arg. I. Anom. media	Arg II	Arg III	Arg IV	Ar V	Ar VI	Ar II	Ar VIII	☊
1603	1ˢ 16° 41 10 3	2ˢ 2° 13 43′	344	124,9	755,5	482	310	898	516	199,9730
1703	3 26 31 47 4	4 10 36 20	359	140 5	931 7	722	360	177	721	201 1844
1803	6 6 22 24 5	6 18 58 57	373	156 1	107 1	962	410	337	926	202 3958
1903	8 16 13 1 6	8 17 21 35	389	171 7	282 9	202	460	553	131	203 6072

Per gli Anni 1700, 1701, 1702 ; ec. si tolgano dall' Epoche i moti per un giorno.

2ª. Parte. Costanti da moltiplicarsi per il quoziente $\frac{f}{4}$.

Long. media	Anom. media	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	☊
0ˢ 17° 11′ 39″,18	0ˢ 17° 8′ 8″,0	40,6	40,62	7,63	289,6	242	128,8	90,2	0,04846

3ª. Parte. Costanti da sommarsi.

Resto	Long. media	An. media	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	☊
1	0ˢ 4° 18 26′,6	0ˢ 4° 17 44	10	10,2	1,8	72	60	32	22	0,0123
2	0 8 36 10 8	0 8 34 25	20	20 3	3 5	145	121	64	44	0 0239
3	0 12 53 55 0	0 12 51 17	30	30 5	5 3	217	181	97	66	0 0363

TAVOLA II. Moti medj per i Giorni dell' Anno.

Giorni	Long. media	An. media	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	☊
1	0ˢ 0° 0′ 42″,4	0ˢ 0° 0′ 42″	0	0,0	0,0	0	0	0	0	0,0000
2	0 0 1 24 7	0 0 1 25	0	0	0	0	0	0	0	1
3	0 0 2 7 1	0 0 2 7	0	1	0	1	0	0	0	1
4	0 0 2 49 5	0 0 2 48	0	1	0	1	1	0	0	1
5	0 0 3 31 8	0 0 3 31	0	1	0	1	1	0	0	2
6	0 0 4 14 2	0 0 4 13	0	2	0	1	1	1	0	2
7	0 0 4 56 6	0 0 4 56	0	2	0	1	1	1	0	2
8	0 0 5 38 9	0 0 5 38	0	2	0	1	1	1	0	3
9	0 0 6 21 3	0 0 6 20	0	2	0	2	1	1	0	3
10	0 0 7 3 7	0 0 7 3	0	3	0	2	2	1	1	3
20	0 0 14 7 4	0 0 14 5	1	6	1	4	3	1	2	7
30	0 0 21 11 0	0 0 21 7	1	8	1	6	5	2	3	0,0010
40	0 0 28 14 7	0 0 28 9	2	11	2	8	7	3	3	13
50	0 0 35 18 4	0 0 35 11	2	14	2	10	8	3	4	17
60	0 0 42 22 1	0 0 42 13	3	17	3	12	10	4	5	20
70	0 0 49 25 8	0 0 49 16	3	19	3	14	12	4	6	23
80	0 0 56 29 4	0 0 56 18	3	22	4	16	13	5	7	27
90	0 1 3 33 1	0 1 3 20	4	25	4	18	15	6	8	30
100	0 1 10 36 8	0 1 10 22	4	28	5	20	17	6	9	33
200	0 2 21 13 6	0 2 20 45	9	55	9	39	33	13	17	67
300	0 4 30 50 4	0 3 31 7	13	83	1,4	59	50	19	26	0,0103

TAVOLA III. Moti medj per le Ore e Minuti in Longitud. e Anom. media.

Ore	Longit. e An. med	Ore	Longit. e An. med	Ore	Longit. e An. med.	min	Longit. e An. med.	min	Longit. e An. med	min	Longit. e An. med.
1	1″,8	9	15″,9	17	30″,0	1	0″,0	15	0″4	39	1″1
2	3 5	10	17 7	18	31 8	2	0 0	18	0 5	42	1,2
3	5 3	11	19 4	19	33 6	3	0 1	21	0 6	45	1 3
4	7 1	12	21 2	20	35 3	4	0 1	24	0 7	48	1 4
5	8 8	13	22 9	21	37 1	5	0 1	27	0 8	51	1 5
6	10 6	14	24 7	22	38 8	6	0 2	30	0 9	54	1 6
7	12 4	15	26 5	23	40 6	9	0 3	33	1 0	57	1 7
8	14 1	16	28 2	24	42 4	12	0 4	36	1 1	60	1 8

♅

TAVOLA IV. *Equazioni di Longitudine*

Angolo Φ per l' Equazione I (dell' Orbita) Argomento Anom. media ♅

G	0ˢ −	Iˢ −	IIˢ −	IIIˢ −	IVˢ −	Vˢ −	G
0	0° 0' 0''	1°36'23''	2°50'22''	3°32'46''	2°56'41''	1°44'44''	30
3	0 11 2	1 45 09	2 55 48	4 16 42	2 51 40	1 35 4	27
6	0 20 1	1 53 39	3 0 46	3 4 10	2 46 9	1 25 19	24
9	0 29 59	2 1 53	3 5 25	3 11 33	2 40 3	1 15 14	21
12	0 39 51	2 9 50	3 9 32	3 12 51	2 33 26	1 5 0	18
15	0 49 39	2 17 27	3 13 15	3 12 21	2 26 17	0 54 27	15
18	0 59 19	2 24 46	3 16 36	3 10 40	2 18 50	0 43 47	12
21	1 8 51	2 22 47	3 19 46	3 8 11	2 10 31	0 32 57	9
24	1 18 13	2 38 19	3 22 54	3 4 59	2 2 27	0 22 1	6
27	1 27 25	2 44 32	3 26 16	3 1 10	1 53 42	0 11 1	3
30	1 36 23	2 50 22	3 32 46	2 56 41	1 44 44	0 0 0	0
G	XIˢ +	Xˢ +	IXˢ +	VIIIˢ +	VIIˢ +	VIˢ +	G

An. m.	Equaz. Secol. +	An. m.
0ˢ 0	0',0	XIIˢ 0
15	2 5	15
I 0	5 0	XI 0
15	7 1	15
II 0	9 0	X 0
15	10 3	15
III 0	10 9	IX 0
15	10 9	15
IV 0	10 1	VIII 0
15	8 4	15
V 0	6 1	VII 0
15	3 2	15
VI 0	0 0	VI 0
	−	

Log Equazione I (ha il segno stesso che Φ) = 4,2848730

N	II	III	IV	V	N	II	III	IV	V	N	II	III	IV	V	N	VI	VII	VIII
0	38,4	50,0	150,0	273,1	330	48,6	11,3	281,4	71,1	660	3,4	87,3	23,4	73,2	0	60,0	5,0	3,5
10	39 0	47 3	159 4	272 5	340	47 7	12 7	276 5	64 1	670	3 3	88 7	18 6	80 6	30	69 7	4 3	4 0
20	39 6	44 6	168 8	271 4	350	46 5	14 5	271 4	57 4	680	3 4	90 8	14 3	88 2	60	79 2	3 6	4 5
30	40 1	41 7	178 1	269 7	360	45 2	16 0	265 5	51 0	690	3 5	91 0	10 6	96 0	90	87 9	3 0	5 1
40	40 7	39 0	187 3	267 6	370	43 9	17 8	259 3	44 9	700	3 8	92 0	7 4	104 0	120	95 7	2 5	5 7
50	41 3	36 4	196 4	264 9	380	42 5	19 8	252 7	39 2	710	4 2	92 8	4 7	112 1	150	102 3	2 0	6 3
60	41 9	33 7	205 2	261 8	390	41 0	21 8	245 6	34 0	720	4 8	93 4	2 7	120 4	180	107 4	1 7	6 8
70	42 5	31 2	213 9	258 2	400	39 4	24 0	238 2	29 1	730	5 5	93 8	1 2	128 7	210	110 8	1 4	7 6
80	43 2	28 7	222 3	254 0	410	37 8	26 3	230 4	24 7	740	6 3	94 1	0 3	137 1	240	112 4	1 3	7 7
90	43 9	26 3	230 4	249 5	420	36 1	28 7	222 3	20 7	750	7 2	94 2	0 0	145 4	270	112 1	1 3	7 8
100	44 7	24 0	238 2	244 6	430	34 4	31 2	213 9	17 2	760	8 3	94 1	0 3	153 8	300	111 0	1 5	8 0
110	45 4	21 7	245 6	239 1	440	32 7	33 7	205 2	14 2	770	9 4	93 6	1 2	162 1	330	106 2	1 8	8 1
120	46 2	19 8	252 7	233 3	450	30 8	36 4	196 4	11 7	780	10 7	93 4	2 7	170 3	360	100 7	2 2	8 [illegible]
130	47 0	17 8	259 3	227 2	460	29 0	39 0	187 3	9 7	790	12 1	92 6	4 7	178 4	390	93 6	2 6	7 9
140	47 8	16 0	265 5	220 7	470	27 1	41 7	178 1	8 2	800	13 6	92 0	7 4	186 5	420	85 [illegible]	3 2	7 7
150	48 6	14 3	271 4	213 9	480	25 2	44 5	168 8	7 2	810	15 0	91 1	10 6	194 6	450	76 3	3 9	7 3
160	49 2	12 7	276 6	206 4	490	23 4	47 3	159 4	6 8	820	16 6	90 0	14 3	201 6	480	66 6	4 5	6 9
170	49 9	11 3	281 4	199 4	500	21 6	50 0	150 0	6 9	830	18 1	88 7	18 6	208 9	510	56 7	5 2	6 4
180	50 5	10 0	285 7	191 8	510	19 8	52 7	140 6	7 5	840	19 7	87 3	23 4	215 9	540	46 8	5 9	5 8
190	51 1	8 9	289 4	184 0	520	18 1	55 5	131 2	8 6	850	21 3	85 7	28 6	222 6	570	37 5	6 6	5 3
200	51 7	8 0	292 6	176 0	530	16 3	58 3	121 9	10 3	860	[illegible] 9	84 0	34 [illegible]	229 0	600	29 0	7 2	4 7
210	52 1	7 2	295 5	167 9	540	14 8	61 0	112 7	12 4	870	24 5	82 2	40 7	235 8	630	21 5	7 7	4 1
220	52 4	6 6	297 8	159 6	550	13 3	63 6	103 6	15 1	880	26 0	80 [illegible]	47 3	240 8	660	15 5	8 3	3 6
230	52 7	6 2	298 8	151 [illegible]	560	11 [illegible]	66 3	94 8	18 [illegible]	890	27 5	78 2	54 4	246 0	690	11 1	8 4	2 9
240	52 8	5 9	299 7	142 9	570	10 4	68 8	86 1	21 8	900	28 9	76 0	61 8	250 9	720	8 3	8 6	2 4
250	52 8	5 8	300 0	134 [illegible]	580	9 2	71 3	77 7	26 0	910	30 1	73 7	69 6	255 3	750	7 5	8 7	2 3
260	52 7	5 9	299 7	126 [illegible]	590	8 0	73 7	69 6	30 [illegible]	920	31 4	71 3	77 7	259 3	780	8 6	8 6	2 1
270	52 4	6 2	298 8	117 [illegible]	600	7 0	76 0	61 8	35 5	930	32 6	68 8	86 1	262 8	810	11 3	8 4	2 0
280	52 1	6 6	297 8	109 7	610	6 1	78 2	54 4	40 9	940	33 6	66 3	94 8	265 8	840	15 9	8 1	1 9
290	51 6	7 2	295 5	101 [illegible]	620	5 3	80 [illegible]	47 [illegible]	46 7	950	34 6	63 6	103 6	268 3	870	21 9	7 7	2 1
300	51 0	8 0	292 6	93 [illegible]	630	4 7	82 2	40 7	52 8	960	35 4	61 0	112 7	270 [illegible]	900	29 4	7 2	2 2
310	50 3	8 9	289 4	86 [illegible]	640	4 0	84 0	34 [illegible]	59 [illegible]	970	36 [illegible]	58 3	121 9	271 [illegible]	930	37 7	6 6	2 5
320	49 5	10 0	285 7	78 [illegible]	650	3 6	85 7	28 [illegible]	66 1	980	[illegible] 7	55 [illegible]	131 [illegible]	27[illegible]	960	47 0	[illegible]	2 8
330	48 6	11 3	281 4	71 1	660	3 4	87 3	23 4	73 2	990	37 7	52 [illegible]	140 [illegible]	273 [illegible]	990	56 [illegible]	[illegible]	[illegible]

Costante da togliersi = 7' 20''; Riduz. all' Eclittica = 9'',3 sen 2 Arg. Latit.

Latitudine nel 1800 = 2786'',0 sen (Longitudine vera ♅ − ☊).

Variazione secolare (additiva dopo il 1800) = [illegible]'' sen Arg. latit.

Distanza dei Pianeti dal Sole.

supposta la distanza media della Terra = 1

Argomento. Anom media di ciascun Pianeta.

	☿	♀	♁	♂	♃	♄	♅	
0ˢ 0°	0,466694	0,728295	1,016691	1,66574	5,44655	10,04378	20,0722	0° XIIˢ
3	6615	288	668	557	623	4349	711	27
6	6385	268	602	509	529	4111	677	24
9	6018	234	491	427	374	3783	622	21
12	5493	188	356	323	154	3322	543	18
15	4819	128	137	167	5,43875	2733	443	15
18	3996	055	1,015895	1,65990	536	2055	321	12
20	3363	0,727999	710	854	274	1464	228	10
22	2667	938	507	704	5,42989	0858	125	8
24	1905	871	285	539	674	0197	19,9012	6
26	1076	799	044	362	335	9,99483	891	4
28	0184	721	1,014786	170	5,41971	8713	760	2
1ˢ 0	0,459227	638	510	1,64965	579	7887	620	0 XIˢ
1	8722	595	366	858	374	7454	547	29
2	8202	550	217	747	163	7010	472	28
3	7667	504	064	633	5,40947	6553	394	27
4	7116	457	1,013906	511	725	6082	314	26
5	6549	408	745	395	496	5599	232	25
6	5965	359	579	270	261	5103	148	24
7	5366	308	410	144	018	4594	062	23
8	4752	256	236	013	5,39772	3962	19,8973	22
9	4121	202	058	1,63879	520	3538	882	21
10	3473	147	1,012877	743	262	3013	790	20
11	2811	092	691	603	5,38998	2434	696	19
12	2134	035	502	461	729	1864	599	18
13	1440	0,726977	309	315	453	1282	501	17
14	0731	918	112	166	172	0688	400	16
15	0007	858	1,011911	014	5,37887	0083	298	15
16	0,449267	797	707	1,62859	595	9,89466	193	14
17	8512	735	499	701	298	8839	087	13
18	7741	671	288	540	5,36997	8199	19,7979	12
19	6956	607	074	376	690	7549	869	11
20	6155	542	1,010856	210	378	6888	757	10
21	5339	476	634	041	060	6217	643	9
22	4509	408	410	1,61869	5,35738	5536	528	8
23	3664	340	182	694	411	4845	411	7
24	2804	271	1,009951	516	080	4143	293	6
25	1929	201	717	336	5,34744	3431	172	5
26	1033	130	480	153	503	2708	050	4
27	0136	059	240	1,60968	058	1976	19,6926	3
28	0,439217	0,725986	1,008998	780	5,33708	1236	801	2
29	8285	913	752	589	354	0486	675	1
IIˢ 0	7339	839	504	396	5,32996	9,79727	547	0 Xˢ
1	6378	764	253	200	634	8958	417	29
2	5403	688	000	002	268	8181	286	28
3	4415	612	1,007744	1,59802	5,31897	7395	153	27
4	3412	535	486	599	523	6601	19,5019	26
5	2397	457	225	395	159	5799	884	25
6	1367	379	1,006962	187	5,30763	4990	748	24
7	0324	299	697	1,58978	377	4173	610	23
8	0,429269	220	430	767	5,29990	3348	470	22
9	8199	140	161	553	598	2516	330	21
10	7117	059	1,005890	338	203	1676	189	20 IXˢ

Distanza dei Pianeti dal Sole.

Supposta la distanza media della Terra = 1
Argomento. Anom. media del Pianeta.

	☿	♀	♁	♂	♃	♄	♅	
II^s 10	0,410117	0,725059	1,005890	1,58338	5,29203	9,71676	19,5189	20° IX^s
11	0,426023	0,724978	617	121	8856	9,70831	047	19
12	4915	896	342	1,57901	8405	9979	19,4904	18
13	3796	814	065	687	8001	9120	759	17
14	2664	731	1,004787	457	7593	8255	613	16
15	1519	648	507	232	6984	7384	467	15
16	0363	564	226	006	6773	6507	319	14
17	0,419195	480	1,003943	1,56777	6358	5625	171	13
18	8015	396	659	548	6941	4739	022	12
19	6824	311	374	316	5521	3846	19,3872	11
20	5622	226	088	083	5099	2948	722	10
21	4408	141	1,002801	1,55849	4676	2047	570	9
22	3172	056	512	613	4151	1142	418	8
23	1949	0,723970	223	376	3824	0232	266	7
24	0704	884	1,001933	138	3395	9,59318	113	6
25	0,409448	798	643	489	2966	8402	19,2959	5
26	8183	711	351	1,54658	2536	7482	804	4
27	6907	635	062	417	2102	6560	650	3
28	5623	539	1,000767	074	1669	5634	495	2
29	4329	452	475	1,53931	1244	4706	340	1
III^s 0	3026	366	182	686	0799	3776	184	0 IX^s
1	1714	279	0,999889	441	0362	2834	028	29
2	0394	192	596	195	5,19926	1910	19,1872	28
3	0,399066	106	303	1,52949	9489	0976	716	27
4	7729	019	010	702	9051	0039	559	26
5	6386	0,722933	0,998717	454	8612	9,49103	403	25
6	5035	846	425	206	8175	8165	246	24
7	3677	760	132	1,51958	7738	7228	090	23
8	2313	674	0,997841	709	7300	6292	19,0934	22
9	0942	589	550	460	6863	5355	777	21
10	0,389565	503	259	212	6426	4419	621	20
11	8182	417	0,996969	1,50963	5990	3485	466	19
12	6795	332	680	713	5554	2551	310	18
13	5402	247	392	465	5119	1620	155	17
14	4005	163	105	216	4686	0691	000	16
15	2603	079	0,995819	1,49968	4254	9,39764	18,9846	15
16	1198	995	534	720	3823	8839	691	14
17	0,379790	0,721912	251	472	3298	7916	538	13
18	8379	829	0,994968	224	2965	6997	385	12
19	6963	746	688	1,48978	2538	6082	233	11
20	5549	664	408	732	2114	5170	082	10
21	4131	583	131	487	1592	4262	18,8930	9
22	2713	502	0,993855	243	1271	3359	780	8
23	1293	421	581	1,47999	0853	2460	631	7
24	0,369874	341	308	755	0438	1567	483	6
25	8454	262	038	516	0024	0679	335	5
26	7036	183	0,992770	276	5,09614	9,29796	188	4
27	5619	105	504	037	9206	8918	042	3
28	4204	028	240	1,46800	8801	7957	18,7898	2
29	2791	952	0,991978	564	8411	7183	755	1
IV^s 0	1381	0,720875	719	329	8001	6326	613	0 VIII^s
1	0,359973	800	462	096	7606	5475	472	29
2	8572	726	208	1,45865	7214	4631	332	28
3	7175	652	0,990956	636	6826	3795	194	27
4	5783	580	707	409	6442	2966	057	26
5	4395	508	461	183	6163	2146	18,6921	25 VIII^s

Distanza dei Pianeti dal Sole

supposta la distanza media della Terra = 1.
Argomento. Anom. media del Pianeta.

		☿	♀	♁	♂	♃	♄	♅	
IVˢ	5°	0,354396	0,720508	0,990461	1,45183	5,06163	9,22146	18,6921	25° VIIIˢ
	6	3016	437	218	1,44960	5687	1335	787	24
	7	1643	366	0,989978	739	5315	0536	655	23
	8	0278	297	741	526	4947	9,19740	524	22
	9	0,348921	229	506	303	4584	8957	394	21
	10	7573	161	275	089	4226	8184	266	20
	11	6233	095	048	1,43877	3872	7421	140	19
	12	4908	029	0,988823	668	3524	6661	016	18
	13	3591	0,719965	602	462	3180	5923	18,5893	17
	14	2287	901	385	257	2842	5192	772	16
	15	0995	839	171	057	2507	4470	655	15
	16	0,339716	778	0,987961	1,42860	2180	3761	536	14
	17	8451	717	754	665	1857	3063	421	13
	18	7201	658	551	473	1540	2378	308	12
	19	5966	600	352	284	1227	1704	197	11
	20	4748	544	157	099	0922	1043	088	10
	21	3546	488	0,986965	1,41917	0564	0394	18,4981	9
	22	2362	433	778	758	0329	9,09758	877	8
	23	1197	380	595	563	0042	9135	774	7
	24	0051	328	416	392	4,99761	8526	674	6
	25	0,328922	277	241	224	9485	7932	576	5
	26	7820	227	070	060	9218	7351	480	4
	27	6736	179	0,985904	1,40900	8957	6785	387	3
	28	5674	132	742	744	8702	6241	296	2
	29	4636	086	584	592	8453	5694	208	1
Vˢ	0	3622	042	431	444	8212	5171	122	0 VIIˢ
	1	2631	0,718999	283	300	7977	4663	038	29
	2	1666	957	138	160	7751	4165	18,3957	28
	3	0,319990	916	0,984999	024	7530	3688	879	27
	4	9815	877	864	1,39893	7317	3228	803	26
	5	8931	840	734	766	7112	2782	729	25
	6	8075	803	609	644	6914	2352	659	24
	7	7247	768	488	526	6723	1939	591	23
	8	6430	735	373	412	6540	1542	526	22
	9	5682	702	262	304	6365	1160	463	21
	10	4946	672	156	200	6196	0795	403	20
	11	4241	642	055	101	6036	0448	346	19
	12	3691	615	0,983959	006	5884	0017	292	18
	13	2927	589	868	1,38917	5739	8,99802	240	17
	14	2322	563	782	832	5604	9508	192	16
	15	1748	540	701	752	5475	9229	147	15
	16	1209	518	625	677	5355	8967	103	14
	17	0706	497	555	607	5243	8723	063	13
	18	0237	478	489	542	5138	8494	026	12
	19	0,309806	461	429	482	5043	8289	18,2992	11
	20	9409	445	373	427	4956	8097	961	10
	21	9047	430	323	378	4874	7924	932	9
	22	8728	417	279	334	4804	7770	907	8
	23	8446	406	239	294	4741	7636	884	7
	24	8192	396	205	260	4686	7515	865	6
	25	7978	388	176	231	4641	7415	849	5
	26	7813	381	152	208	4608	7333	835	4
	27	7680	375	133	189	4573	7269	824	3
	28	7582	372	120	176	4551	7222	817	2
	29	7523	369	112	168	4538	7194	813	1
VIˢ	0	7503	369	110	163	4533	7184	811	0° VIˢ

Variazione Secolare delle distanze dei Pianeti dal Sole.

Argomento Anomalia media.

	♀ −	♁ ±	♂ +	♃ +	♄ −	♅ −	
0ˢ 0°	0000 79	0000 416	0000 13	0000 79	00 296	00 50	XIIˢ 0°
5	78	415	13	79	0 296	0 50	25
10	0 78	410	13	78	293	50	20
15	76	401	13	77	288	50	15
20	74	390	13	75	283	50	10
25	71	375	13	73	275	50	5
I 0	68	357	12	70	266	04	XI 0
5	65	336	11	67	254	04	25
10	61	313	11	64	242	04	20
15	56	287	10	60	227	04	15
20	51	259	10	55	209	04	10
25	46	229	09	50	173	03	5
II 0	40	197	08	45	172	03	X 0
5	34	164	07	40	154	03	25
10	28	130	06	34	130	02	20
15	21	095	05	28	109	02	15
20	15	059	04	21	084	01	10
25	8	022	04	15	061	01	5
III 0	1	014	02	07	033	00	IX 0

	♀ ∓	♁ −	♂ ±	♃ ±	♄ ∓	♅ +	
III 0°	0000 1	0000 014	0000 2	0000 07	00 033	0000 00	0° IXˢ
5	6	050	01	00	0 005	00	25
10	0 13	086	01	08	019	00	20
15	19	121	02	14	047	01	15
20	26	154	03	20	071	01	10
25	32	187	04	27	099	02	5
IV 0	38	218	05	33	122	02	0 VIII
5	44	248	07	40	148	03	25
10	41	276	08	46	169	03	20
15	55	301	08	52	193	03	15
20	60	325	10	58	215	04	10
25	64	345	10	62	231	04	5
V 0	68	364	11	67	249	04	0 VII
15	71	380	12	70	252	04	25
10	74	393	13	73	275	05	20
20	76	403	13	76	284	05	15
25	77	410	13	78	291	05	10
5	78	415	13	79	295	05	5
VI 0	79	416	13	79	296	05	VI

Perturbazioni delle distanze dei Pianeti dal Sole.

Argomenti di Longitudine.

Venere.

N	II	III	N
0	29	10	1000
20	30	10	980
40	32	10	960
60	35	10	940
80	39	10	920
100	41	10	900
120	42	10	880
140	40	11	860
160	36	11	840
180	30	11	820
200	23	10	800
220	16	10	780
240	10	10	760
260	4	9	740
280	1	8	720
300	0	7	700
320	1	6	680
340	4	6	660
360	10	4	640
380	17	3	620
400	24	2	600
420	32	2	580
440	40	1	560
460	46	1	540
480	50	0	520
500	51	0	500

N	IV	V
0	1	2
100	0	3
200	0	3
300	0	3
400	1	2
500	1	1
600	2	0
700	2	0
800	2	0
900	1	1
1000	1	1

N	VII	VIII
0	3	0
100	4	1
200	5	2
300	5	2
400	4	3
500	3	3
600	1	2
700	0	1
800	0	0
900	1	0
1000	3	0

Costante da togliersi = 39.

Terra.

N	II	III	IV	V	N
0	319	170	50	132	1000
50	308	145	46	137	950
100	288	91	36	150	900
150	253	43	22	162	850
200	209	19	8	161	800
250	159	21	0	145	750
300	110	52	3	114	700
350	69	99	16	75	650
400	30	147	32	37	600
450	8	184	46	10	550
500	0	197	51	1	500

N	IV	IX	2 IV − VI	2 V − VIII
0	16	16	10	0
100	24	26	10	2
200	28	33	10	5
300	26	33	6	11
400	20	27	3	15
500	12	18	0	16
600	4	8	0	13
700	0	1	1	9
800	1	0	4	4
900	7	6	7	1
1000	16	16	10	0

Cost. da togliersi = 445.

Marte.

N	II	III	IV
0	14	1	0
50	15	0	1
100	18	0	1
150	21	0	1
200	22	1	2
250	21	2	2
300	16	4	2
350	11	6	2
400	5	7	2
450	1	9	2
500	0	10	2
550	1	11	1
600	5	11	1
650	11	11	1
700	16	10	0
750	21	8	0
800	22	7	0
850	21	5	0
900	18	3	0
950	15	2	0
1000	14	1	0

N	V	VI
0	0	0
100	1	0
200	1	0
300	2	2
400	2	3
500	2	4
600	1	3
700	1	2
800	0	0
900	0	0
1000	0	0

N	VII	VIII
0	2	0
100	1	0
200	1	0
300	0	1
400	0	2
500	0	3
600	1	4
700	2	3
800	2	2
900	2	1
1000	2	0

Costante da togliersi = 26.

N. B. Per la ♁ le perturbaz. son quant. logaritm., e debbono applicarsi al log. della distanza.

Seguono le Perturbazioni delle distanze dei Pianeti dal Sole.

Argomenti di Longitudine

N	♃ II	♄ II	♄ III	♄ IV
0	572	1692	116	3038
10	555	1685	137	3032
20	534	1670	161	3019
30	509	1648	186	3001
40	482	1620	212	2977
50	451	1586	239	2947
60	417	1547	268	2911
70	382	1501	298	2871
80	346	1451	328	2825
90	308	1398	359	2773
100	271	1341	391	2717
110	235	1285	424	2656
120	201	1225	457	2590
130	169	1165	491	2520
140	140	1107	524	2446
150	116	1048	558	2369
160	96	989	591	2288
170	91	931	624	2204
180	72	875	657	2118
190	69	819	690	2029
200	70	765	722	1938
210	79	712	753	1845
220	92	661	783	1751
230	111	611	812	1657
240	135	563	841	1561
250	163	516	868	1466
260	194	471	893	1371
270	228	488	917	1276
280	263	386	940	1182
290	300	347	961	1090
300	337	309	981	999
310	374	274	999	910
320	409	242	1015	824
330	442	211	1028	740
340	474	183	1040	660
350	502	157	1050	583
360	508	133	1058	510
370	550	111	1064	440
380	560	92	1068	375
390	582	75	1070	315
400	592	60	1069	259
410	598	47	1067	208
420	600	35	1062	162
430	598	25	1056	122
440	592	16	1047	87
450	583	9	1036	58
460	569	4	1024	34
470	551	1	1009	17
480	532	0	993	6
490	507	1	974	0
500	480	3	954	0

N	♃ II	♄ II	♄ III	♄ IV
500	480	3	954	0
510	451	7	933	6
520	420	12	909	19
530	387	20	884	37
540	353	30	858	61
550	318	42	831	91
560	283	55	802	127
570	248	70	772	167
580	214	87	742	213
590	182	105	711	265
600	152	126	679	321
610	123	148	646	382
620	96	171	613	448
630	72	195	579	518
640	51	221	546	592
650	34	250	512	669
660	20	280	479	750
670	10	311	446	834
680	3	345	413	920
690	0	379	380	1009
700	1	416	348	1100
710	7	454	316	1193
720	16	494	285	1287
730	28	537	256	1381
740	44	581	229	1477
750	63	626	202	1572
760	86	673	177	1667
770	111	720	153	1762
780	140	769	130	1856
790	170	819	109	1948
800	202	871	89	2039
810	233	924	71	2128
820	269	978	56	2212
830	305	1031	42	2298
840	340	1085	30	2378
850	374	1141	19	2455
860	408	1195	12	2528
870	440	1249	6	2598
880	470	1304	2	2663
890	497	1357	0	2723
900	522	1407	1	2780
910	544	1457	3	2830
920	563	1503	8	2876
930	578	1547	14	2916
940	589	1585	23	2951
950	597	1619	34	2980
960	600	1646	47	3004
970	599	1665	61	3021
980	595	1680	77	3032
990	586	1690	96	3038
1000	572	1692	116	3038

N	♃ III	♃ V	♄ VI	♄ VII
0	62	390	68	120
40	63	367	41	122
80	60	333	19	119
120	54	293	5	113
160	45	246	0	104
200	34	193	4	92
240	22	146	15	78
280	12	99	35	63
320	5	59	61	47
360	1	28	91	[illegible]
400	0	8	125	21
440	3	0	159	10
480	8	5	193	4
520	13	22	223	0
560	19	50	247	1
600	23	87	265	5
640	26	132	274	13
680	29	181	275	24
720	30	232	268	37
760	33	280	[illegible]	52
800	36	324	229	67
840	40	359	200	82
880	46	385	167	96
920	52	399	134	107
960	58	401	99	115

N	♃ IX	♃ XVI	♄ IX	♄ A
0	14	1	20	583
40	13	0	26	509
80	11	1	42	426
120	9	4	61	338
160	7	8	80	251
200	6	13	91	171
240	7	19	93	101
280	9	26	82	48
320	13	32	64	12
360	17	39	44	0
400	22	44	24	9
440	25	48	9	39
480	26	51	1	90
520	25	53	1	156
560	22	53	9	235
600	18	51	24	322
640	12	47	44	410
680	7	42	64	494
720	3	37	82	570
760	1	30	92	632
800	0	24	91	676
840	2	17	80	700
880	4	11	61	702
920	10	6	42	682
960	12	3	26	642

N	♃ IV	♃ VI	♄ V	♅ II	♅ III	N
0	176	0	0	70	32	0
20	175	0	1	70	32	980
40	172	0	4	69	32	960
60	169	1	8	67	31	940
80	164	2	14	65	31	920
100	157	4	22	61	30	900
120	150	6	32	58	29	880
140	142	8	42	53	27	860
160	133	10	54	49	26	840
180	123	13	67	44	24	820
200	112	15	80	39	22	800
220	102	18	93	34	20	780
240	91	21	109	28	18	760
260	80	24	124	24	14	740
280	69	27	138	20	12	720
300	58	30	153	16	10	700
320	48	32	166	13	8	680
340	38	35	179	10	6	660
360	30	38	191	7	5	640
380	22	40	202	5	3	620
400	15	42	211	3	2	600
420	10	43	219	1	1	580
440	5	45	226	1	1	560
460	2	46	230	0	0	540
480	1	46	233	0	0	520
500	0	46	234	0	0	500

N	♃ VII	♃ X	♄ VIII	♅ IV	♅ VI	N
0	0	0	0	0	98	0
20	0	0	0	0	98	980
40	0	0	1	2	96	960
60	1	1	2	4	95	940
80	2	1	3	7	92	920
100	3	2	5	11	89	900
120	5	2	7	17	85	880
140	6	3	9	22	80	860
160	7	4	11	28	75	840
180	9	6	14	35	70	820
200	11	7	17	43	64	800
220	12	8	19	50	58	780
240	14	9	22	58	52	760
260	15	10	25	58	46	740
280	17	11	27	50	40	720
300	19	12	30	43	34	700
320	20	13	33	35	28	680
340	21	15	35	28	23	660
360	22	16	37	22	18	640
380	23	16	39	17	13	620
400	24	17	41	11	9	600
420	25	18	42	7	6	580
440	26	18	43	4	4	560
460	26	19	43	2	2	540
480	26	19	44	0	0	520
500	26	19	44	0	0	500

Calcolo di un Luogo Eliocentrico di Giove per il dì 1 Aprile 1806 a 18ᵒʳ 28′ 19″,63 tempo medio in Firenze.

Tempo dato . . . . 1 Aprile 18ᵒʳ28′19″,63
Longitudine dell' Osservatorio di Firenze 35 42
Tempo ridotto al Meridiano delle Tavole . . . . 1 Aprile 17ᵒʳ52′37″,63 = 91ˢ,74

	lon. m. ♃	Arg. I an. m. ♃	Arg. II	Arg. III	Arg. VII	Arg. VIII	Arg. X	Arg. XI	Arg. XII	Arg. XV	☊
log mot. m.	8,9197536	8,919528	9,1399	8,6532	9,704	8,672	9,6628	9,568	9,811	9,301	5,8597
log 91,74	1 9625819	1 962582	1 9626	1 9626	1 963	1 963	1 9626	1 963	1 963	1 963	1 9626
Somma	0,8823355	0,882110	1,1025	0,6158	1,667	0,635	1,6254	1,531	1,774	1,264	7,8223

[Epo]che	Long. med. ♃	Anom. m. ♃	II	III	VII	VIII	X	XI	XII	XV	☊
[Ann]o 1803	5ˢ22°51′ 9″,9	11ˢ11°40′41″	226,5	993,1	760	847	704	515	587	962	273,4590
[Ann]o 3	3 1 6 34,5	3 1 3 44	154 0	49 2	555	51	501	402	706	219	0 0771
91ˢ,74	7 37 36 0	7 37 22	12 6	4 4	46	4	42	34	59	18	0 0066
[Equaz]ad' ineg.	20 0 3	20 0	3 2	5 5	7	−8	15	4	11	1	
[Lo]n. m. ♃ cor.	9ˢ 1°55′20″,7	2ˢ20°41′47″	393,3	053,9	358	894	262	955	363	200	273,5427

Eq. II		4 33	4
III		1 4	7
IV		7	8
V		21	4
VI		25	1
VII		21	1
VIII		14	1
IX		0	7
X		16	0
XI		5	1
XII		2	9
XIII		1	4
XIV		1	5
XV		0	5
Somma	9 2	2 55	7
[Equ]azione I	− 5	23 11	9
[Va]riazione	+	3	9
Costante	−	11 53	2
[Lo]ng. elioc.	8 26	27 46	7
[Ri]d. all'Ec.	= +	10	9
[Lo]ng. Elioc. [a]ll'Ecclit.	8ˢ26°27′57″,6		

Arg. II = 393,3
III = 53 9
+ 210 5
IV = 657,7
III = 53 9
+ 400 5
V = 112,0
II = 393,3
IV = 657 7
+ 560
VI = 611,0
II = 393,3
− III = 53 9
339,4
+ 210
IX = 549,4

Arg. XII = 363
− VI = 611
752
+ 550
XIII = 302
X = 262
II = 393
+ 810
XIV = 165
VIII = 894
− III = 64
840
+ 400
XVI = 240

Latitudine

l sen (♃ − ☊) . . = 9,3183214
l 4731,6 . = 3 6749988
l latit. . . = 2,9933202 = 1984,7
log 0,0048 = 7,6812412
log 0,06246 = 8 7956020
log variaz. = 9,4701634 = l − 0,3
984,4
Latit. media Equaz. 1 = 0,0
2 = 0 4
3 = 1 0
4 = 1 1
986,9
Costante = − 5,8
Latitud. Elioc. Boreale = 981,1

Calcolo dell' Equazione L

An. m. ♃ = 2ˢ20°41′47″
Angolo φ = + 3 22 3
An. m. ♃ + φ . . . = 2ˢ17°19′44″
l sen (An. m. + φ) = 9,9892919
log Cost. = 4 2983289
log Eq. I = 4,2866208 = l − 19391,9
log Cost. = 7 50101
L 0,06246 = 8 79560 } = − 5°23′11″,9
log var. = 0,58423 = 13,9

Raggio Vettore

Arg. I . . . . = 5,25099
Parte proporzionale . = − 295
Variazione . . . . . . = + 1
Raggio Vett. Ellitt. = 5,24805
Ar. II Eq. II = 685
III III = 59
V V = 301
IX IX = 23
XVI XVI = 19
IV + 500 IV = 124
VI + 780 VI = 41
VII + 780 VII = 6
X + 450 X = 11
Raggio Vettore corr. = 5,25974

Riduzione all' Ecclittica

Longitudine ♃ . . . . = 8ˢ26°27′46″,7
☊ in gradi . . . . = 3 8 28 31 3
Longitudine ♃ − ☊ . . . . = 5 17 59 15 4
2 (longitudine ♃ − ☊) . = 10 35 58 30 8
log sen 2 (long. ♃ − ☊) = 9,60973
log 26.84 . . . . = 1,42878
log Riduzione all' Eclitt. . = 1,03851 = log − 10,9

Calcolo di un Luogo Eliocentrico di Saturno per il dì 14 Luglio 1820 a 9 ore 47′ 37″ tempo medio in Firenze.

Tempo dato . . . . 14 Luglio 9ᵒ 47′37″
Longitudine dell' Osservatorio di Firenze . . . . − 35′42
Tempo ridotto al Meridiano delle Tavole . . . . . 14 Luglio 9ᵒ 11′ 55″ = 196ᵍ,383

	Lon.m. ♄	An.m. ♄	Arg.II	Ar.III	Ar.IV	A.VII VIII	Ar.IX	Ar.XI	A.XIV	A.XVI	☊
log mot.m.	,5253257	8,524340	9,1399	8,6532	8,9526	8,9978	8,7781	9,3680	8,477	9,3291	5,813
log 195,38	2 2908865	2 290887	2 2909	2 2909	2 2909	2 2909	2 2909	2 2909	2 291	2 2909	2 291
Somma	,8159125	0,815227	1,4308	0,9441	1,2435	1,2887	1,0690	1,6589	0,768	1,6200	8,104

Epoche	Long. med.	Anomal. m.	II	III	IV	VII	VIII	IX	XI	XIV	XVI	☊
Anno 1803	5ˢ 9°46′45″4	8ˢ10°35′29″	36,3	955,1	341,2	937	937	926	379	411	294	310,9637
Quoz. per 4	6 15 45 55,6	6 15 27 24	805 7	262 7	525 6	506	514	552	348	162	249	0 3787
Resto	0 12 15 37 7	0 12 14 28	50 4	16 4	32 8	31	32	22	84	10	78	0 0228
mot diur.m.	0 6 32 42 2	0 6 32 4,9	27 0	8 8	17 5	19	19	12	46	6	42	0 0127
	0 14 21 0,8	3 14 49 45,9	919,4	243,0	917,1	494	503	312	857	589	663	311,3779
grand' Ineg.	− 48 39 8	− 48 39 8	3 2	5 4	10 9	+24	− 5	− 2	1	− 2	− 7	
lon. m. corr.	0ˢ13°32′21″0	3ˢ14° 0′46″1	922,6	248,4	928,0	518	498	310	858	587	656	

		+	−
Eq.	II	106,9	
	III	762 9	
	IV		399,6
	V	11 3	
	VI		4 9
	VII		2 3
	VIII	21 3	
	IX	2 9	
	X		6 6
	XI		0 7
	XII		5 2
	XIII		3 5
	XIV		19 3
	XV	1 6	
	XVI	2 3	
	XVII	0 6	
		909,8	442,1
Corr. per l'Equazioni	IV	1337,4	
	VI	19 1	
	VII	29 9	
	X	9 7	
	XI	22 5	
	XII	5 9	
	XIII	6 0	
	XIV	19 7	
Var. sec. per la II		0 3	
	IV		0 1
Equazione I			22816 6
Variazione		26 5	
Corr. finale			1311 2
		+ 2416,8	24570,0
		−24570 0	
		−22153,2	

= − 6° 9′13″,2
lon.m corr. = 0ˢ 13 32 21 0
long. vera = 0ˢ 7°23′ 7″,8
Rid. all'Ec. = − 48 1
long. Elioc. sull'Ecclit. = 0ˢ 7°22′19″,7

Arg. II = 922,6
IV = 928 0
994,6
+ 150
V = 144,6

II = 922,6
III = 248 4
+ 740
VI = 911.0

II = 992,6
VI = 911 0
+ 900
X = 733,6

Arg. II = 922,6
XI + 100 = 958 0
XIII = 880,6

II = 922,6
IV = 928 0
+ 850
XII = 700,6

XI = 858
XII + 100 = 800,6
XV = 658,6

IX = 310
XIV = 587
XVII = 723

Calcolo dell' Equazione I.

An.m.cor. = 3ˢ14° 0′46″,1
Angolo φ = − 3 57 8
An.m. + φ = 3ˢ10° 3′38″,1
l sen (An. m. + φ) = 9,9932702
log Cost. = 4 3649823
log Eq. I = 4,3582525 = l 22816,6
log Cost. = 7 75264
log 0,2053 = 9 31239
log var. = 1,42328 = l + 26,5

Riduzione all' Ecclittica

Longit. ♄ = 0ˢ 7°23′ 7″,8
☊ in gradi = 3 22 6 45 8
Arg. di latit. = 8ˢ15°17′22″,0
2 Ar. di latit. = 5ˢ 0 34 44 0
l sen 2 Arg. di latit. = 9,69183
log 97,825 = 1 99045
l rid. all'ec. = 1,68228 = log 48,1

Latitudine

l sen (♄ − ☊) = 9,9855258
l 8978,1 = 3 9531844
l latit. = 3,9387102 = l −8683,8
log 15,6 = 1 19033
log 0,2053 = 9 31239
l sen Ar. lat. = 9 98553
log variaz. = 0,48825 = l + 3,0
latitudine media = −8680,8
Costante = − 12 0
− 8692,8

Equaz. III = 8,4
XI = 2 7
VI = 0 8
VIII = 1 4
Somma = 13 3 + 13,3
Latit. Austr. = 8679,5

Raggio Vettore

Arg. I = 9,40691
Parte prop. = 0
Variazione = + 10
Raggio Vett. Ell. = 9,40701

Ar.	Eq.	
II	II	= 1514
III	III	= 864
IV	IV	= 2909
VI	VI	= 142
VIII	VIII	= 2
IX	IX	= 69
XI-XII	A	= 251
V+250	V	= 208
VII+820	VII	= 35

Raggio vett. corr. = 9,46695

TAVOLA

Della Parallasse, e semidiametro dei Pianeti.

Argomento long. del Sole — long. geoc. del Pianeta.

MERCURIO.

Argomento.	Parallasse. ☿ in afelio	Parallasse. in dist. m.	Parallasse. in perielio	sem. diam. in dist. m.
☌ super.				
0° 0′	5″,93	6″,27	6″,63	2″,1
10 0	6 14	6 54	7 02	2 2
17 0	6 59	7 19	8 27	2 4
17 54	....	....	9 14	.....
20 0	6 92	7 76	....	2 6
22 30	7 30	8 86	....	2 9
22 46	....	9 44	....	3 1
25 0	7 88	....	....	.....
27 0	8 71	....	....	.....
27 49	9 84	....	....	.....
27 0	11 11	....	....	.....
25 0	12 28	....	....	.....
22 30	13 25	10 05	....	3 3
20 0	13 98	11 47	....	3 8
17 0	14 68	12 38	10 11	4 1
10 0	15 77	13 62	11 90	4 5
0 0	16 31	14 20	12 53	4 7
☌ infer.				

VENERE.

Argomento.	Parallasse. ⊙ in apog.	Parallasse. ⊙ in dist. m.	Parallasse. ⊙ in perig.	sem. diam. in dist. m.
☌ super.				
0° 0′	5″,00	5″,05	5″,10	4″,6
10 0	5 11	5 16	5 21	4 7
20 0	5 47	5 52	5 56	5 0
30 0	6 24	6 27	6 30	5 7
40 0	7 97	7 93	7 87	7 3
42 30	8 86	8 70	8 56	8 0
45 0	10 90	10 12	9 72	9 3
45 21	....	....	13 06	....
46 20	....	12 60	....	11 6
47 22	12 17	....	....	....
45 0	13 60	15 68	17 56	14 4
42 30	16 80	18 35	20 03	16 9
40 0	18 55	20 03	21 68	18 4
30 0	23 77	25 34	27 12	23 3
20 0	27 08	28 77	30 69	26 5
10 0	29 02	30 78	32 78	28 3
0 0	29 65	31 83	33 48	29 3
☌ infer.				

Argomento	MARTE. Parallasse. ♂ in afelio	MARTE. Parallasse. in dist. m.	MARTE. Parallasse. in perielio	MARTE. semid. in dist. m.	GIOVE. in dist. m. Parallasse.	GIOVE. in dist. m. semi diam.	SATURNO. in dist. med. Parallasse.	SATURNO. in dist. med. semi diam.	URANO. In dist. m. Parallasse.	URANO. In dist. m. semi diam.	Argomento
0ˢ 0	3″,26	3″,45	3″,66	1″,8	1″,40	14′,8	0″,82	7″,2	0″,43	1″,84	12ˢ 0
10	3 29	3 48	3 69	1 8	1 41	14 9	0 82	7 3	0 43	1 84	20
20	3 39	3 69	3 82	1 9	1 42	15 0	0 84	7 4	0 43	1 85	10
1 0	3 54	3 77	4 04	2 0	1 44	15 2	0 84	7 5	0 44	1 86	11 0
10	3 78	4 05	4 37	2 1	1 47	15 5	0 85	7 6	0 44	1 87	20
20	4 10	4 44	4 85	2 3	1 50	15 9	0 86	7 7	0 44	1 88	10
2 0	4 52	4 96	5 52	2 6	1 54	16 3	0 87	7 8	0 44	1 89	10 0
10	5 07	5 64	6 27	2 9	1 59	16 8	0 88	7 9	0 45	1 91	20
20	5 74	6 51	7 61	3 4	1 64	17 4	0 90	8 0	0 45	1 92	10
3 0	6 53	7 57	9 12	4 0	1 70	18 0	0 92	8 1	0 46	1 94	9 0
10	7 44	8 80	10 93	4 6	1 76	18 7	0 94	8 3	0 46	1 96	20
20	8 42	10 15	12 96	5 3	1 82	19 4	0 95	8 4	0 46	1 98	10
4 0	9 45	11 54	15 08	6 0	1 88	20 0	0 97	8 6	0 47	1 99	8 0
10	10 41	12 90	17 15	6 7	1 93	20 5	0 98	8 7	0 47	2 01	20
20	11 29	14 14	19 03	7 4	1 98	21 0	1 00	8 8	0 47	2 02	10
5 0	12 04	15 18	20 61	7 9	2 02	21 4	1 01	8 8	0 47	2 03	7 0
10	12 60	15 96	21 80	8 3	2 04	21 6	1 01	8 9	0 47	2 04	20
20	12 95	16 45	22 54	8 5	2 06	21 8	1 02	9 0	0 48	2 05	10
6 0	13 07	16 61	22 78	8 6	2 08	22 0	1 02	9 0	0 48	2 05	6 0

TAVOLE GENERALI

Per calcolare l' Aberrazione dei Pianeti in Longitudine, e Latitudine.

TAVOLA I.

Gradi	O'— VI'+	I'— VII'+	II'— VIII'+	Gradi
0	20",26	17",54	10",13	30
1	20 25	17 36	9 82	29
2	20 24	17 18	9 51	28
3	20 23	16 99	9 20	27
4	20 21	16 79	8 88	26
5	20 18	16 59	8 56	25
6	20 14	16 39	8 24	24
7	20 10	16 18	7 91	23
8	20 06	15 96	7 59	22
9	20 01	15 74	7 26	21
10	19 95	15 52	6 93	20
11	19 88	15 29	6 59	19
12	19 81	15 05	6 26	18
13	19 74	14 81	5 92	17
14	19 65	14 57	5 58	16
15	19 56	14 32	5 24	15
16	19 47	14 07	4 90	14
17	19 37	13 81	4 56	13
18	19 26	13 55	4 21	12
19	19 15	13 29	3 87	11
20	19 03	13 02	3 52	10
21	18 91	12 75	3 17	9
22	18 78	12 47	2 82	8
23	18 64	12 19	2 47	7
24	18 50	11 91	2 12	6
25	18 36	11 62	1 77	5
26	18 21	11 33	1 41	4
27	18 05	11 03	1 06	3
28	17 88	10 73	0 71	2
29	17 71	10 43	0 35	1
30	17 54	10 13	0 00	0
Gradi	XI'— V'+	X'— IV'+	IX'— III'+	Gradi

TAVOLA II.

Gradi	O'+ VI—	I'+ VII'—	II'+ VIII'—	Gradi
0	0",34	0",29	0",16	30
5	0 33	0 27	0 14	25
10	0 33	0 25	0 11	20
15	0 32	0 23	0 08	15
20	0 31	0 21	0 06	10
25	0 30	0 19	0 03	5
30	0 29	0 16	0 00	0
Gradi	XI'+ V'—	X'+ IV'—	IX'+ III'—	Gradi

TAVOLA III.

Termini costanti per l'Aberraz. in latitud.

Il segno — indica moto Australe.

Per Mercurio	—	0",71
. . Venere	—	0 01
. . Marte	—	0 01
. . Cerere.	—	0 01
. . Pallade	—	0 01
. . Giunone.	—	0 02
. . Giove		0 00
. . Saturno	—	0 01
. . Urano		0 00

TAVOLA IV.

Logaritmi costanti.

Nomi dei Pianeti	Logaritmi costanti per la longitudine, e latitud. A	B
Per Mercurio	0, 2090472	9, 5227716
Venere	0 0729170	7 8975878
Marte	9 9110786	8 8753114
Cerere	9 7831963	8 2249467
Pallade	9 7893095	8 7228516
Giunone	9 7957281	8 7465462
Giove	9 6422257	8 3167171
Saturno	9 5108546	8 2616695
Urano	9 5587955	8 0156871

Nomi dei Pianeti	Log. cost. per la longitud. C	Log. cost. per la latitud. D
Per Mercurio	7, 7726491	9, 2981910
Venere	. . . .	8 8458934
Marte	. . . .	8 4202787
Cerere	. . . .	9 0564642
Pallade	. . . .	9 6283728
Giunone	. . . .	9 1610900
Giove	. . . .	8 0038386
Saturno	. . . .	8 1507061
Urano	. . . .	7 4884415

TAVOLA I. PARTE I. *Refrazione media.*

fra-one	Differenza	Distanz. app. dal Zenit	Refrazione	Differenza	Distanz. app. dal Zenit	Refrazione	Differenza	Distanz. app. dal Zenit	Refrazione	Differenza
Sec.	Sec.	G. M.	M. S.	Sec.	G. M.	M. S.	S.	G. M.	M. S.	S.
1. 0	1,0	45. 30	0. 58,9	1,0	68. 0	2'.22,4	2,4	83 0	7.22,6	19,6
1 0	1 0	46 0	0 59 9	1 1	68 20	2 24 8	2 5	83 20	7 42 2	21 3
3 0	1 1	46 30	1 1 0	1 1	68 40	2 27 3	2 5	83 40	8 3 5	23 2
4 1	1 0	47 0	1 2 1	1 1	69 0	2 29 8	2 6	84 0	8 26 7	12 4
5 1	1 0	47 30	1 3 2	1 1	69 20	2 32 4	2 7	84 10	8 39 2	12 9
6 1	1 0	48 0	1 4 3	1 1	69 40	2 35 1	2 8	84 20	8 52 0	13 5
7 1	1 0	48 30	1 5 4	1 2	70 0	2 37 9	2 8	84 30	9 5 5	13 2
8 1	1 1	49 0	1 6 6	1 2	70 20	2 40 7	3 0	84 40	9 19 7	14 9
9 2	1 0	49 30	1 7 8	1 1	70 40	2 43 7	3 0	84 50	9 34 6	15 7
0 2	1 0	50 0	1 8 9	1 2	71 0	2 46 7	3 2	85 0	9 50 3	16 4
1 2	1 1	50 30	1 10 1	1 3	71 20	2 49 9	3 2	85 10	10 6 7	17 2
2 3	1 1	51 0	1 11 4	1 3	71 40	2 53 1	3 4	85 20	10 23 9	18 2
3 4	1 0	51 30	1 12 7	1 3	72 0	2 56 5	3 5	85 30	10 42 1	19 1
4 4	1 1	52 0	1 14 0	1 3	72 20	3 0 0	3 6	85 40	11 1 2	20 2
5 5	1 1	52 30	1 15 3	1 4	72 40	3 3 6	3 7	85 50	11 21 4	21 2
6 6	1 1	53 0	1 16 7	1 4	73 0	3 7 3	3 9	86 0	11 42 6	22 5
7 7	1 1	53 30	1 18 1	1 5	73 20	3 11 2	4 0	86 10	12 5 1	23 7
8 8	1 1	54 0	1 19 6	1 5	73 40	3 15 2	4 2	86 20	12 28 8	25 2
19 9	1 2	54 30	1 21 1	1 5	74 0	3 19 4	4 3	86 30	12 54 0	26 6
11 1	1 1	55 0	1 22 6	1 5	74 20	3 23 7	4 5	86 40	13 20 6	28 2
12 2	1 2	55 30	1 24 1	1 6	74 40	3 28 1	4 7	86 50	13 48 8	30 0
13 4	1 2	56 0	1 25 7	1 6	75 0	3 32 9	5 0	87 0	14 18 8	31 8
14 6	1 2	56 30	1 27 3	1 7	75 20	3 38 9	5 2	87 10	14 50 6	33 9
15 8	1 2	57 0	1 29 0	1 7	75 40	3 43 1	5 3	87 20	15 24 5	36 0
17 0	1 3	57 30	1 30 7	1 8	76 0	3 48 3	5 6	87 30	16 0 5	38 3
18 3	1 2	58 0	1 32 5	1 8	76 20	3 54 0	5 9	87 40	16 38 8	40 8
19 5	1 3	58 30	1 34 3	1 8	76 40	3 59 9	6 1	87 50	17 19 6	43 5
30 8	1 3	59 0	1 36 1	1 9	77 0	4 6 0	6 5	88 0	18 3 1	46 4
32 1	1 3	59 30	1 38 0	2 0	77 20	4 12 5	6 7	88 10	18 49 5	49 4
33 4	1 4	60 0	1 40 0	2 1	77 40	4 19 2	7 1	88 20	19 38 9	52 6
34 8	1 4	60 30	1 42 1	2 0	78 0	4 26 3	7 5	88 30	20 31 5	56 0
36 2	1 4	61 0	1 44 1	2 2	78 20	4 33 8	7 9	88 40	21 27 5	59 4
37 6	1 5	61 30	1 46 3	2 2	78 40	4 41 7	8 3	88 50	22 26 9	63 0
39 1	1 5	62 0	1 48 5	2 3	79 0	4 50 0	8 8	89 0	23 29 9	66 4
40 6	1 5	62 30	1 50 8	2 4	79 20	4 58 8	9 3	89 10	24 36 3	34 9
42 1	1 5	63 0	1 53 2	2 5	79 40	5 8 1	9 8	89 15	25 11 2	34 9
43 6	1 6	63 30	1 55 7	2 5	80 0	5 17 9	10 5	89 20	25 40 1	36 3
45 2	1 7	64 0	1 58 2	2 7	80 20	5 28 4	11 1	89 25	26 21 4	36 2
46 9	1 7	64 30	2 0 9	2 7	80 40	5 39 5	11 8	89 30	26 58 7	37 3
48 6	1 7	65 0	2 3 6	2 9	81 0	5 51 3	12 7	89 35	26 36 0	37 4
50 3	1 8	65 30	2 6 5	2 9	81 20	6 4 0	13 5	89 40	28 13 4	38 3
52 1	1 9	66 0	2 9 4	3 1	81 40	6 17 5	14 5	89 45	28 51 7	38 3
54 0	1 9	66 30	2 12 5	3 2	82 0	6 32 0	15 6	89 50	29 30 0	37 8
55 9	2 0	67 0	2 15 7	3 3	82 20	6 47 6	16 8	[illegible] 55	30 7 8	37 9
57 9		67 30	2 19 0		82 40	7 4 4	18 [illegible]	[illegible] 0	30 45 7	

Parte II. *Quantità da moltipl. per la refr. media, onde ottenere la vera.*
Argomento. Altezza del Barometro, e gradi del Termometro.

Gradi del Termometro	*Altezza del Barometro*									
	p l 27. 0	p l 27. 2	p l 27. 4	p l 27. 6	p l 27. 8	p l 27. 10	p l 28. 0	p l 28. 2	p l 28. 4	p l 28. 6
27	0,893	0,898	0,904	0,910	0,915	0,920	0,926	0,932	9,937	9,942
26	97	0,902	08	13	19	24	30	36	41	47
25	0,901	06	12	17	23	29	34	40	45	51
24	05	10	16	22	27	33	38	44	49	55
23	09	14	20	26	31	37	42	48	53	59
22	13	18	24	30	35	41	46	52	58	63
21	17	22	28	34	39	45	51	56	62	68
20	21	27	32	38	44	49	55	61	66	72
19	25	31	36	42	48	54	60	65	71	77
18	29	35	41	46	52	58	64	69	75	81
17	33	39	45	51	57	62	68	74	79	85
16	38	44	49	55	61	67	73	78	84	90
15	42	48	54	60	65	71	77	83	87	94
14	46	52	58	64	70	76	82	87	93	99
13	51	57	63	69	74	80	86	92	98	1,003
12	55	61	67	73	79	85	91	96	1,002	08
11	60	66	72	78	84	89	95	1,001	07	13
10	64	70	76	82	88	94	1,000	05	11	18
9	69	75	81	87	93	99	04	10	16	22
8	73	79	85	92	97	1,003	09	15	21	27
7	78	84	90	96	1,002	08	14	20	26	32
6	83	89	95	1,001	07	13	19	25	31	37
5	87	94	99	05	11	18	24	30	36	42
4	92	98	1,004	10	16	22	29	35	41	47
3	97	1,003	09	15	21	27	34	40	46	52
2	1,002	08	14	20	26	33	39	45	51	58
1	07	13	19	25	31	38	44	50	56	63
0	12	18	24	30	37	43	49	55	62	68
— 1	17	23	29	36	42	48	54	61	67	73
2	22	28	34	41	47	53	60	66	72	79
3	28	33	40	46	52	59	65	72	78	84
4	33	39	45	51	58	64	70	77	83	90
5	38	44	50	57	63	69	76	82	88	95
6	43	49	55	62	68	75	81	88	94	1,100
7	48	54	61	67	74	80	87	93	1,100	06
8	53	60	66	72	79	86	92	99	05	12
9	58	65	72	78	85	91	98	1,104	11	17
10	64	70	77	84	90	97	1,103	10	17	23

TAVOLA II. *Seconda parte della correzione proveniente dal Termometro, da moltiplicarsi per il grado del Termometro sopra 10*

Distan. dal Zenit	Correzione	Distan. dal Zenit	Correzione	Distan. dal Zenit	Correzione
80°	— 0 ,05	86°. 0′	— 0, 55	89°. 0′	— 4, 65
81	— 0 07	86 30	— 0 73	89 10	— 5 35
82	— 0 10	87 0	— 0 99	89 20	— 6 27
83	— 0 14	87 30	— 1 39	89 30	— 7 38
84	— 0 21	88 0	— 2 0[illegible]	89 40	— 8 75
85	— 0 33	88 30	— 2 97	89 50	— 10 44
86	— 0 55	89 0	— 4 65	90 0	— 12 49

TAVOLA III. *Quantità da aggiungersi alla refrazione verso il Sud presa nella Tavola I. per aver la refrazione verso il Nord*

Distanza dal Zenit	Quant. da aggiun.	Distanza dal Zenit	Quant. da aggiun.
85°. 30′	2, 1	87°. 0′	7, 5
86 0	3 2	87 30	12 2
86 30	4 8	88 0	20 3
87 0	7 9	88 30	36 0

DEI PRINCIPALI ELEMENTI

		☿ nel 1800	♀ nel 1800	♁ nel 1800	♂ nel 1800
Dist. media dal ☉ comput.° le masse	In parti della dist. media della Terra dal ☉	0,38709870	0,72333225	1,00000000	1,52369163
	In semidiametri terrestri equatoriali	9178	17149	23709	36125
	In miriametri	5852211	10,935435	15118135	23035368
	In miglia geografiche	31601938	59051352	81637935	124390990
In parti della dist. media della ♁ dal ☉ non comput.° le masse		0,38709901	0,72333228	1,00000000	1,52369231
Moto medio tropico	In un giorno	4°5′32″56	1°36′ 7″81	59′ 8″33	31′26″66
	In 365 giorni	{1493 53 43 3 36	{584 224 47 29 69	359°45 40 37	191°17 9 64
	In 365 giorni ¼	{1494 54 44 26 50	{585 224 11 31 64	360 0 27 43	191 25 1 30
	In 100. anni Giuliani	74 4 10 00	199 12 44 05	0 45 45 00	61 42 10 40
Moto medio sidereo in 365 giorni ¼		1494 43 36 40	585 10 41 54	359 59 37 35	191 24 11 20
Eccentricità	In parti della dist. media del pianeta dal ☉	0,2056212	0,00686183	0, 0167947	0, 0932173
	In parti della dist. media della Terra dal Sole	0 0795957	0 00496338	0, 0167947	0,1420344
	In secondi	42412″42	1415″35	3464″15	19227″, 46
Equazione massima		23°40′45 0	0°47′ 10 7	1°55′28 5	10°41′ 33 4
Inclinazione all' eclittica		7 0 0 0	3 23 28 5	0 0 0 0	1 51 5 0
Rivoluzione	Tropica	g 87,968435	224,695437	365,242264	686,929480
	Siderea	87,969254	224 700781	365 256383	686 979425
Diametro	Visto alla distanza media della Terra dal Sole	6″01	16″60	17″40	9″13
	Alla dist. m. del pian. dal ☉	15 53	22 95	17 40	5 99
	In parti del diametro equatoriale della Terra	0,34540	0,95402	1,00000	0,52471
	In miriametri	440	12177	1275	669
	In miglia geografiche	2378	6567	6887	3614
Schiacciamento		. . . .	. . . .	$\frac{1}{310}$	$\frac{1}{16}$
Massa	In parti della massa della ♁	0,162277	0,964067	1,000000	0,135025
	In parti della massa del ☉	$\frac{1}{2118700}$	$\frac{1}{356632}$	$\frac{1}{343817}$	$\frac{1}{2546320}$
		0,000000472	0,000002804	0,000002909	0,000000393
Densità in parte della dens. della ♁		3 9252	1 1065	1	0 9937
Volume in parti del Vol. della ♁		0 041343	0 871170	1,000000	0 135883

O L A

DEL SISTEMA PLANETARIO.

⚳ nel 1806	⚴ nel 1804	⚵ nel 1805	⚶ nel 1807	♃ nel 1800	♄ nel 1800	♅ nel 18[illegible]
2.76725101	2,76828259	2,66801533	2,36207642	5.20277989	9.53870786	10,183486
65608	65632	63255	56002	123351	226149	454814
41835678	41851275	40335419	35710193	78656335	144207484	29001856[illegible]
225912659	225996875	217811263	192835042	424744208	778720416	156610024
2,76725369	2,76828527	2,66801791	2,36207871	5,20116072	9,53781286	19,1831774
12'50"92	12'50"49	13'34"32	16'17"52	4'59"27	2'0"59	0'42"3
78° 9 46 90	78° 7 9 65	82° 33 48 26	99° 6 35 57	30° 20 31 7	12° 13 37 07	4° 17 44 2
78 12 59 63	78 10 22 28	88 37 11 84	99 10 39 95	30 21 46 56	12 14 7 22	4 17 54 8
261 39 22 57	257 17 7 60	341 59 44 10	197 46 34 70	156 17 32 88	143 32 1 68	69 51 19 5
78 12 9 53	78 9 32 16	82 36 21 74	99 9 49 85	30 20 56 43	12 13 17 12	4 17 4 7
0,0785928	0,0446473	0,2554521	0,0887809	0,0481681	0,0561505	0,0466995
0 2172370	0 6772530	0 6815502	0 2097072	0 2506080	0 5956032	0 8958590
16192"36	50462"12	52690"77	18312"37	9935"38	31581"87	9632"46
9° 0' 7 6	28° 13' 58 4	29° 29' 59 0	10° 10' 57 82	5° 31' 16 03	6° 26' 12 11	5° 21' 9
10 37 31 2	34 37 24 0	13 4 11 0	7 8 18 8	1 18 51 5	2 29 38 1	0 46 26
1681,101745	1682,041689	1591,504119	1325,801228	4330,61049	10746,74032	30589,35444
1681 400908	1682 341186	1581,772240	1325,987293	4332 59631	10758,97778	30688,70984
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	184"09	148"91	74"93
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	35 38	15 61	3 91
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	30 57024	8 55025	4 30240
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	13795	10904	5487
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	74490	58884	29630
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{12}$	. . . . .
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	322,201	97,798	17,628
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	$\frac{1}{1067,09}$	$\frac{1}{3515,597}$	$\frac{1}{19504}$
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	0,000937128	0,000284447	0,00005127[illegible]
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	0,2920	0 1696	0 2200
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	1103,277	576,450	80,121

Numeri e Logarimi il cui uso è più frequente nella Fisica ec.

		Numeri	Logaritmi
Lunghezza di un giorno	in ore	24^{or}	1,3802112
	in minuti	1440′	3 1583625
	in secondi	86400″	4 9365137
Circonferenza del circolo	in gradi	360°	2 5563025
	in minuti	21600′	4 3344538
	in secondi	1296000″	6 1126050
Retta in parti lineari	del diametro = 1	3,1415926536 ec = r	0 4971499
	del raggio = r	r × 6,2831853072 ec	0 7981799 + l r
Arco eguale al raggio	in gradi	57°295766	1 7581225
	in minuti	3437′,7466	3 5362738
	in secondi	206264″,8	5 3144250
Superficie	di un circolo del raggio r	. . . . . .	0 4971499 + 2lr
	di una sfera del raggio r	. . . . . .	1 0992099 + 2lr
Solidità di una sfera del raggio r		. . . . . .	0 6220886 + 3lr
Anno siderale	in giorni	365^{g},256383	2 5625978
	in ore	8766^{or} 15	3 9428090
	in minuti	525969,2	5 7209603
	in secondi	31558151″,5	7 4991116
Anno tropico	in giorni	365^{g},242264	2 5625810
	in ore	8765^{or}, 814	3 9427922
	in minuti	525948′, 86	5 7209435
	in secondi	31556932″	7 4990948
Raggio dell' equatore	in piedi	19629348	7 2929060
	in tese	3271558	6 5147547
	in metri	6376385,7	6 8045747
Raggio al polo	in piedi	19566030	7 2915028
	in tese	3261005	6 5133515
	in metri	6355817, 3	6 8031714
Compression della ♁ = $\frac{1}{310}$	in frazione semplice	0,003225806	7 5086383
	in piedi	63318	4 8015272
	in tese	10553	4 0233759
	in metri	20568,2	4 3131959
Modulo dei Logaritmi ordinari		0,4342945	9 6377843
Logaritemo del Logaritemo ipeoholico di 10		2,3025851	0 3622149

Fig. 50.
52
53
55
56
54. 2.a
59
63
62
Fig. 63

Fig. 64

Fig. 76.

Fig. 77.

Fig. 93.

Fig. 94.
d
e
f
Q
C
D
E
T
S
R
A
r
S
R
A
t
b